ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÁO CÁO TÓM TẮT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ LỚP MÔ HÌNH CÂN BẰNG

Mã số: ĐH2015-TN06-03

Chủ nhiệm đề tài: ThS. NCS. Nguyễn Thị Thanh Huyền

Thái Nguyên - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÁO CÁO TÓM TẮT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ LỚP MÔ HÌNH CÂN BẰNG

Mã số: ĐH2015-TN06-03

Xác nhận của tổ chức chủ trì

(ký, họ tên, đóng dấu)

Chủ nhiệm đề tài

(ký, họ tên)

ThS. NCS. Nguyễn Thị Thanh Huyền

Thái Nguyên - 2018

DANH SÁCH NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI VÀ ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

I. Thành viên thực hiện đề tài

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác	Vai trò
1	ThS. Nguyễn Thị Thanh Huyền	Khoa Toán - Tin, Trường ĐHKH	Chủ nhiệm
2	TS. Mai Viết Thuận	Khoa Toán - Tin, Trường ĐHKH	Thư ký +NCV

II. Đơn vị phối hợp thực hiện

Tên đơn vị	Nội dung phối hợp	Đại diện
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam	Tư vấn, giúp đỡ, định hướng nghiên cứu	GS. TSKH. Lê Dũng Mưu
Học Viện Tài chính	Hợp tác nghiên cứu, viết chung bài báo	TS. Nguyễn Văn Quý
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam	Hợp tác nghiên cứu, viết chung bài báo	TS. Lê Hải Yến

Mục lục

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Đơn vị: Trường Đại học Khoa học

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung:
- Tên đề tài: **Phương pháp giải một số lớp mô hình cân bằng**
- Mã số: **ĐH2015-TN06-03**
- Chủ nhiệm: **ThS. NCS. Nguyễn Thị Thanh Huyền**
- Tổ chức chủ trì: **Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên**
- Thời gian thực hiện: **9/2015 - 9/2018**

2. Mục tiêu:
- Xây dựng một số phương pháp mới để giải một số lớp bài toán cân bằng.
- Tính toán thử nghiệm các ví dụ số trên máy tính.
- Nghiên cứu một số bài toán cân bằng không nhất thiết lồi hoặc đơn điệu và đưa ra sự hội tụ cho nghiệm.
- Mở rộng hợp tác nghiên cứu khoa học với các cơ sở nghiên cứu ngoài Đại học Thái Nguyên.
- Học tập và nâng cao năng lực nghiên cứu của chủ nhiệm đề tài và các thành viên nghiên cứu.

3. Tính mới, tính sáng tạo:
- Giải quyết được một số vấn đề nghiên cứu mới;
- Các kết quả thu được dưới dạng thuật toán và chứng minh sự hội tụ.

4. Kết quả nghiên cứu:
- Thu được thuật toán chiếu kết hợp phép lặp Mann-Krasnoselskii giải bài toán cân bằng giả đơn điệu kết hợp với bài toán tối ưu, chứng minh sự hội tụ của thuật toán và đưa ra ví dụ số minh họa.
- Thu được thuật toán dưới đạo hàm giải bài toán chấp nhận tách phi tuyến: ứng dụng giải mô hình cân bằng Nash có ràng buộc, chứng minh sự hội tụ. Ba ví dụ số bằng chương trình Matlab minh họa cho thuật toán.

5. Sản phẩm:

5.1. Sản phẩm khoa học:

03 bài báo đăng trên các tạp chí Quốc tế có uy tín trong danh mục ISI:

(1). Le Hai Yen, Le Dung Muu, Nguyen Thi Thanh Huyen (2016), "An Algorithm for a Class of Split Feasibility Problems: Application to a Model in Electricity Production", *Mathematical Methods of Operations Research*, 84, pp. 549-565. (SCIE)

(2). Mai Viet Thuan, Dinh Cong Huong, Duong Thi Hong (2018), "New nesults on robust finite-time passivity for fractional-order neural networks with uncertainties", *Neural Processing Letters*, *DOI* 10.1007/s11063-018-9902-9. (SCIE)

(3). Mai Viet Thuan, Tran Nguyen Binh, Dinh Cong Huong (2018), "Finite-time guaranteed cost control of caputo fractional-order neural networks", *Asian Journal of Control*, *DOI*: 10.1002/asjc.1927. pp. 1-10 (SCIE)

***5.2. Sản phẩm đào tạo*:**
- Hướng dẫn 01 đề tài sinh viên nghiên cứu khoa học:

1. Nguyễn Thị Oanh (2017), *Bài toán chấp nhận tách và một số phương pháp giải*, Đề tài sinh viên

nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

- Hướng dẫn 01 KLTN Đại học đã nghiệm thu:

1. Phạm Thị Hồng Nhung (2016), *Thuật toán dưới vi phân xấp xỉ cho bài toán cân bằng*, Khóa luận tốt nghiệp, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên.

- Đề tài là một phần của Luận án tiến sĩ của chủ nhiệm đề tài:

Tên luận án: "*Một số phương pháp giải bài toán cân bằng có tính lồi suy rộng*".

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu:

- Cung cấp tài liệu tham khảo cho các sinh viên, học viên, nghiên cứu sinh, và các nghiên cứu viên chuyên ngành Toán ứng dụng.

