

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÁO CÁO TỔNG KẾT  
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI  
MỘT SỐ LỚP MÔ HÌNH CÂN BẰNG

Mã số: ĐH2015-TN06-03

Chủ nhiệm đề tài: ThS. NCS. Nguyễn Thị Thanh Huyền

Thái Nguyên - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÁO CÁO TỔNG KẾT  
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI  
MỘT SỐ LỚP MÔ HÌNH CÂN BẰNG

Mã số: DH2015-TN06-03

Xác nhận của tổ chức chủ trì

*(ký, họ tên, đóng dấu)*

Chủ nhiệm đề tài

*(ký, họ tên)*

ThS. NCS. Nguyễn Thị Thanh Huyền

Thái Nguyên - 2018

**DANH SÁCH NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI VÀ ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH**

**I. Thành viên thực hiện đề tài**

<b>TT</b>	<b>Họ và tên</b>	<b>Đơn vị công tác</b>	<b>Vai trò</b>
1	ThS. Nguyễn Thị Thanh Huyền	Khoa Toán - Tin, Trường ĐHKH	Chủ nhiệm
2	TS. Mai Viết Thuận	Khoa Toán - Tin, Trường ĐHKH	Thư ký +NCV

**II. Đơn vị phối hợp thực hiện**

<b>Tên đơn vị</b>	<b>Nội dung phối hợp</b>	<b>Đại diện</b>
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam	Tư vấn, giúp đỡ, định hướng nghiên cứu	GS. TSKH. Lê Dũng Mưu
Học Viện Tài chính	Hợp tác nghiên cứu, viết chung bài báo	TS. Nguyễn Văn Quý
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam	Hợp tác nghiên cứu, viết chung bài báo	TS. Lê Hải Yến

# Mục lục

Danh mục ký hiệu	iv
Thông tin kết quả nghiên cứu	v
Information on research results	viii
Mở đầu	1
<b>Chương 1. Kiến thức chuẩn bị</b>	<b>11</b>
1.1 Phép chiếu metric . . . . .	11
1.2 Tập lồi, hàm lồi, hàm tựa lồi . . . . .	12
1.3 Song hàm đơn điệu . . . . .	14
1.4 Bài toán cân bằng . . . . .	14
1.5 Một số bổ đề bổ trợ . . . . .	15
<b>Chương 2. Thuật toán chiếu kết hợp phép lặp</b>	
<b>Mann-Krasnoselskii</b>	<b>17</b>
2.1 Mô tả bài toán . . . . .	17
2.2 Thuật toán và sự hội tụ . . . . .	18
2.3 Ví dụ minh họa . . . . .	29
2.4 Kết luận . . . . .	32
<b>Chương 3. Thuật toán dưới đạo hàm giải bài toán chấp nhận</b>	
<b>tách phi tuyến và ứng dụng cho mô hình cân bằng Nash</b>	
<b>có ràng buộc</b>	<b>34</b>

3.1	Mô tả bài toán . . . . .	34
3.2	Thuật toán và sự hội tụ . . . . .	35
3.3	Ví dụ minh họa . . . . .	50
3.4	Kết luận . . . . .	58
<b>Chương 4. Nghiên cứu tính chất định tính của mạng nơ ron</b>		<b>59</b>
4.1	Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của mạng nơ ron phân thứ . . . . .	59
4.2	Tính thụ động trong thời gian hữu hạn cho mạng nơ ron phân thứ không chắc chắn . . . . .	69
4.3	Ví dụ minh họa . . . . .	74
4.4	Kết luận . . . . .	76
<b>Kết luận</b>		<b>77</b>
<b>Tài liệu tham khảo</b>		<b>79</b>

# Danh mục ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian véctơ Euclide thực $n$ chiều
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai véctơ $x, y \in \mathbb{R}^n$
$\ x\ $	chuẩn Euclide của véctơ $x$
(EP)	Bài toán cân bằng
$S(C, f)$	Tập nghiệm của bài toán cân bằng
$S$	Tập nghiệm của bài toán ( <i>SEO</i> )
$A^T$	ma trận chuyển vị của ma trận $A$
$P_C(x)$	Phép chiếu metric của $x$ lên tập $C$
$\emptyset$	tập rỗng
$\text{co } A$	bao lồi của tập $A$
$\text{dom } f$	miền hữu hiệu của hàm $f$
$\text{epi } f$	trên đồ thị của hàm $f$
$\partial_\epsilon^c f(x, x)$	$\epsilon$ -dưới vi phân của hàm $f(x, \cdot)$ tại $x$
$A : X \rightarrow Y$	toán tử từ $X$ vào $Y$
$A^* : Y^* \rightarrow X^*$	toán tử liên hợp của $A$

# ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Đơn vị: Trường Đại học Khoa học

## THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

### 1. Thông tin chung:

- Tên đề tài: **Phương pháp giải một số lớp mô hình cân bằng**
- Mã số: **ĐH2015-TN06-03**
- Chủ nhiệm: **ThS. NCS. Nguyễn Thị Thanh Huyền**
- Tổ chức chủ trì: **Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên**
- Thời gian thực hiện: **9/2015 - 9/2018**

### 2. Mục tiêu:

- Xây dựng một số phương pháp mới để giải một số lớp bài toán cân bằng.
- Tính toán thử nghiệm các ví dụ số trên máy tính.
- Nghiên cứu một số bài toán cân bằng không nhất thiết lồi hoặc đơn điệu và đưa ra sự hội tụ cho nghiệm.
- Mở rộng hợp tác nghiên cứu khoa học với các cơ sở nghiên cứu ngoài Đại học Thái Nguyên.
- Học tập và nâng cao năng lực nghiên cứu của chủ nhiệm đề tài và các thành viên nghiên cứu.

### 3. Tính mới, tính sáng tạo:

- Giải quyết được một số vấn đề nghiên cứu mới;
- Các kết quả thu được dưới dạng thuật toán và chứng minh sự hội tụ.

### 4. Kết quả nghiên cứu:

- Thu được thuật toán chiếu kết hợp phép lặp Mann-Krasnoselskii giải bài toán cân bằng giả đơn điệu kết hợp với bài toán tối ưu, chứng minh sự hội tụ của thuật toán và đưa ra ví dụ số minh họa.
- Thu được thuật toán dưới đạo hàm giải bài toán chấp nhận tách phi

tuyến và ứng dụng giải mô hình cân bằng Nash có ràng buộc, chứng minh sự hội tụ. Ba ví dụ số tính bằng chương trình MATLAB minh họa cho thuật toán đưa ra.

## **5. Sản phẩm:**

### **5.1. Sản phẩm khoa học:**

03 bài báo đăng trên các tạp chí Quốc tế có uy tín trong danh mục ISI:

(1). Le Hai Yen, Le Dung Muu, Nguyen Thi Thanh Huyen (2016), "An Algorithm for a Class of Split Feasibility Problems: Application to a Model in Electricity Production", *Mathematical Methods of Operations Research*, 84, pp. 549-565. (SCIE)

(2). Mai Viet Thuan, Dinh Cong Huong, Duong Thi Hong (2018), "New results on robust finite-time passivity for fractional-order neural networks with uncertainties", *Neural Processing Letters*, DOI 10.1007/s11063-018-9902-9. (SCIE)

(3). Mai Viet Thuan, Tran Nguyen Binh, Dinh Cong Huong (2018), "Finite-time guaranteed cost control of caputo fractional-order neural networks", *Asian Journal of Control*, DOI: 10.1002/asjc.1927. pp. 1-10. (SCIE)

### **5.2. Sản phẩm đào tạo:**

- Hướng dẫn 01 đề tài sinh viên nghiên cứu khoa học:

1. Nguyễn Thị Oanh (2017), *Bài toán chấp nhận tách và một số phương pháp giải*, Đề tài sinh viên nghiên cứu khoa học, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

- Hướng dẫn 01 KLTN Đại học đã nghiệm thu:

1. Phạm Thị Hồng Nhung (2016), *Thuật toán dưới vi phân xấp xỉ cho bài toán cân bằng*, Khóa luận tốt nghiệp, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên.

- Đề tài là một phần của Luận án tiến sĩ Toán học của chủ nhiệm đề tài:

Tên luận án: “*Một số phương pháp giải bài toán cân bằng có tính lời suy*”



*rộng*”.

**6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu:**

- Cung cấp tài liệu tham khảo cho các sinh viên, học viên, nghiên cứu sinh, và các nghiên cứu viên chuyên ngành Toán ứng dụng.

*Ngày 15 tháng 9 năm 2018*

**Tổ chức chủ trì**

*(ký, họ và tên, đóng dấu)*

**Chủ nhiệm đề tài**

*(Ký, họ và tên)*

**ThS. NCS. Nguyễn Thị Thanh Huyền**

## INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

### 1. General information:

- Project title: **Method for solving some classes of equilibrium model**
- Code number: **DH2015-TN06-03**
- Coordinator: **MSc. PhD. Student Nguyen Thi Thanh Huyen**
- Implementing institution: **TNU - University of Sciences**
- Duration: from 9/2015 to 9/2018

### 2. Objective(s):

- Construct some new methods for solving some classes equilibrium problem.
- Compute some numerical examples on computer.
- Study some problems which are not convex or monotone equilibrium problems and give the convergence for solution.
- Expand the scientific research cooperations with research institutes outside TNU.
- Study and improve the research capacity of the research leader and research members.

### 3. Creativeness and innovativeness:

- Resolve several research problems;
- Obtain some results under algorithms and proof the convergence.

### 4. Research results:

- Get a projection algorithm combined with the Mann-Krasnoselskii iterative scheme for solving the pseudomonotone equilibrium problem combining optimization problem, prove the convergence of algorithm and give a numerical example;

- Get a subgradient algorithm for solving a class of nonlinear split feasibility problems and application to jointly constrained Nash equilibrium models, prove convergence of the algorithm. Three numerical examples by MATLAB are illustrated for given algorithm.

## **5. Products:**

### ***5.1. Scientific publications:***

Published 03 papers in ISI:

(1). Le Hai Yen, Le Dung Muu, Nguyen Thi Thanh Huyen (2016), "An Algorithm for a Class of Split Feasibility Problems: Application to a Model in Electricity Production", *Mathematical Methods of Operations Research*, 84, pp. 549-565. (SCIE)

(2). Mai Viet Thuan, Dinh Cong Huong, Duong Thi Hong (2018), "New results on robust finite-time passivity for fractional-order neural networks with uncertainties", *Neural Processing Letters*, DOI 10.1007/s11063-018-9902-9. (SCIE)

(3). Mai Viet Thuan, Tran Nguyen Binh, Dinh Cong Huong (2018), "Finite-time guaranteed cost control of caputo fractional-order neural networks", *Asian Journal of Control*, DOI: 10.1002/asjc.1927. pp. 1-10. (SCIE)

### ***5.2. Training results:***

- Supervised 01 student's scientific research project:

1. Nguyen Thi Oanh (2017), *Split feasibility problem and some methods*, Undergraduate Thesis, Thai Nguyen University of Sciences.

- Supervised 01 student's bachelor thesis:

2. Pham Thi Hong Nhung (2018), *An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems*, Bachelor thesis, TNU-University of Sciences.

- The project is a part of the coordinator's PhD dissertation: Title of the dissertation: "*Solution methods for equilibrium problems with generalized convexity*".

**6. Transfer alternatives, application institutions, impacts and benefits of research results:**

- Provide the reference for bachelor, master and Ph.D students whose major is Applied Mathematics, and for researchers.

# Mở đầu

## 1. Tính cấp thiết của đề tài

Bài toán cân bằng là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \forall y \in K, \quad (EP)$$

trong đó  $K$  là tập cho trước và  $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm cho trước thỏa mãn  $f(x, x) = 0$ .

Bất đẳng thức trên được H. Nikaido và K. Isoda [39] đưa ra lần đầu tiên năm 1955 khi tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác.

Năm 1972, Ky Fan [22] gọi bất đẳng thức này là bất đẳng thức minimax. Tuy nhiên nó có tên gọi là bài toán cân bằng (equilibrium problem) theo cách gọi của các tác giả L. D. Murr và W. Oettli [38] năm 1992, E. Blum và W. Oettli [2] năm 1994.

Bài toán cân bằng bao hàm nhiều lớp bài toán quen thuộc sau đây:

1. *Bài toán tối ưu.* Cho  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ , bài toán tối ưu là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } \varphi(x^*) \leq \varphi(y), \forall y \in K. \quad (1)$$

Đặt

$$f(x, y) := \varphi(y) - \varphi(x)$$

bài toán (1) có dạng bài toán (EP). Song hàm  $f$  đơn điệu trong trường hợp này.

2. *Bài toán điểm yên ngựa.* Cho  $\varphi : K_1 \times K_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Điểm  $(x_1^*, x_2^*)$  được

gọi là điểm yên ngựa của hàm  $\varphi$  nếu và chỉ nếu với  $(x_1^*, x_2^*) \in K_1 \times K_2$

$$\varphi(x_1^*, y_2) \leq \varphi(y_1, x_2^*), \quad \forall (y_1, y_2) \in K_1 \times K_2. \quad (2)$$

Đặt  $K = K_1 \times K_2$  và định nghĩa  $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  bởi

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \varphi(y_1, x_2) - \varphi(x_1, y_2).$$

Khi đó,  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  là nghiệm của bài toán (EP) nếu và chỉ nếu  $(x_1^*, x_2^*)$  thỏa mãn (2). Song hàm  $f$  phải đơn điệu trong trường hợp này.

3. *Bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác.* Gọi  $I$  là tập chỉ số hữu hạn chỉ số người chơi. Với mỗi  $i \in I$  tồn tại một tập  $K_i$  là tập chiến lược của người chơi thứ  $i$ . Đặt  $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ . Với mỗi  $i \in I$ , có một hàm cho trước  $f_i : K \rightarrow \mathbb{R}$  (hàm thua thiệt của người chơi thứ  $i$ , phụ thuộc vào chiến lược của những người chơi khác). Với  $x = (x_i)_{i \in I} \in K$  định nghĩa  $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$ . Điểm  $x^* = (x_i^*)_{i \in I} \in K$  được gọi là điểm cân bằng Nash nếu và chỉ nếu với mọi  $i \in I$  ta có

$$f_i(x^*) \leq f_i(x_i^*, y_i), \quad \forall y_i \in K_i. \quad (3)$$

Định nghĩa hàm  $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  bởi

$$f(x, y) := \sum_{i \in I} (f_i(x^i, y_i) - f_i(x)).$$

Khi đó  $x^* \in K$  là một điểm cân bằng Nash nếu và chỉ nếu  $x^*$  là nghiệm của bài toán (P).

4. *Bài toán điểm bất động.* Cho  $X$  là không gian Hilbert,  $K$  là tập con lồi đóng trong  $X$ . Ánh xạ  $T : K \rightarrow K$  là một ánh xạ cho trước. Bài toán điểm bất động là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } x^* = T(x^*). \quad (4)$$

Đặt  $f(x, y) := \langle x - Tx, y - x \rangle$ . Khi đó  $x^*$  là nghiệm của bài toán (P) nếu và chỉ nếu  $x^*$  là nghiệm của bài toán (4).

5. *Bài toán bất đẳng thức biến phân.* Cho  $T : K \rightarrow X$  là một ánh xạ cho trước. Bài toán bất đẳng thức biến phân là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } \langle Tx^*, y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in K. \quad (5)$$

Đặt  $f(x, y) = \langle Tx, y - x \rangle$  thì bài toán (6) tương đương với bài toán (P).

6. *Bài toán bù.* Đây là bài toán đặc biệt của bài toán bất đẳng thức biến phân trên. Cho  $K$  là tập con lồi đóng với

$$K^* := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y \rangle \geq 0, \forall y \in K\}$$

gọi là nón cực. Cho  $T : K \rightarrow X^*$  là ánh xạ cho trước. Bài toán bù là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } x^* \in K, Tx^* \in K^*, \langle Tx^*, x^* \rangle = 0. \quad (6)$$

Khi đó bài toán (6) tương đương với bài toán (5), tức là tương đương với bài toán (P).