Ngày 15 tháng 9 năm 2018

Tổ chức chủ trì	**Chủ nhiệm đề tài**
(*ký, họ và tên, đóng dấu*)	(*Ký, họ và tên*)

ThS. NCS. Nguyễn Thị Thanh Huyền

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

- Project title: **Method for solving some classes of equilibrium model**

- Code number: **ĐH2015-TN06-03**

- Coordinator: **MSc. PhD. Student Nguyen Thi Thanh Huyen**

- Implementing institution: **TNU - University of Sciences**

- Duration: from 9/2015 to 9/2018

2. Objective(s):

- Construct some new methods for solving some classes equilibrium problem.

- Compute some numerical examples on computer.

- Study some problems which are not convex or monotone equilibrium problems and give the convergence for solution.

- Expand the scientific research cooperations with research institutes outside TNU.

- Study and improve the research capacity of the research leader and research members.

3. Creativeness and innovativeness:

- Resolve several research problems;

- Obtain the results which are algorithms and proof the convergence.

4. Research results:

- Obtain a projection algorithm combined with the Mann-Krasnoselskii iterative scheme for solving the pseudomonotone equilibrium problem combining optimization problem, prove the convergence of the algorithm and give a numerical example;

- Get a subgradient algorithm for solving a class of nonlinear split feasibility problems: application to jointly constrained Nash equilibrium models, prove the convergence of the algorithm. Three numerical examples by Matlab are illustrated for the given algorithm.

5. Products:

5.1. Scientific publications:

Published 03 papers in ISI journals:

1. Le Hai Yen, Le Dung Muu, Nguyen Thi Thanh Huyen (2016), "An Algorithm for a Class of Split Feasibility Problems: Application to a Model in Electricity Production", *Mathematical Methods of Operations Research*, 84, pp. 549-565. (SCIE)

2. Mai Viet Thuan, Dinh Cong Huong, Duong Thi Hong (2018), "New nesults on robust finite-time passivity for fractional-order neural networks with uncertainties", *Neural Processing Letters*, *DOI* 10.1007/s11063-018-9902-9. (SCIE)

3. Mai Viet Thuan, Tran Nguyen Binh, Dinh Cong Huong (2018), "Finite-time guaranteed cost control of caputo fractional-order neural networks", *Asian Journal of Control*, *DOI*: 10.1002/asjc.1927. pp. 1-10. (SCIE)

***5.2. Training results*:**

- Supervised 01 student's scientific research project:

1. Nguyen Thi Oanh (2017), *Split feasibility problem and some methods* , Undergraduate Thesis, Thai Nguyen University of Sciences.

- Supervised 01 student's bachelor thesis:

2. Pham Thi Hong Nhung (2018), *An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems*, Bachelor thesis, TNU-University of Sciences.

- The project is a part of the coordinator's PhD dissertation: Title of the dissertation: "*Solution methods for equilibrium problems with generalized convexity*".

6. Transfer alternatives, application institutions, impacts and benefits of research results:

- Provide the reference for bachelor, master and Ph.D students whose major is Applied Mathematics, and for researchers.

Mở đầu

1. Tính cấp thiết của đề tài

Bài toán cân bằng là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in K, \qquad (EP)$$

trong đó K là tập cho trước và $f : K \times K \to \mathbb{R}$ là một hàm cho trước sao cho $f(x, x) = 0$.

Bất đẳng thức trên được H. Nikaido và K. Isoda đưa ra lần đầu tiên năm 1955 khi tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác. Năm 1972, Ky Fan gọi bất đẳng thức này là bất đẳng thức minimax. Tuy nhiên nó có tên gọi là bài toán cân bằng (equilibrium problem) theo cách gọi của các tác giả L. D. Muu và W. Oettli năm 1992, E. Blum và W. Oettli năm 1994.

Bài toán cân bằng bao hàm nhiều lớp bài toán quen thuộc như: bài toán tối ưu, bài toán điểm yên ngựa, bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác, bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán bù.

Trong những năm gần đây, các phương pháp giải bài toán cân bằng rất được quan tâm nghiên cứu. Chẳng hạn phương pháp điểm gần kề, phương pháp nguyên lý bài toán phụ, phương pháp bắn,...Một phương pháp khác cũng được sử dụng để giải bài toán cân bằng là phương pháp chiếu.

Năm 2011, Santos và Scheimberg giới thiệu thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ cho bài toán cân bằng tiền đơn điệu (paramonotone). Thuật toán này hay ở chỗ chỉ dùng một lần chiếu tại mỗi bước lặp mà vẫn đảm bảo sự hội tụ.

Năm 2016, L.H. Yen, L.D. Muu, và N.T.T. Huyen trong (1) đề xuất thuật toán mới giải bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in K : f(x^*, y) \geq 0\ \forall y \in K \text{ và } g(Ax^*) \leq g(u)\ \forall u \in H_2, \qquad (SEO)$$

trong đó g là hàm lồi nửa liên tục dưới chính thường trong không gian H_2.

Hơn nữa, trong một bài báo (2) vừa gửi đăng gần đây, chúng tôi đã đề xuất một thuật toán mới cho bài toán chấp nhận tách trong trường hợp toán tử A là phi tuyến. Cụ thể, chúng tôi giải quyết cho trường hợp A là toán tử tựa tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều.

Như đã trình bày ở trên, bài toán bất đẳng thức biến phân là một trường hợp riêng của bài toán cân bằng. Do đó, để giải bài toán cân bằng, người ta tìm cách giải bài toán bất đẳng thức biến phân. Trong phần tiếp theo, chúng tôi trình bày một cách tiếp cận thông qua điểm cân bằng của mạng nơ ron để tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân.

Trong những năm gần đây, việc sử dụng mạng nơ ron với đạo hàm bậc nguyên có trễ và không có trễ giải các bài toán bất đẳng thức biến phân tuyến tính và các bài toán tối ưu có ràng buộc đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học Cheng, Liu, Yang, Hou,... Chẳng hạn, trong bài báo của Cheng và các cộng sự, các tác giả đề xuất dùng mạng nơ ron chiếu có trễ để giải một lớp các bài toán bất đẳng thức biến phân phi tuyến. Ngoài ra, các tác giả đã chứng minh được sự hội tụ mũ toàn cục của điểm cân bằng của mạng nơ ron chiếu tới nghiệm của bất đẳng thức biến phân phi tuyến. Năm 2008, trong một nghiên cứu của mình, A. Boroomand và M.B. Menhaj mô hình hóa mạng nơ ron bởi hệ động lực phân thứ. So với mạng nơ ron mô tả bởi hệ động lực với đạo hàm bậc nguyên, mạng nơ ron mô tả bởi hệ động lực với đạo hàm phân thứ có thể mô tả các đặc tính và tính chất của mạng nơ ron một cách chính xác và đầy đủ hơn. Gần đây, một số tác giả đã sử dụng mạng nơ ron phân thứ để giải các bài toán bất đẳng thức biến phân tuyến tính và các bài toán tối ưu có ràng buộc và nhận được một vài kết quả sâu sắc của các tác giả Wu, Zou, Huang, Li, Zhang... Vì vậy có thể nói việc nghiên cứu các tính chất định tính của điểm cân bằng của mạng nơ ron phân thứ có vai trò quan trọng trong việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân.

2. Mục tiêu của đề tài

- Đưa ra một số phương pháp mới để giải một số lớp bài toán cân bằng.

- Tính toán thử nghiệm các ví dụ số trên máy tính.

- Nghiên cứu bài toán một số bài toán cân bằng không nhất thiết lồi hoặc đơn điệu và đưa ra sự hội tụ cho nghiệm.

- Hợp tác nghiên cứu với các cơ sở nghiên cứu ngoài Đại học Thái Nguyên như Viện Toán học Việt Nam, Học viện Tài chính.

- Học tập và nâng cao năng lực nghiên cứu của chủ nhiệm đề tài và các thành viên nghiên cứu.

3. Nội dung nghiên cứu của đề tài

- Nghiên cứu mở rộng kết quả của tác giả Santos và Scheimberg [40] cho bài toán cân bằng giả đơn điệu có ràng buộc và đưa ra thuật toán cho bài toán đó, chứng minh sự hội tụ của thuật toán.

- Nghiên cứu mở rộng bài báo [41] giải bài toán chấp nhận tách giữa bài toán cân bằng giả đơn điệu với ràng buộc mà toán tử của bài toán chấp nhận tách là phi tuyến, chứng minh sự hội tụ của thuật toán và đưa ra ví dụ số minh họa.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản của giải tích lồi, tính đơn điệu của song hàm, giới thiệu bài toán cân bằng và một số Bổ đề nhằm phục vụ cho việc nghiên cứu các chương sau. Các kiến thức chương này được tham khảo trong các tài liệu [1,4,5,6,23,25,29,43].

1.1 Phép chiếu metric

Định nghĩa 1.1. Cho H là không gian Hilbert và K là tập con lồi đóng, khác rỗng của H. Phép chiếu metric từ H lên K, kí hiệu là P_K, được định nghĩa là với mỗi $x \in H$, tồn tại duy nhất điểm $P_K(x) \in K$ thỏa mãn

$$P_K(x) = \arg\min_{\mathrm{z} \in \mathrm{K}} \|\mathrm{z} - \mathrm{x}\|.$$

1.2 Tập lồi, hàm lồi, hàm tựa lồi

Định nghĩa 1.2. Cho H là không gian Hilbert. Một tập con K của H được gọi là lồi nếu

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in K, \quad \forall x, y \in K, \forall \alpha \in [0,1].$$

Định nghĩa 1.3. Cho K là một tập khác rỗng, $f : K \to [-\infty, +\infty]$. Miền hữu hiệu của f được định nghĩa là

$$\mathrm{dom} f = \{x \in K : f(x) < +\infty\}.$$

Trên đồ thị của hàm f là

$$\mathrm{epi} f = \{(x, \xi) \in K \times \mathbb{R} : f(x) \leq \xi\}.$$

Sau đây là định nghĩa hàm lồi.

Định nghĩa 1.4. Cho $f : H \to [-\infty, +\infty]$. Hàm f được gọi là lồi nếu trên đồ thị của f là tập lồi trong $H \times \mathbb{R}$. Hơn nữa, f là hàm lõm nếu $-f$ là hàm lồi.