Trong những năm gần đây, các phương pháp giải bài toán cân bằng nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học. Một trong các phương pháp nổi tiếng nhất là phương pháp điểm gần kề. Phương pháp này lần đầu tiên được giới thiệu bởi Martinet cho bất đẳng thức biến phân và sau đó được mở rộng bởi Rockafellar [42] cho việc tìm không điểm cho toán tử đơn điệu cực đại.

Một cách tiếp cận nghiệm khác cho bài toán cân bằng  $EP(f, C)$  là nguyên lý bài toán phụ. Nguyên lý này được giới thiệu lần đầu tiên bởi Cohen [17] và sau đó được mở rộng cho bất đẳng thức biến phân. Gần đây, Mastroeni [36] mở rộng hơn nữa nguyên lý bài toán phụ cho bài toán cân bằng  $EP(f, C)$  trong trường hợp song hàm đơn điệu mạnh thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz.

Một phương pháp khác cũng được sử dụng để giải bài toán cân bằng là phương pháp chiếu. Tuy nhiên, đối với các bài toán cân bằng với song hàm

đơn điệu thì thuật toán không hội tụ. Để khắc phục vấn đề này, phương pháp chiếu đạo hàm tăng cường (extragradient method) được Korpelevich giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1976 cho bài toán điểm yên ngựa được mở rộng cho bài toán cân bằng giả đơn điệu.

Năm 2011, Santos và Scheimberg [43] giới thiệu thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ cho bài toán cân bằng tiền đơn điệu (paramonotone). Thuật toán này ưu việt ở việc chỉ dùng một lần chiếu tại mỗi bước lặp mà vẫn đảm bảo sự hội tụ.

Thuật toán này được mô tả như sau: Giả thiết  $C$  là tập con lồi đóng trong không gian  $\mathbb{R}^n$ .

Lấy tham số dương  $\rho$  và các dãy số thực  $\{\rho_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\epsilon_k\}$ ,  $\{\xi_k\}$  thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{aligned} \rho_k > \rho, \beta_k > 0, \epsilon_k \geq 0, \xi_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\rho_k} = +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < +\infty, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \epsilon_k}{\rho_k} < +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k < +\infty \end{aligned}$$

*Bước 0:* Chọn  $x_0 \in C$  and  $k = 0$ .

*Bước 1:* Lấy  $x^k \in C$ . Chọn  $g^k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x^k, x^k)$ . Đặt

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \text{ trong đó } \gamma_k = \max\{\rho_k, \|g^k\|\}.$$

*Bước 2:* Tính  $x^{k+1} \in C$  sao cho

$$\langle \alpha_k g^k + x^{k+1} - x^k, x - x^{k+1} \rangle \geq -\xi_k \quad \forall x \in C.$$

Bài toán chấp nhận tách trong không gian hữu hạn chiều được Censor và Elfving [11] đưa ra lần đầu tiên vào năm 1994 trong mô hình bài toán



ngược, sau đó được Byrne [10] ứng dụng vào năm 2002 cho bài toán phục hồi và tái tạo hình ảnh y tế. Gần đây, bài toán này còn được ứng dụng trong mô hình điều khiển cường độ xạ trị trong điều trị ung thư.

Bài toán chấp nhận tách được phát biểu như sau: Cho  $C$  và  $Q$  là các tập lồi khác rỗng trong không gian  $\mathbb{R}^n$  và  $\mathbb{R}^m$ , tương ứng, và  $A$  là ma trận cỡ  $m \times n$ . Bài toán chấp nhận tách được phát biểu như sau

$$\text{Tìm } x \in K \text{ sao cho } Ax \in Q.$$

Byrne [10] đưa ra một thuật toán giải bài toán chấp nhận tách, gọi là thuật toán CQ như sau:

*Bước 0.* Lấy  $x^0$  tùy ý.

*Bước k.* Có  $x^k$ , tính

$$x^{k+1} = P_C(x^k + \gamma A^T(P_Q - I)Ax^k),$$

trong đó  $\gamma \in (0, \frac{2}{L})$  với  $L$  là giá trị riêng lớn nhất của ma trận  $A^T A$ .

Đặt  $F = \{c \in C : \|P_Q(Ac) - Ac\| \text{ đạt cực tiểu trên } C\}$ . Khi đó, nếu  $F$  khác rỗng thì dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi thuật toán trên hội tụ tới một nghiệm của bài toán chấp nhận tách.

Năm 2013, Moudafi và Thakur [37] đã chứng minh bài toán tìm nghiệm  $x^* \in H_1$  của bài toán

$$\min_{x \in H_1} \{f(x) + g_\lambda(Ax)\}, \quad (P)$$

trong đó  $H_1, H_2$  là hai không gian Hilbert thực,  $f : H_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $g : H_2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là các hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới và  $A : H_1 \rightarrow H_2$  là toán tử tuyến tính bị chặn,  $g_\lambda(x) = \min_{u \in H_2} \{g(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - x\|^2\}$  là hàm xấp xỉ Moreau-Yosida của hàm  $g$  với tham số  $\lambda$ .

Do tính khả vi của hàm xấp xỉ Moreau-Yosida nên ta có

$$\partial(f(x) + g_\lambda(Ax)) = \partial f(x) + A^* \nabla g_\lambda(Ax) = \partial f(x) + A^* \left( \frac{I - \text{prox}_{\lambda g}}{\lambda} \right) (Ax).$$

Điều kiện cần tối ưu của bài toán tối ưu trên  $(P)$  có thể viết dưới dạng

$$0 \in \lambda \partial f(x^*) + A^*(I - \text{prox}_{\lambda g})(Ax^*),$$

trong đó  $\text{prox}_{\lambda g} = \arg \min_{u \in H_2} \{g(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - x\|^2\}$  là ánh xạ gần kề của hàm  $g$  và dưới vi phân của hàm  $f$  là tập

$$\partial f(x) := \{\text{prox}_{\mu_k \lambda f}(x_k - \mu_k A^*(I - \text{prox}_{\lambda g})(Ax^*))\}.$$

Chú ý rằng bằng cách lấy  $f = \delta_C$ ,  $g = \delta_Q$  là các hàm chỉ của hai tập lồi khác rỗng  $C, Q$  của  $H_1$  và  $H_2$  tương ứng. Khi đó, bài toán  $(P)$  có dạng

$$\min_{x \in H_1} \{\delta_C(x) + (\delta_Q)_\lambda(Ax)\} \Leftrightarrow \min_{x \in C} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \|(I - P_Q)(Ax)\|^2 \right\},$$

tương đương với bài toán chấp nhận tách:

$$\text{Tìm } x \in K \text{ sao cho } Ax \in Q.$$

Moudafi và Thakur đề xuất thuật toán giải bài toán chấp nhận tách: giả sử có  $x_k$ , tính  $x_{k+1}$  bởi

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda \mu_k f}(x_k - \mu_k A^*(I - \text{prox}_{\lambda g})(Ax_k)),$$

trong đó độ dài bước  $\mu_k := \rho_k \frac{h(x_k) + l(x_k)}{\theta^2(x_k)}$  với  $0 < \rho_k < 4$ .

Năm 2016, L.H. Yen, L.D. Muu, và N.T.T. Huyen trong (1) đề xuất thuật toán mới giải bài toán chấp nhận tách với tập  $C$  là tập nghiệm của bài toán cân bằng và  $Q$  là tập nghiệm của bài toán tối ưu:

$$\text{Tìm } x^* \in K : f(x^*, y) \geq 0 \forall y \in K \text{ và } g(Ax^*) \leq g(u) \forall u \in H_2, \quad (SEO)$$

trong đó  $g$  là hàm lồi nửa liên tục dưới chính thường trong không gian  $H_2$ .