Hàm tựa lồi được De Finetti giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1949. Đây là lớp hàm được ứng dụng rộng rãi trong tối ưu, lý thuyết trò chơi, kinh tế,...

Định nghĩa 1.5. Cho $X \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi và $\varphi : X \to \mathbb{R}$.
i) φ được gọi là hàm tựa lồi trên X nếu tập mức dưới

$$S_{\varphi,\alpha} = \{x \in X : \varphi(x) \leq \alpha\}$$

là tập lồi với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$.
ii) φ được gọi là hàm tựa lõm trên X nếu $-\varphi$ là hàm tựa lồi trên X.
iii) φ được gọi là hàm tựa tuyến tính trên X nếu nó vừa tựa lồi, vừa tựa lõm.

1.3 Song hàm đơn điệu

Định nghĩa 1.6. Cho K là một tập lồi và $S \subseteq K$. Một song hàm $f : K \times K \to \mathbb{R}$ được gọi là

a) đơn điệu mạnh trên K với hằng số $\tau > 0$ nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\tau \|x - y\|^2, \ \forall x, y \in K;$$

b) đơn điệu chặt trên K nếu

$$f(x, y) + f(y, x) < 0 \ \forall x, y \in K, x \neq y;$$

c) đơn điệu trên K đối với tập S nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \ \forall x \ \in S, y \in K;$$

d) giả đơn điệu trên K đối với tập S nếu

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0, \ \forall x \in S, y \in K;$$

e) tiền đơn điệu trên K đối với S nếu

$$x \in S, y \in K : f(x, y) = f(y, x) = 0 \Rightarrow y \in S.$$

1.4 Bài toán cân bằng

Cho K là tập con lồi đóng khác rỗng của $\mathbb{R}^n$ và $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ là một song hàm sao cho $f(x, x) = 0$ với $x \in K$ và $K \times K$ chứa trong miền giá trị của f. Bài toán cân bằng được phát biểu như sau:

Tìm $x^* \in K$ *sao cho* $f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in K$.

Bài toán cân bằng kí hiệu là $EP(K, f)$ hay ngắn gọi là (EP).
Tập nghiệm của bài toán cân bằng kí hiệu là $S(K, f)$. Song hàm thỏa mãn điều kiện $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in K$ được gọi là song hàm cân bằng.

1.5 Một số bổ đề

Sau đây là một số bổ đề bổ trợ dùng để chứng minh sự hội tụ của thuật toán trong các chương tiếp theo.

Bổ đề 1.1. *Giả sử H là không gian Hilbert. Cho $x, y, z \in \mathbb{H}$ và $0 \leq a \leq 1$, ta có*

$$\|ax + (1 - a)y - z\|^2 \leq a\|x - z\|^2 + (1 - a)\|y - z\|^2.$$

Bổ đề 1.2. *Cho* $\{v_k\}$ *và* $\{\delta_k\}$ *là các dãy số thực không âm thỏa mãn* $v_{k+1} \leq v_k + \delta_k$ *với* $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < +\infty$. *Khi đó dãy* $\{v_k\}$ *hội tụ.*

Bổ đề 1.3. *Cho* H *là không gian Hilbert,* $\{a_k\}$ *là một dãy các số thực thỏa mãn* $0 < a < a_k < b < 1$ *với mọi* $k = 1, 2, \dots,$ *và cho* $\{v_k\}, \{w_k\}$ *là hai dãy trong* H *sao cho*

$$\limsup_{k \to +\infty} \|v_k\| \leq c, \limsup_{k \to +\infty} \|w_k\| \leq c,$$

và

$$\lim_{k \to +\infty} \|a_k v_k + (1 - a_k) w_k\| = c, \quad \text{với } c > 0.$$

Khi đó, $\lim_{k \to +\infty} \|v_k - w_k\| = 0.$

Chương 2

Thuật toán chiếu kết hợp phép lặp Mann-Krasnoselskii

Chương này, chúng tôi trình bày thuật toán chiếu kết hợp phép lặp Mann-Krasnoselskii giải bài toán chấp nhận tách giữa bài toán cân bằng và bài toán tối ưu. Ý tưởng của thuật toán này là sự kết hợp phép chiếu một lần của Santos và Scheimberg cho bài toán cân bằng giả đơn điệu và kĩ thuật lặp Mann-Krasnoselskii cho toán tử gần kề xác định bởi bài toán tối ưu lồi.

Kết quả của chương này được viết dựa trên nội dung bài báo (1) đăng trên tạp chí Mathematical Methods of Operations Research.

2.1 Mô tả bài toán

Giả sử H_1 và H_2 là hai không gian Hilbert và K là tập con lồi đóng, khác rỗng trong không gian H_1. Chúng tôi xét bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in K : f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in K \text{ và } g(Ax^*) \leq g(u) \ \forall u \in H_2, \tag{SEO}$$

trong đó g là hàm lồi nửa liên tục dưới chính thường trong không gian H_2.

2.2 Thuật toán và sự hội tụ

Xét bài toán (SEO) sau đây

$$\text{Tìm } x^* \in K : f(x^*, y) \geq 0 \ \forall y \in K \text{ và } g(Ax^*) \leq g(u) \ \forall u \in H_2,$$

trong đó K là tập con lồi đóng trong không gian Hilbert H và g là hàm lồi nửa liên tục dưới chính thường trong không gian H_2.

Chúng ta cần các giả thiết sau cho thuật toán và sự hội tụ của nó:

(A1) Với mỗi $x \in K$, $f(x, x) = 0$ và $f(x, .)$ là lồi, nửa liên tục dưới trên K.

(A2) $\partial_2^{\epsilon} f(x, x)$ khác rỗng với mỗi $\epsilon > 0$ và $x \in K$ và bị chặn trên mỗi tập con bị chặn bất kì của C, trong đó $\partial_2^{\epsilon} f(x, x)$ kí hiệu ϵ-dưới vi phân của hàm lồi $f(x, .)$ tại x, tức là

$$\partial_2^{\epsilon} f(x, x) := \{p \in H | \langle p, y - x \rangle + f(x, x) \leq f(x, y) + \epsilon \ \forall y\}.$$

(A3) f là giả đơn điệu trên K đối với mỗi nghiệm của (EP), tức là $f(x, x^*) \leq 0$ với mỗi $x \in K$, $x^* \in Sol(EP)$, và thỏa mãn điều kiện sau, gọi là tính chất tiền đơn điệu

$$x^* \in Sol(EP), y \in K, \quad f(x^*, y) = f(y, x^*) = 0 \Rightarrow y \in Sol(EP).$$

(A4) Với mỗi $x \in K$, $f(., x)$ là nửa liên tục trên yếu trên K.

Thuật toán chiếu kết hợp phép lặp Mann-Krasnoselskii được mô tả như sau.

– –

Thuật toán 2.1

Lấy các tham số dương δ, ξ và các dãy số thực $\{a_k\}, \{\delta_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\epsilon_k\}$, $\{\rho_k\}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$0 < a < a_k < b < 1; 0 < \xi \leq \rho_k \leq 4 - \xi, \quad \forall k \in \mathbb{N}; \tag{2.1}$$

$$\delta_k > \delta > 0, \beta_k > 0, \epsilon_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}; \tag{2.2}$$

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \frac{1}{2}; \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\delta_k} = +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < +\infty; \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \epsilon_k}{\delta_k} < +\infty. \tag{2.5}$$

Bước 0: Chọn $x_1 \in K$ và cho $k := 1$.

Bước k: Có $x_k \in K$,

lấy $g_k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x_k, x_k)$ và định nghĩa

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \text{ trong đó } \gamma_k = \max\{\delta_k, \|g_k\|\}.$$

Tính $y_k = P_K(x_k - \alpha_k g_k)$, *tức là*

$$\langle y_k - x_k + \alpha_k g_k, x - y_k \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K.$$

Lấy

$$\mu_k := \begin{cases} 0 \text{ nếu } \nabla h(y_k) = 0, \\ \rho_k \frac{h(y_k)}{\|\nabla h(y_k)\|^2} \text{ nếu } \nabla h(y_k) \neq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

và tính

$$z_k = P_K(y_k - \mu_k A^*(I - prox_{\lambda g})(Ay_k)).$$

Tính

$$x_{k+1} = a_k x_k + (1 - a_k) z_k.$$

– –

Định lý hội tụ cho thuật toán 2.1 được trình bày như sau.

Định lý 2.1. *Giả sử bài toán (SEO) có nghiệm. Khi đó dưới các giả thiết (A1)-(A4) dãy (x_k) sinh bởi thuật toán 2.1 hội tụ yếu tới nghiệm của bài toán (SEO).*

Chương 3

Thuật toán dưới đạo hàm giải bài toán chấp nhận tách phi tuyến và ứng dụng cho mô hình cân bằng Nash có ràng buộc

Chương này chúng tôi trình bày một thuật toán mới giải bài toán chấp nhận tách phi tuyến, ứng dụng cho mô hình cân bằng Nash có ràng buộc: Tìm $x \in K$ sao cho $f(x, y) \geq 0$, $\forall y \in K$ thỏa mãn bao hàm thức $F(x) \in Q$, trong đó F là toán tử phi tuyến. Ý tưởng của phương pháp này là kết hợp phương pháp dưới đạo hàm giải bài toán cân bằng với phương pháp chiếu giải bao hàm thức ràng buộc. Cải tiến của chúng tôi so với các bài toán trước là chúng tôi xét toán tử F là phi tuyến, cụ thể là toán tử tựa tuyến tính, trong khi các bài báo trước xét toán toán tử F là tuyến tính liên tục. Các ví dụ số được đưa ra ở cuối chương nhằm minh họa cho thuật toán của chúng tôi.

3.1 Mô tả bài toán

Bài toán chấp nhận tách là bài toán có dạng:

$$\text{Tìm } x \in C \text{ sao cho } Ax \in Q,$$

trong đó C, Q là các tập con lồi trong không gian $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n$ tương ứng, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là toán tử tuyến tính liên tục trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Xét bài toán chấp nhận tách như sau:

$$\text{Tìm } z \in K \text{ sao cho } f(z, u) \geq 0, \ \forall u \in K \text{ và } F(z) \in Q, \qquad (NSEP)$$

trong đó $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi, $f : K \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq Q \subseteq \mathbb{R}^m$ và F là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^n$ đến $\mathbb{R}^m$.