Chúng tôi mở rộng thuật toán của [37] và [43] cho bài toán  $(SEO)$  như sau: Lấy các tham số dương  $\delta, \xi$  và các dãy số thực  $\{a_k\}, \{\delta_k\}, \{\beta_k\}, \{\epsilon_k\}$ ,

$\{\rho_k\}$  thỏa mãn các điều kiện:

$$0 < a < a_k < b < 1, 0 < \xi \leq \rho_k \leq 4 - \xi, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$\delta_k > \delta > 0, \beta_k > 0, \epsilon_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \frac{1}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\delta_k} = +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < +\infty;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \epsilon_k}{\delta_k} < +\infty.$$

**Bước 0:** Chọn  $x_1 \in K$  và chọn  $k := 1$ .

**Bước k:** Có  $x_k \in K$ ,

lấy  $g_k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x_k, x_k)$  và định nghĩa

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \text{ trong đó } \gamma_k = \max\{\delta_k, \|g_k\|\}.$$

Tính  $y_k = P_K(x_k - \alpha_k g_k)$ , tức là

$$\langle y_k - x_k + \alpha_k g_k, x - y_k \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K.$$

Lấy

$$\mu_k := \begin{cases} 0 & \text{nếu } \nabla h(y_k) = 0, \\ \rho_k \frac{h(y_k)}{\|\nabla h(y_k)\|^2} & \text{nếu } \nabla h(y_k) \neq 0 \end{cases}$$

và tính

$$z_k = P_K(y_k - \mu_k A^*(I - \text{prox}_{\lambda g})(Ay_k)).$$

Tính

$$x_{k+1} = a_k x_k + (1 - a_k) z_k.$$

Chúng tôi đã chứng minh được thuật toán này hội tụ dựa trên một số giả thiết đặt lên song hàm  $f$ .

Hơn nữa, trong một bài báo (2) vừa gửi đăng gần đây, chúng tôi đã đề xuất một thuật toán mới cho bài toán chấp nhận tách trong trường hợp

toán tử  $A$  là phi tuyến. Cụ thể, chúng tôi giải quyết cho trường hợp  $A$  là toán tử tựa tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều. Thuật toán chúng tôi đề xuất như sau:

Lấy số dương  $\delta$  và các dãy số thực  $\{\delta_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\epsilon_k\}$  thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{aligned} \delta_k > \delta > 0, \beta_k > 0, \epsilon_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \epsilon_k}{\delta_k} < +\infty; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\delta_k} = +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < +\infty; \end{aligned}$$

**Bước 0:** Lấy  $x_1 \in K$  và đặt  $k := 1$ .

**Bước k:** Có  $x_k \in K$ . Lấy  $g_k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x_k, x_k)$  và định nghĩa

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \text{ trong đó } \gamma_k = \max\{\delta_k, \|g_k\|\}.$$

Tính  $y_k = P_K(x_k - \alpha_k g_k)$ .

Nếu  $\nabla p_i(y_k) = 0 \quad \forall i \in I(y_k)$  thì lấy  $\hat{h}_k = 0$ ;

Ngược lại, lấy  $0 \neq h_k \in \text{co}\{\nabla p_i(y_k), \quad i \in I(y_k)\}$  và đặt

$$\hat{h}_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}.$$

Tính

$$x_{k+1} = P_K(y_k - \alpha_k \hat{h}_k),$$

tăng  $k$  bởi 1 và quay lại bước  $k$ .

Chúng tôi cũng đã chứng minh thuật toán này hội tụ dựa trên các giả thiết đặt lên song hàm  $f$  và toán tử  $A$ .

Như đã trình bày ở trên, bài toán bất đẳng thức biến phân là một trường hợp riêng của bài toán cân bằng. Do đó, để giải bài toán cân bằng, người ta tìm cách giải bài toán bất đẳng thức biến phân. Trong phần tiếp theo,

chúng tôi trình bày một cách tiếp cận thông qua điểm cân bằng của mạng nơ ron để tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân.

Trong những năm gần đây, việc sử dụng mạng nơ ron với đạo hàm bậc nguyên có trễ và không có trễ giải các bài toán bất đẳng thức biến phân tuyến tính và các bài toán tối ưu có ràng buộc đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học [13, 14, 15, 33, 53]. Chẳng hạn, trong [13], các tác giả đề xuất dùng mạng nơ ron chiều có trễ để giải một lớp các bài toán bất đẳng thức biến phân phi tuyến. Ngoài ra, các tác giả đã chứng minh được sự hội tụ mũ toàn cục của điểm cân bằng của mạng nơ ron chiều tới nghiệm của bất đẳng thức biến phân phi tuyến. Năm 2008, trong một nghiên cứu của mình, A. Boroomand và M.B. Menhaj [8] mô hình hóa mạng nơ ron bởi hệ động lực phân thứ. So với mạng nơ ron mô tả bởi hệ động lực với đạo hàm bậc nguyên, mạng nơ ron mô tả bởi hệ động lực với đạo hàm phân thứ có thể mô tả các đặc tính và tính chất của mạng nơ ron một cách chính xác và đầy đủ hơn. Gần đây, một số tác giả đã sử dụng mạng nơ ron phân thứ để giải các bài toán bất đẳng thức biến phân tuyến tính và các bài toán tối ưu có ràng buộc và nhận được một vài kết quả sâu sắc [48, 49, 50, 51]. Vì vậy có thể nói việc nghiên cứu các tính chất định tính của điểm cân bằng của mạng nơ ron phân thứ có vai trò quan trọng trong việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân. Trong bài báo số (3), chúng tôi nghiên cứu tính ổn định trong thời gian hữu hạn và tính thụ động trong thời gian hữu hạn của mạng nơ ron phân thứ với cách tiếp cận sử dụng lý thuyết ổn định hữu hạn và bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho lớp mạng nơ ron phân thứ với nhiễu có cấu trúc được chúng tôi nghiên cứu trong bài báo (4) bằng cách tiếp cận sử dụng bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Chú rằng việc giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính có thể thực hiện bằng phương pháp điểm trong của giải tích lồi. Nội dung chi tiết của các kết quả này đọc giả

có thể xem trong bài báo (3) và (4).

## **2. Mục tiêu của đề tài**

- Đưa ra một số phương pháp mới để giải một số lớp bài toán cân bằng.
- Tính toán thử nghiệm các ví dụ số trên máy tính.
- Nghiên cứu bài toán một số bài toán cân bằng không nhất thiết lồi hoặc đơn điệu và đưa ra sự hội tụ cho nghiệm.
- Hợp tác nghiên cứu với các cơ sở nghiên cứu ngoài Đại học Thái Nguyên như Viện Toán học Việt Nam, Học viện Tài chính.
- Học tập và nâng cao năng lực nghiên cứu của chủ nhiệm đề tài và các thành viên nghiên cứu.

## **3. Nội dung nghiên cứu của đề tài**

- Nghiên cứu mở rộng kết quả của tác giả Santos và Scheimberg [43] cho bài toán cân bằng giả đơn điệu có ràng buộc và đưa ra thuật toán cho bài toán đó, chứng minh sự hội tụ của thuật toán.
- Nghiên cứu mở rộng bài báo [44] giải bài toán chấp nhận tách giữa bài toán cân bằng giả đơn điệu với ràng buộc mà toán tử của bài toán chấp nhận tách là phi tuyến, chứng minh sự hội tụ của thuật toán và đưa ra ví dụ số minh họa.

## Chương 1

# Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản của giải tích lồi, tính đơn điệu của song hàm, giới thiệu bài toán cân bằng và một số Bổ đề bổ trợ nhằm phục vụ cho việc nghiên cứu các chương sau.

### 1.1 Phép chiếu mêtric

**Định nghĩa 1.1.** ([5, 6, 46]) Cho  $H$  là không gian Hilbert và  $K$  là tập con lồi đóng, khác rỗng của  $H$ . Phép chiếu mêtric từ  $H$  lên  $K$ , kí hiệu là  $P_K$ , được định nghĩa là với mỗi  $x \in H$ , tồn tại duy nhất điểm  $P_K(x) \in K$  thỏa mãn

$$P_K(x) = \arg \min_{z \in K} \|z - x\|.$$

Các tính chất của phép chiếu hay dùng được phát biểu trong Mệnh đề sau. Chứng minh của Mệnh đề này có thể tham khảo trong các tài liệu [5, 6].

**Mệnh đề 1.1.** Cho  $x \in H$ ,  $z \in K$ . Khi đó ta có:

- i)*  $z = P_K(x)$  khi và chỉ khi  $\langle x - z, y - z \rangle \leq 0, \forall y \in K$ .
- ii)*  $\langle x - y, P_K(x) - P_K(y) \rangle \geq \|P_K(x) - P_K(y)\|^2, \forall x, y \in K$ .
- iii)*  $\|x - P_K(x)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|y - P_K(x)\|^2, \forall x \in H, y \in K$ .