3.2 Thuật toán và sự hội tụ

Giả sử bài toán $(NSEP)$ có nghiệm và thỏa mãn các giả thiết sau:

(A1) $Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_m$ trong đó Q_i là một tập con lồi của $\mathbb{R}$ với mỗi $i = 1, 2, \ldots, m$;

(A2) $F = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ trong đó $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là tựa tuyến tính, tức là, F vừa tựa lồi vừa tựa lõm và khả vi trên một tập mở chứa K.

Kí hiệu $Sol(EP)$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng:

$$\text{Tìm } z \in K \text{ sao cho } f(z, u) \geq 0 \ \forall u \in K. \tag{EP}$$

Khi đó, dưới giả thiết $(A1)$, $(A2)$, bài toán $(NSEP)$ có thể đưa về dạng

$$\min_{x \in C} \max_{i=1,2,\ldots,m} \|(I - P_{Q_i})(F_i(x))\|^2, \tag{OP}$$

với C là tập nghiệm của (EP). Hơn nữa, hàm $p_i(x) = \|(I - P_{Q_i})(F_i(x))\|^2$ là tựa lồi, suy ra $p(x) = \max_{i=1,2,\ldots,m} p_i(x)$ cũng là một hàm tựa lồi. Có nhiều thuật toán để tìm nghiệm cực tiểu địa phương hoặc toàn cục cho hàm tựa lồi trên một tập lồi. Tuy nhiên trong bài toán (OP), tập C chưa tường minh, mà hơn nữa nó lại là tập nghiệm của bài toán cân bằng.

Tiếp theo, các giả thiết sau được đặt lên song hàm f của bài toán cân bằng.

$(A3)$ Với mỗi $x \in K$, song hàm $f(x, .)$ là hàm lồi, khả dưới vi phân, $f(., x)$ nửa liên tục trên trên một tập lồi mở chứa K và $f(x, x) = 0$ với mỗi $x \in K$.

$(A4)$ Song hàm f giả đơn điệu trên K đối với tập nghiệm $Sol(EP)$ của bài toán (EP), tức là

$$f(x, y) \geq 0 \ \Rightarrow f(y, x) \leq 0 \ \forall x \in Sol(EP), y \in K.$$

Thuật toán được mô tả như sau:

– –

Thuật toán 2.2

Lấy số dương δ và các dãy số thực $\{\delta_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\epsilon_k\}$ thỏa mãn các điều kiện

$$\delta_k > \delta > 0, \beta_k > 0, \epsilon_k \geq 0, \ \forall k \in \mathbb{N}; \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < +\infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \epsilon_k}{\delta_k} < +\infty; \tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\delta_k} = +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < +\infty; \tag{3.3}$$

Bước 0: Lấy $x_1 \in K$ và đặt $k := 1$.

Bước k: Có $x_k \in K$. Lấy $g_k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x_k, x_k)$ và định nghĩa

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \text{ trong đó } \gamma_k = \max\{\delta_k, \|g_k\|\}.$$

Tính $y_k = P_K(x_k - \alpha_k g_k)$.

Nếu $\nabla p_i(y_k) = 0 \quad \forall i \in I(y_k)$ thì lấy $\widehat{h}_k = 0$;

Ngược lại, lấy $0 \neq h_k \in \operatorname{co}\{\nabla p_i(y_k), \quad i \in I(y_k)\}$ và đặt

$$\widehat{h}_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}.$$

Tính

$$x_{k+1} = P_K(y_k - \alpha_k \widehat{h}_k),$$

tăng k bởi 1 và quay lại bước k.

– –

Kí hiệu S là tập nghiệm của bài toán $(NSEP)$, khi đó ta có Định lý hội tụ sau đây.

Định lý 3.1. *Dưới các giả thiết (A1) - (A4) và giả sử thêm rằng f là tiền đơn điệu đối với tập nghiệm của bài toán (EP), dãy $\{g_k\}$ bị chặn. Khi đó, dãy $\{x_k\}$ hội tụ tới một nghiệm của bài toán $(NSEP)$ hoặc tới một nghiệm của bài toán cân bằng (EP) mà cũng là điểm dừng của bài toán $\min\{p(x) : x \in C\}$. Rõ ràng hơn, đặt*

$$J = \left\{k| \quad \widehat{h}_k \neq 0\right\}, \tag{3.4}$$

thì

- *(i) Nếu $\sum_{k\in J} \alpha_k = +\infty$ thì dãy $\{x_k\}$ hội tụ tới một nghiệm của bài toán (NSEP).*
- *(ii) Nếu $\sum_{k\in J} \alpha_k < +\infty$ thì dãy $\{x_k\}$ hội tụ tới một nghiệm x^* của bài toán cân bằng (EP), mà cũng là điểm dừng của bài toán $\min\{p(x) : x \in K\}$.*

3.3 Kết luận

Trong chương này, chúng tôi thu được một thuật toán mới giải bài toán chấp nhận tách phi tuyến: ứng dụng cho mô hình cân bằng Nash có ràng buộc. Tính hữu hiệu và ưu việt của thuật toán được đưa ra trong 3 ví dụ số minh họa.

Chương 4

Nghiên cứu tính chất định tính của mạng nơ ron

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất định tính của mạng nơ ron. Cụ thể, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của mạng nơ ron phân thứ và nghiên cứu tính thụ động trong thời gian hữu hạn của hệ nơ ron phân thứ không chắc chắn.

4.1 Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của mạng nơ ron phân thứ

Xét hệ nơ ron phân thứ Caputo

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = -[A + \triangle A(t)]x(t) + [D + \triangle D(t)]f(x(t)) \\ \qquad\qquad + [W + \triangle W(t)]w(t) + [B + \triangle B(t)]u(t), \qquad t \geq 0, \\ \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.1}$$

trong đó $\alpha \in (0,1)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là vec tơ trạng thái của mạng nơ ron, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là vectơ điều khiển đầu vào, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ là vectơ nhiễu, $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đường chéo chính, xác định dương; D, W, B là các ma trận hằng số đã biết với số chiều thích hợp; $\triangle A(t) = G_a F_a(t) H_a$, $\triangle D(t) = G_d F_d(t) H_d$, $\triangle W(t) = G_w F_w(t) H_w$, $\triangle B(t) = G_b F_b(t) H_b$, trong đó $G_a, G_d, G_w, G_b, H_a, H_d, H_w, H_b$ là các ma trận thực, hằng số, đã biết với số chiều thích hợp;
$F_a(t), F_d(t), F_w(t)$ và $F_b(t)$ là các ma trận thời gian thực thỏa mãn
$F_a^T(t)F_a(t) \leq I, F_d^T(t)F_d(t) \leq I$, $F_w^T(t)F_w(t) \leq I, F_b^T(t)F_b(t) \leq I$, $\forall t \geq 0$;
$f(x(t)) = [f_1(x_1(t)), \ldots, f_n(x_n(t))]^T \in \mathbb{R}^n$ là các hàm kích hoạt của các nơ ron; x_0 là điều kiện ban đầu.

Để nghiên cứu tính ổn định của mạng nơ ron phân thứ (4.1), ta cần các giả thiết sau:
H1. Các hàm kích hoạt $f_i(.)$ (i=1,...,n) liên tục, thỏa mãn điều kiện Lipschitz với hằng số Lipschitz $l_i > 0$, $f_i(0) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, tức là

$$\|f_i(\xi_1) - f_i(\xi_2)\| \leq l_i \|\xi_1 - \xi_2\|,$$

với mọi $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$. Điều kiện trên tương đương với tồn tại một ma trận đường chéo chính, xác định dương $L = \text{diag}\{l_1, \dots, l_n\}$ thỏa mãn

$$\|f(y) - f(x)\| \le \|L(y - x)\|,$$

với mọi $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^m$.

H2. Nhiễu $w(t) \in \mathbb{R}^p$ thỏa mãn điều kiện:

$$\exists d > 0 : \qquad w^T(t)w(t) \le d,\ \forall t \in [0, T_f]. \tag{4.2}$$

Cho trước một số dương T_f. Hàm chi phí bậc hai liên kết với hệ phương trình nơ ron phân thứ (4.1) có dạng

$$J(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_f} (T_f - s)^{\alpha - 1}(x^T(s)Q_1x(s) + u^T(s)Q_2u(s))ds, \tag{4.3}$$

trong đó $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận đối xứng xác định dương cho trước.

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = -[A + \triangle A(t)]x(t) + [D + \triangle D(t)]f(x(t)) \\ \qquad + [W + \triangle W(t)]w(t), \qquad t \ge 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.4}$$

Định nghĩa 4.1. *Nếu tồn tại một điều khiển ngược $u^*(t) = Kx(t)$ và một số dương J^* sao cho hệ phương trình vi phân*

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = [-A + BK - \triangle A(t) + \triangle B(t)K]x(t) \\ \qquad + [D + \triangle D(t)]f(x(t)) \\ \qquad + [W + \triangle W(t)]w(t), \qquad t \ge 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.5}$$

ổn định hữu hạn thời gian đối với (c_1, c_2, T_f, R, d) và hàm chi phí (4.3) thỏa mãn $J(u) \le J^*$ thì giá trị J^* gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển, $u^*(t)$ gọi là luật điều khiển đảm bảo chi phí điều khiển. Định lý sau đưa ra một điều kiện đủ mới cho hệ phương trình vi phân phân thứ nơ ron (4.5).

Định lý 4.1. *Giả sử các điều kiện* **H1** *và* **H2** *thỏa mãn. Cho trước các số dương c_1, c_2, T_f và ma trận đối xứng xác định dương R. Nếu tồn tại ma trận đối xứng xác định dương P và ma trận Y, các số dương ϵ_1, ϵ_2 thỏa mãn điều kiện sau*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & PH_a^T & Y^TH_b^T & PL^T & PQ_1 & Y^TQ_2 & D \\ * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Q_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \mathcal{M}_{77} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.6a}$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{d(1 + \lambda_3)}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \lambda_1 c_2, \tag{4.6b}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{11} &= -AP - PA^T + BY + Y^TB^T + \epsilon_1 G_a G_a^T \\ &\quad + \epsilon_2 G_b G_b^T + G_d G_d^T + WW^T + G_w G_w^T,\\ \mathcal{M}_{77} &= -I + H_d^T H_d,\\ \overline{P} &= R^{-\frac{1}{2}} P^{-1} R^{-\frac{1}{2}},\ \lambda_1 = \lambda_{\min}(\overline{P}),\ \lambda_2 = \lambda_{\max}(\overline{P}),\\ \lambda_3 &= \lambda_{\max}(H_w^T H_w),\ L = \operatorname{diag}\{l_1, \ldots, l_n\}.\end{aligned}$$