## 1.2 Tập lồi, hàm lồi, hàm tựa lồi

**Định nghĩa 1.2.** ([6]) Cho  $H$  là không gian Hilbert. Một tập con  $K$  của  $H$  được gọi là lồi nếu

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in K, \quad \forall x, y \in K, \forall \alpha \in [0, 1].$$

**Định nghĩa 1.3.** ([1, 5]) Cho  $K$  là một tập khác rỗng,  $f : K \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Miền hữu hiệu của  $f$  được định nghĩa là

$$\text{dom} f = \{x \in K : f(x) < +\infty\}.$$

Trên đồ thị của hàm  $f$  là

$$\text{epi} f = \{(x, \xi) \in K \times \mathbb{R} : f(x) \leq \xi\}.$$

Sau đây là định nghĩa hàm lồi.

**Định nghĩa 1.4.** ([1, 5]) Cho  $f : H \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Hàm  $f$  được gọi là lồi nếu trên đồ thị của  $f$  là tập lồi trong  $H \times \mathbb{R}$ . Hơn nữa,  $f$  là hàm lõm nếu  $-f$  là hàm lồi.

Hàm tựa lồi được De Finetti [23] giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1949. Đây là lớp hàm được ứng dụng rộng rãi trong tối ưu, lý thuyết trò chơi, kinh tế,...

**Định nghĩa 1.5.** ([4]) Cho  $X \subset \mathbb{R}^n$  là một tập lồi và  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

i)  $\varphi$  được gọi là hàm tựa lồi trên  $X$  nếu tập mức dưới

$$S_{\varphi, \alpha} = \{x \in X : \varphi(x) \leq \alpha\}$$

là tập lồi với mỗi  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

ii)  $\varphi$  được gọi là hàm tựa lõm trên  $X$  nếu  $-\varphi$  là hàm tựa lồi trên  $X$ .

iii)  $\varphi$  được gọi là hàm tựa tuyến tính trên  $X$  nếu nó vừa tựa lồi, vừa tựa lõm.



Đặc trưng của hàm tựa lồi được cho bởi Mệnh đề và Định lý sau.

**Mệnh đề 1.2.** ([24]) Các phát biểu sau là tương đương

- (i)  $\varphi$  là hàm tựa lồi trên  $X$ .
- (ii) Với mỗi  $x, y \in X$  và  $\lambda \in [0, 1]$  ta có

$$\varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max \{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}.$$

Do đó, hàm  $\varphi$  là tựa tuyến tính trên  $X$  nếu và chỉ nếu với mỗi  $x, y \in X$  và  $\lambda \in [0, 1]$  ta có

$$\min \{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\} \leq \varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max \{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}.$$

**Định lý 1.1.** ([4, 24]) Giả sử  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm khả vi trên một tập lồi mở chứa  $X$ . Khi đó  $\varphi$  là hàm tựa tuyến tính trên  $X$  nếu và chỉ nếu

$$x, y \in X, \quad \varphi(y) \leq \varphi(x) \Rightarrow \nabla \varphi(x)^T (y - x) \leq 0.$$

Ta thấy, nếu  $\varphi_i$  là hàm tựa lồi trên  $X$  với mỗi  $i = 1, 2, \dots, m$ , thì  $\varphi(x) := \max_{i=1,2,\dots,m} \varphi_i(x)$  là hàm tựa lồi trên  $X$ .

**Định nghĩa 1.6.** ([1, 6]) Hàm  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$  được gọi là nửa liên tục dưới tại  $x \in X$  nếu  $f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$ , với mọi dãy  $\{x^k\} \subset X$ ,  $x^k \rightarrow x$ .

Hàm  $f$  được gọi là nửa liên tục dưới trên  $X$  nếu nó nửa liên tục dưới tại mọi  $x \in X$ .

Hàm  $f$  được gọi là nửa liên tục trên tại  $x \in X$  nếu  $-f$  nửa liên tục dưới. Hay với mọi dãy  $\{x^k\} \subset X$ ,  $x^k \rightarrow x$  thì  $\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \leq f(x)$ .

Hàm  $f$  được gọi là nửa liên tục trên trên  $X$  nếu nó nửa liên tục trên tại mọi  $x \in X$ .

### 1.3 Song hàm đơn điệu

**Định nghĩa 1.7.** ([26, 31]) Cho  $K$  là một tập lồi và  $S \subseteq K$ . Một song hàm  $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là

a) đơn điệu mạnh trên  $K$  với hằng số  $\tau > 0$  nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\tau \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in K;$$

b) đơn điệu chặt trên  $K$  nếu

$$f(x, y) + f(y, x) < 0 \quad \forall x, y \in K, x \neq y;$$

c) đơn điệu trên  $K$  đối với tập  $S$  nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \quad \forall x \in S, y \in K;$$

d) giả đơn điệu trên  $K$  đối với tập  $S$  nếu

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0, \quad \forall x \in S, y \in K;$$

e) tiền đơn điệu trên  $K$  đối với  $S$  nếu

$$x \in S, y \in K : f(x, y) = f(y, x) = 0 \Rightarrow y \in S.$$

### 1.4 Bài toán cân bằng

Cho  $K$  là tập con lồi đóng khác rỗng của  $\mathbb{R}^n$  và  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$  là một song hàm sao cho  $f(x, x) = 0$  với  $x \in K$  và  $K \times K$  chứa trong miền giá trị của  $f$ . Bài toán cân bằng được phát biểu như sau:

*Tìm  $x^* \in K$  sao cho  $f(x^*, y) \geq 0, \forall y \in K$ .*

Bài toán cân bằng kí hiệu là  $EP(K, f)$  hay ngắn gọn là  $(EP)$ .

Tập nghiệm của bài toán cân bằng kí hiệu là  $S(K, f)$ . Song hàm thỏa mãn điều kiện  $f(x, x) = 0$  với mọi  $x \in K$  được gọi là song hàm cân bằng.

Sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng được trình bày trong Mệnh đề dưới đây.

**Mệnh đề 1.3.** ([31]) Cho  $K$  là tập con lồi đóng trong không gian  $\mathbb{R}^n$  và  $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là một song hàm cân bằng.

i) Nếu  $f$  đơn điệu chặt thì bài toán  $EP(K, f)$  có nhiều nhất một nghiệm.

ii) Nếu  $f(\cdot, y)$  nửa liên tục trên với mỗi  $y \in K$ ,  $f(x, \cdot)$  là hàm lồi, nửa liên tục dưới với mỗi  $x \in K$  và  $f$  là đơn điệu mạnh thì bài toán  $EP(K, f)$  có duy nhất nghiệm.

## 1.5 Một số bổ đề bổ trợ

Sau đây là một số bổ đề bổ trợ dùng để chứng minh sự hội tụ của thuật toán trong các chương tiếp theo.

**Bổ đề 1.1.** Giả sử  $H$  là không gian Hilbert. Cho  $x, y, z \in \mathbb{H}$  và  $0 \leq a \leq 1$ , ta có

$$\|ax + (1 - a)y - z\|^2 \leq a\|x - z\|^2 + (1 - a)\|y - z\|^2.$$

*Chứng minh.* Ta có

$$\begin{aligned} & \|ax + (1 - a)y - z\|^2 \\ &= a^2\|x - z\|^2 + (1 - a)^2\|y - z\|^2 + 2a(1 - a)\langle x - z, y - z \rangle \\ &= a\|x - z\|^2 + (1 - a)\|y - z\|^2 \\ &\quad - a(1 - a) [\|x - z\|^2 + \|y - z\|^2 - 2\langle x - z, y - z \rangle] \\ &\leq a\|x - z\|^2 + (1 - a)\|y - z\|^2. \end{aligned}$$

□

**Bổ đề 1.2.** [43] Cho  $\{v_k\}$  và  $\{\delta_k\}$  là các dãy số thực không âm thỏa mãn  $v_{k+1} \leq v_k + \delta_k$  với  $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < +\infty$ . Khi đó dãy  $\{v_k\}$  hội tụ.

**Bổ đề 1.3.** [43] Cho  $H$  là không gian Hilbert,  $\{a_k\}$  là một dãy các số thực thỏa mãn  $0 < a < a_k < b < 1$  với mọi  $k = 1, 2, \dots$ , và cho  $\{v_k\}, \{w_k\}$  là

hai dãy trong  $H$  sao cho

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \|v_k\| \leq c, \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \|w_k\| \leq c,$$

và

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|a_k v_k + (1 - a_k) w_k\| = c, \quad \text{với } c > 0.$$

Khi đó,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|v_k - w_k\| = 0$ .

## Chương 2

# Thuật toán chiếu kết hợp phép lặp Mann-Krasnoselskii

Chương này, chúng tôi trình bày thuật toán chiếu kết hợp phép lặp Mann-Krasnoselskii giải bài toán chấp nhận tách giữa bài toán cân bằng và bài toán tối ưu. Ý tưởng của thuật toán này là sự kết hợp phép chiếu một lần của Santos và Scheimberg [43] cho bài toán cân bằng giả đơn điệu và kĩ thuật lặp Mann-Krasnoselskii cho toán tử gần kề xác định bởi bài toán tối ưu lồi.

Kết quả của chương này được viết dựa trên nội dung bài báo (1) đăng trên tạp chí Mathematical Methods of Operations Research.

### 2.1 Mô tả bài toán

Cho  $H_1$  và  $H_2$  là hai không gian Hilbert và  $C \subseteq H_1$ ,  $Q \subseteq H_2$  là các tập lồi khác rỗng,  $A : H_1 \rightarrow H_2$  là toán tử tuyến tính bị chặn. Bài toán chấp nhận tách là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } Ax^* \in Q.$$

Khi  $C$  và  $Q$  là các tập nghiệm của các bài toán bất đẳng thức biến phân hoặc tập nghiệm của bài toán điểm bất động thì đã được xét bởi nhiều tác giả trong nhiều công trình khác nhau.

Chúng tôi xét bài toán chấp nhận tách trong trường hợp  $C$  là tập nghiệm

của bài toán cân bằng tiền đơn điệu trong không gian Hilbert  $H_1$  và  $Q$  là tập nghiệm của bài toán tối ưu lồi trong không gian  $H_2$ . Bài toán được phát biểu như sau:

Tìm  $x^* \in K : f(x^*, y) \geq 0 \forall y \in K$  và  $g(Ax^*) \leq g(u) \forall u \in H_2$ , (*SEO*)

trong đó  $g$  là hàm lồi nửa liên tục dưới chính thường trong không gian  $H_2$ .

## 2.2 Thuật toán và sự hội tụ

Xét bài toán (*SEO*) sau đây

Tìm  $x^* \in K : f(x^*, y) \geq 0 \forall y \in K$  và  $g(Ax^*) \leq g(u) \forall u \in H_2$ ,

trong đó  $K$  là tập con lồi đóng trong không gian Hilbert  $H$  và  $g$  là hàm lồi nửa liên tục dưới chính thường trong không gian  $H_2$ .

Chúng ta cần các giả thiết sau cho thuật toán và sự hội tụ của nó:

(A1) Với mỗi  $x \in K$ ,  $f(x, x) = 0$  và  $f(x, \cdot)$  là lồi, nửa liên tục dưới trên  $K$ .

(A2)  $\partial_2^\epsilon f(x, x)$  khác rỗng với mỗi  $\epsilon > 0$  và  $x \in K$  và bị chặn trên mỗi tập con bị chặn bất kì của  $C$ , trong đó  $\partial_2^\epsilon f(x, x)$  kí hiệu  $\epsilon$ -dưới vi phân của hàm lồi  $f(x, \cdot)$  tại  $x$ , tức là

$$\partial_2^\epsilon f(x, x) := \{p \in H \mid \langle p, y - x \rangle + f(x, x) \leq f(x, y) + \epsilon \forall y\}.$$

(A3)  $f$  là giả đơn điệu trên  $K$  đối với mỗi nghiệm của (*EP*), tức là  $f(x, x^*) \leq 0$  với mỗi  $x \in K$ ,  $x^* \in \text{Sol}(EP)$ , và thỏa mãn điều kiện sau, gọi là tính chất tiền đơn điệu

$$x^* \in \text{Sol}(EP), y \in K, \quad f(x^*, y) = f(y, x^*) = 0 \Rightarrow y \in \text{Sol}(EP).$$

(A4) Với mỗi  $x \in K$ ,  $f(\cdot, x)$  là nửa liên tục trên yếu trên  $K$ .

Các giả thiết (A1) và (A4) là các giả thiết thường được sử dụng cho bài toán cân bằng, các giả thiết (A2) và (A3) có thể tìm thấy trong [43]. Chúng

tôi nhắc lại ánh xạ gần kề của hàm lồi  $g$  với  $\lambda > 0$ , kí hiệu là  $prox_{\lambda g}$ , được định nghĩa như sau

$$prox_{\lambda g}(u) := \operatorname{argmin}\{g(v) + \frac{1}{\lambda}\|v - u\|^2 : v \in H_2\}. \quad P(u)$$

Với  $\lambda > 0$ , đặt  $h(x) := \frac{1}{2}\|(I - prox_{\lambda g})Ax\|^2$ . Bằng cách sử dụng điều kiện cần và đủ cho bài toán tối ưu lồi, ta thấy  $h(x) = 0$  nếu và chỉ nếu  $Ax$  là nghiệm của bài toán  $P(u)$  với  $u = Ax$ . Chú ý rằng, xem [41] trang 52, thậm chí nếu  $g$  có thể không khả vi, thì  $h$  luôn khả vi và  $\nabla h(x) = A^*(I - prox_{\lambda g})Ax$ . Suy ra  $h(x) = 0$  khi và chỉ khi  $\nabla h(x) = 0$ .

Thuật toán chiếu kết hợp phép lặp Mann-Krasnoselskii được mô tả như sau.

---

### Thuật toán 2.1

Lấy các tham số dương  $\delta, \xi$  và các dãy số thực  $\{a_k\}, \{\delta_k\}, \{\beta_k\}, \{\epsilon_k\}, \{\rho_k\}$  thỏa mãn các điều kiện:

$$0 < a < a_k < b < 1; 0 < \xi \leq \rho_k \leq 4 - \xi, \quad \forall k \in \mathbb{N}; \quad (2.1)$$

$$\delta_k > \delta > 0, \beta_k > 0, \epsilon_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}; \quad (2.2)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \frac{1}{2}; \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\delta_k} = +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < +\infty; \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \epsilon_k}{\delta_k} < +\infty. \quad (2.5)$$

**Bước 0:** Chọn  $x_1 \in K$  và cho  $k := 1$ .

**Bước k:** Có  $x_k \in K$ , lấy  $g_k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x_k, x_k)$  và định nghĩa

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \text{ trong đó } \gamma_k = \max\{\delta_k, \|g_k\|\}.$$

Tính  $y_k = P_K(x_k - \alpha_k g_k)$ , tức là

$$\langle y_k - x_k + \alpha_k g_k, x - y_k \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K.$$

Lấy

$$\mu_k := \begin{cases} 0 & \text{nếu } \nabla h(y_k) = 0, \\ \rho_k \frac{h(y_k)}{\|\nabla h(y_k)\|^2} & \text{nếu } \nabla h(y_k) \neq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

và tính

$$z_k = P_K(y_k - \mu_k A^*(I - \text{prox}_{\lambda g})(Ay_k)).$$

Tính

$$x_{k+1} = a_k x_k + (1 - a_k) z_k.$$

-----

**Nhận xét 2.1.** Chú ý rằng khi  $g \equiv 0$ , bài toán (SEO) trở về bài toán (EP). Trong trường hợp này thuật toán sẽ quay lại là phép chiếu Mann-Krasnoselskii cho bài toán (EP).

**Nhận xét 2.2.** Nếu chọn  $\epsilon_k = 0$ , thì  $x_k = y_k$  và  $h(x_k) = 0$  suy ra rằng  $x_k$  là một nghiệm. Theo cách này,  $x_k$  là  $\epsilon$ -nghiệm nếu  $\epsilon_k \leq \epsilon$  và  $\|x_k - y_k\| \leq \epsilon$ ,  $|h(x_k)| \leq \epsilon$ .