Khi đó, hệ (4.5) ổn định hữu hạn thời gian đối với (c_1, c_2, T_f, R, d). Hơn nữa,

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad \forall t \geq 0,$$

là luật điểu khiển đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (4.1) với giá trị đảm bảo chi phí điều khiển là

$$J^* = \frac{d(1+\lambda_3)}{\Gamma(\alpha+1)} T_f^\alpha + \lambda_2 c_1.$$

4.2 Bài toán thụ động thời gian hữu hạn cho mạng nơ ron phân thứ bất định

Xét hệ nơ ron phân thứ với tham số bất định

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]f(x(t)) + W\omega(t), t \geq 0,\\ y(t) = Mf(x(t)) + N\omega(t),\\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.7}$$

trong đó $0 < \alpha < 1$, $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ là véctơ trạng thái, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ là véctơ đầu vào, $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$ là nhiễu đầu vào, n là số các nơ ron, $f(x(t)) = (f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \ldots, f_n(x_n(t)))^T \in \mathbb{R}^n$ là các hàm kích hoạt, $A = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đường chéo chính, xác định dương, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận trọng số, $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times n}, N \in \mathbb{R}^{p\times m}$ là các ma trận thực đã biết,
$\Delta A(t) = G_a F_a(t) H_a$,
$\Delta D(t) = G_d F_d(t) H_d$, G_a, G_d, H_a, H_d là các ma trận thực đã biết với số chiều thích hợp; $F_a(t), F_d(t)$ là các ma trận thời gian thực, chưa biết, thỏa mãn $F_a^T(t)F_a(t) \leq I, F_d^T(t)F_d(t) \leq I, \forall t \geq 0$.

Định lý 4.2. *Giả sử các giả thiết* **H1, H2** *thỏa mãn. Cho các số dương c_1, c_2, T_f và ma trận đối xứng xác định dương R. Hệ (4.7) với đầu vào $y(t) \equiv 0$ là ổn định trong thời gian hữu hạn đối với (c_1, c_2, T_f, R, d) nếu tồn tại một ma trận đối xứng xác định dương $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và các hằng số dương $\theta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & PD & PG_a & PG_d & PW\\ * & \Xi_{22} & 0 & 0 & 0\\ * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0\\ * & * & * & -\epsilon_2 I & 0\\ * & * & * & * & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.8a}$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{d\epsilon_3}{\Gamma(\alpha+1)} T_f^\alpha < \lambda_1 c_2, \tag{4.8b}$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
&\overline{P} = R^{-\frac{1}{2}} P R^{-\frac{1}{2}},\ \lambda_1 = \lambda_{\min}(\overline{P}),\ \lambda_2 = \lambda_{\max}(\overline{P}),\ L = \mathrm{diag}\{l_1, l_2, \ldots, l_n\},\\
&\Xi_{11} = -PA - A^T P + \epsilon_1 H_a^T H_a + \theta L^T L,\\
&\Xi_{22} = \epsilon_2 H_d^T H_d - \theta I.
\end{aligned}
$$

Kết luận

Đề tài đã thu được các kết quả sau:

1) Đề xuất được một thuật toán chiếu kết hợp phép lặp Mann-Krasnoselskii giải bài toán cân bằng. Thuật toán này là sự mở rộng thuật toán chiếu của Santos và Scheimberg (2011) cho bài toán cân bằng. Chúng tôi thu được sự hội tụ mạnh cho thuật toán. Ngoài ra, một ví dụ mô hình sản xuất điện được tính toán thử nghiệm bằng chương trình Matlab minh họa cho thuật toán mà chúng tôi đề xuất.

2) Đề xuất một thuật toán dưới đạo hàm giải bài toán chấp nhận tách phi tuyến: ứng dụng cho mô hình cân bằng Nash có ràng buộc. Đóng góp của chúng tôi là xét toán tử của bài toán chấp nhận tách là phi tuyến, cụ thể là chúng tôi mở rộng cho trường hợp toán tử tựa tuyến tính. Chúng tôi áp dụng thuật toán này giải bài toán cân bằng Nash có ràng buộc và so sánh thuật toán của chúng tôi với thuật toán trong Santos và Scheimberg (2017), kết quả tính toán cho thấy thuật toán của chúng tôi hội tụ tới nghiệm nhanh hơn.

3) Thu được một số tính chất định tính của mạng nơ ron phân thứ.

Để phát triển tiếp nghiên cứu của đề tài này, chúng tôi hy vọng sẽ nghiên cứu được thuật toán mới giải bài toán chấp nhận tách phi tuyến: áp dụng cho mô hình cân bằng có ràng buộc, trong trường hợp toán tử của bài toán chấp nhận tách là phi tuyến tổng quát. Đồng thời chúng tôi mong muốn chứng minh được sự hội tụ của nó.