Các bổ đề sau rất cần thiết để chứng minh sự hội tụ của thuật toán.

**Bổ đề 2.1.** ([37]) *Gọi  $S$  là tập nghiệm của bài toán (SEO) và  $z \in S$ . Nếu  $\nabla h(y_k) \neq 0$  thì bất đẳng thức sau đúng*

$$\|z_k - z\|^2 \leq \|y_k - z\|^2 - \rho_k(4 - \rho_k) \frac{h^2(y_k)}{\|\nabla h(y_k)\|^2}. \quad (2.7)$$

**Bổ đề 2.2.** ([43]) *Với mỗi  $k$ , các mệnh đề sau đúng*

(i)  $\alpha_k \|g_k\| \leq \beta_k$ ;

(ii)  $\|y_k - x_k\| \leq \beta_k$ .

Bổ đề sau là một đánh giá chúng tôi chứng minh để phục vụ cho sự hội tụ của thuật toán.



**Bổ đề 2.3.** Cho  $z \in S$ . Khi đó, với mỗi  $k$  sao cho  $\nabla h(y_k) \neq 0$ , ta có

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - z\|^2 &\leq \|x_k - z\|^2 - (1 - a_k)\rho_k(4 - \rho_k)\frac{h^2(y_k)}{\|\nabla h(y_k)\|^2} \\ &\quad + 2(1 - a_k)\alpha_k f(x_k, z) + A_k, \end{aligned} \quad (2.8)$$

và với mỗi  $k$  sao cho  $\nabla h(y_k) = 0$ , ta có

$$\|x_{k+1} - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + 2(1 - a_k)\alpha_k f(x_k, z) + A_k, \quad (2.9)$$

trong đó  $A_k = 2(1 - a_k)(\alpha_k \epsilon_k + \beta_k^2)$ .

*Chứng minh.* Theo định nghĩa của  $x_{k+1}$ , nhờ Bổ đề 1.1, ta có

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - z\|^2 &= \|a_k x_k + (1 - a_k)z_k - z\|^2 \\ &\leq a_k \|x_k - z\|^2 + (1 - a_k)\|z_k - z\|^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Xét hai trường hợp:

**Trường hợp 1:** Nếu  $\nabla h(y_k) \neq 0$ , khi đó nhờ Bổ đề 2.1, ta có

$$\|x_{k+1} - z\|^2 \leq a_k \|x_k - z\|^2 + (1 - a_k) \left[ \|y_k - z\|^2 - \rho_k(4 - \rho_k)\frac{h^2(y_k)}{\|\nabla h(y_k)\|^2} \right]. \quad (2.11)$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned} \|y_k - z\|^2 &= \|z - x_k + x_k - y_k\|^2 \\ &= \|x_k - z\|^2 - \|x_k - y_k\|^2 + 2\langle x_k - y_k, z - y_k \rangle \\ &\leq \|x_k - z\|^2 + 2\langle x_k - y_k, z - y_k \rangle. \end{aligned}$$

Trong thuật toán 2.1, vì  $y_k$  được chọn sao cho

$$\langle y_k - x_k + \alpha_k g_k, x - y_k \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K,$$

bằng cách lấy  $x = z$ , ta thu được

$$\begin{aligned} \langle y_k - x_k + \alpha_k g_k, z - y_k \rangle &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \langle \alpha_k g_k, z - y_k \rangle &\geq \langle x_k - y_k, z - y_k \rangle. \end{aligned}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}\|y_k - z\|^2 &\leq \|x_k - z\|^2 + 2\langle \alpha_k g_k, z - y_k \rangle \\ &= \|x_k - z\|^2 + 2\langle \alpha_k g_k, z - x_k \rangle + 2\langle \alpha_k g_k, x_k - y_k \rangle.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Do đó từ  $g_k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x_k, x_k)$  ta nhận được

$$\begin{aligned}f(x_k, z) - f(x_k, x_k) &\geq \langle g_k, z - x_k \rangle - \epsilon_k \\ \Leftrightarrow f(x_k, z) + \epsilon_k &\geq \langle g_k, z - x_k \rangle.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Mặt khác, từ Bổ đề 2.2 ta có

$$\langle \alpha_k g_k, x_k - y_k \rangle \leq \alpha_k \|g_k\| \|x_k - y_k\| \leq \beta_k^2.$$

Từ (2.12), (2.13) và  $\alpha_k > 0$  suy ra

$$\|y_k - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + 2\alpha_k f(x_k, z) + 2\alpha_k \epsilon_k + 2\beta_k^2.\quad (2.14)$$

Kết hợp bất đẳng thức này với (2.11), ta thu được

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - z\|^2 &\leq \|x_k - z\|^2 - (1 - a_k)\rho_k(4 - \rho_k)\frac{h^2(y_k)}{\|\nabla h(y_k)\|^2} \\ &\quad + 2(1 - a_k)\alpha_k f(x_k, z) + A_k,\end{aligned}$$

trong đó  $A_k = 2(1 - a_k)(\alpha_k \epsilon_k + \beta_k^2)$ .

**Trường hợp 2:** Nếu  $\nabla h(y_k) = 0$  khi đó, theo định nghĩa của  $x_{k+1}$ , ta có thể viết

$$\|x_{k+1} - z\|^2 \leq a_k \|x_k - z\|^2 + (1 - a_k) \|y_k - z\|^2.$$

Tương tự trường hợp 1, ta có

$$\|y_k - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + 2\alpha_k f(x_k, z) + 2\alpha_k \epsilon_k + 2\beta_k^2.$$

Khi đó,

$$\|x_{k+1} - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + 2(1 - a_k)\alpha_k f(x_k, z) + A_k,$$

với  $A_k = 2(1 - a_k)(\alpha_k \epsilon_k + \beta_k^2)$ .

□

Kết quả chính của chương này là Định lý hội tụ cho thuật toán 2.1 như sau.

**Định lý 2.1.** *Giả sử bài toán (SEO) có nghiệm. Khi đó dưới các giả thiết (A1)-(A4) dãy  $(x_k)$  sinh bởi thuật toán 2.1 hội tụ yếu tới nghiệm của bài toán (SEO).*

*Chứng minh . Khẳng định 1:  $\{\|x_k - z\|^2\}$  hội tụ với mọi  $z \in S$ .*

Thật vậy, lấy  $z \in S$ . Vì  $z \in \text{Sol}(EP)$  và  $f$  là giả đơn điệu trên  $K$  đối với mỗi nghiệm của bài toán (EP), ta có

$$f(x_k, z) \leq 0.$$

Nếu  $\nabla h(y_k) \neq 0$ , khi đó, vì

$$\rho_k(4 - \rho_k) \frac{h^2(y_k)}{\|\nabla h(y_k)\|^2} \geq 0,$$

nên suy ra từ Bổ đề 2.3 ta có

$$\|x_{k+1} - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + A_k, \quad (2.15)$$

trong đó  $A_k = 2(1 - a_k)(\alpha_k \epsilon_k + \beta_k^2)$ .

Vì  $\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}$  với  $\gamma_k = \max\{\delta_k, \|g_k\|\}$ ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \epsilon_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{\gamma_k} \epsilon_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{\delta_k} \epsilon_k < +\infty.$$

Chú ý rằng  $\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k^2 < +\infty$  và  $0 < a < a_k < b < 1$ , nên

$$\sum_{k=1}^{+\infty} A_k < 2(1 - a) \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \epsilon_k + \beta_k^2) < +\infty.$$

Bây giờ sử dụng Bổ đề 1.2, ta có  $\{\|x_k - z\|^2\}$  hội tụ với mọi  $z \in S$ . Do đó,  $\{x_k\}$  bị chặn. Khi đó, theo Bổ đề 2.2, ta thấy  $\{y_k\}$  cũng bị chặn.

*Khẳng định 2:  $\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, z) = 0$  với mỗi  $z \in S$ .*

Theo Bổ đề 2.3, với mỗi  $k$ , ta có

$$-2(1 - a_k)\alpha_k f(x_k, z) \leq \|x_k - z\|^2 - \|x_{k+1} - z\|^2 + A_k. \quad (2.16)$$

Lấy tổng hai vế, ta nhận được

$$\sum_{k=1}^{\infty} -2(1 - a_k)\alpha_k f(x_k, z) < +\infty. \quad (2.17)$$

Mặt khác, sử dụng giả thiết (A2) và dãy  $\{x_k\}$  bị chặn, ta có  $\{\|g_k\|\}$  bị chặn. Khi đó, tồn tại  $L > \delta$  sao cho  $\|g_k\| \leq L$  với mỗi  $k$ . Do đó,

$$\frac{\gamma_k}{\delta_k} = \max\left\{1, \frac{\|g_k\|}{\delta_k}\right\} \leq \frac{L}{\delta}.$$

Suy ra,

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \geq \frac{\delta}{L} \frac{\beta_k}{\delta_k}.$$

Vì  $z$  là một nghiệm nên theo tính giả đơn điệu của  $f$ , ta có  $-f(x_k, z) \geq 0$  với  $0 < a < a_k < b < 1$  suy ra

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - b) \frac{\beta_k}{\delta_k} [-f(x_k, z)] < +\infty.$$

Nhưng từ  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\delta_k} = +\infty$ , ta nhận được

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, z) = 0, \quad \forall z \in S.$$

*Khẳng định 3:* Với mỗi  $z \in S$ , giả sử  $\{x_{k_j}\}$  là dãy con của  $\{x_k\}$  sao cho

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, z) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x_{k_j}, z), \quad (2.18)$$

và  $x^*$  là điểm tụ yếu của  $\{x_{k_j}\}$ . Khi đó  $x^*$  thuộc vào  $Sol(EP)$ .

Không mất tính tổng quát, giả sử  $x_{k_j}$  hội tụ yếu đến  $x^*$  khi  $j \rightarrow \infty$ . Vì  $f(\cdot, z)$  là nửa liên tục trên nên theo Khẳng định 2 ta có

$$f(x^*, z) \geq \limsup_{j \rightarrow +\infty} f(x_{k_j}, z) = 0.$$

Vì  $z \in S$  và  $f$  là giả đơn điệu nên ta có  $f(x^*, z) \leq 0$ . Vậy  $f(x^*, z) = 0$ . Lại nhờ tính giả đơn điệu của hàm  $f(z, x^*) \leq 0$ . Suy ra  $f(x^*, z) = f(z, x^*) = 0$ . Khi đó, nhờ tính tiền đơn điệu (giả thiết A3), ta có thể kết luận  $x^*$  cũng là một nghiệm của  $(EP)$ .

*Khẳng định 4:* Với mỗi điểm tụ yếu  $\bar{x}$  của dãy  $\{x_k\}$  thỏa mãn  $\bar{x} \in K$  và  $A\bar{x} \in \text{argmin } g$ .

Lấy  $\bar{x}$  là một điểm tụ yếu của  $\{x_k\}$  và  $\{x_{k_j}\}$  là một dãy con của  $\{x_k\}$  hội tụ yếu đến  $\bar{x}$ . Khi đó  $\bar{x} \in K$ . Mặt khác, ta có  $\|y_k - x_k\| \leq \beta_k$  và  $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < +\infty$ . Suy ra,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k - x_k\| = 0.$$

Vậy,  $\{y_{k_j}\}$  hội tụ yếu đến  $\bar{x}$ .

Từ Bổ đề 2.3, nếu  $\nabla h(y_k) \neq 0$  thì

$$(1 - a_k)\rho_k(4 - \rho_k) \frac{h^2(y_k)}{\|\nabla h(y_k)\|^2} \leq \|x_k - z\|^2 - \|x_{k+1} - z\|^2 + A_k,$$

và nếu  $\nabla h(y_k) = 0$  thì

$$0 \leq \|x_k - z\|^2 - \|x_{k+1} - z\|^2 + A_k.$$

Gọi  $N_1 := \{k : \nabla h(y_k) \neq 0\}$  và lấy tổng hai vế ta thu được

$$\sum_{k \in N_1} (1 - a_k)\rho_k(4 - \rho_k) \frac{h^2(y_k)}{\|\nabla h(y_k)\|^2} \leq \|x_0 - z\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k < +\infty.$$

Kết hợp điều này với giả thiết  $\xi \leq \rho_k \leq 4 - \xi$  (với  $\xi > 0$ ) và  $0 < a < a_k < b < 1$ , ta kết luận rằng

$$\sum_{k \in N_1} \frac{h^2(y_k)}{\|\nabla h(y_k)\|^2} < +\infty. \quad (2.19)$$

Hơn nữa, vì  $\nabla h$  là liên tục Lipschitz với hằng số  $\|A\|^2$ , ta có  $\|\nabla h(y_k)\|^2$  bị chặn. Vì vậy  $h(y_k) \rightarrow 0$  khi  $k \in N_1$  và  $k \rightarrow \infty$ . Chú ý rằng  $h(y_k) = 0$  với  $k \notin N_1$ . Do đó,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} h(y_k) = 0. \quad (2.20)$$

Nhờ tính nửa liên tục dưới của  $h$ , nên

$$0 \leq h(\bar{x}) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} h(y_{k_j}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} h(y_k) = 0, \quad (2.21)$$

điều này suy ra  $A\bar{x}$  là một điểm bất động của ánh xạ gần kề của  $g$ . Vậy,  $A\bar{x}$  là điểm cực tiểu của hàm  $g$ .

*Khẳng định 5:*  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(x_k) = x^*$ , trong đó  $x^*$  là một điểm tụ yếu của dãy thỏa mãn (2.18).

Từ khẳng định 3 và khẳng định 4, ta suy ra  $x^*$  thuộc  $S$ . Theo Khẳng định 1, giả sử

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - x^*\| = c < +\infty.$$

Theo Bổ đề 2.2, ta có

$$\begin{aligned} \|z_k - x^*\| &\leq \|y_k - x^*\| \\ &\leq \|x_k - x^*\| + \|y_k - x_k\| \\ &\leq \|x_k - x^*\| + \beta_k, \end{aligned}$$

điều này suy ra

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \|z_k - x^*\| \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} (\|x_k - x^*\| + \beta_k) = c.$$

Mặt khác,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|a_k(x_k - x^*) + (1 - a_k)(z_k - x^*)\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_{k+1} - x^*\| = c.$$

Theo Bổ đề 1.3 với  $v_k := x_k - x^*$ ,  $w_k := z_k - x^*$ , ta thu được

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|z_k - x_k\| = 0. \quad (2.22)$$

Kết hợp điều này với  $x^*$  là một điểm tụ yếu của dãy  $\{x_k\}$ , ta thu được  $x^*$  cũng là một điểm tụ yếu của dãy  $\{z_k\}$ . Giả sử  $\{z_{k_j}\}$  hội tụ yếu đến  $x^*$ .

Chú ý rằng

$$\begin{aligned} \|x_{k_j+1} - P_S(x_{k_j+1})\|^2 &\leq \|x_{k_j+1} - P_S(x_{k_j})\|^2 \\ &\leq a_{k_j} \|x_{k_j} - P_S(x_{k_j})\|^2 + (1 - a_{k_j}) \|z_{k_j} - P_S(x_{k_j})\|^2. \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} \|z_{k_j} - P_S(x_{k_j})\|^2 &= \|z_{k_j} - x_{k_j}\|^2 - \|x_{k_j} - P_S(x_{k_j})\|^2 \\ &\quad - 2\langle z_{k_j} - P_S(x_{k_j}), P_S(x_{k_j}) - x_{k_j} \rangle. \end{aligned}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}
& \|x_{k_j+1} - P_S(x_{k_j+1})\|^2 \\
& \leq (2a_{k_j} - 1)\|x_{k_j} - P_S(x_{k_j})\|^2 + (1 - a_{k_j})\|z_{k_j} - x_{k_j}\|^2 \\
& \quad - 2(1 - a_{k_j})\langle z_{k_j} - P_S(x_{k_j}), P_S(x_{k_j}) - x_{k_j} \rangle. \\
& \leq (2a_{k_j} - 1)\|x_{k_j} - P_S(x_{k_j})\|^2 + (1 - a_{k_j})\|z_{k_j} - x_{k_j}\|^2 \\
& \quad - 2(1 - a_{k_j})\langle z_{k_j} - x^*, P_S(x_{k_j}) - x_{k_j} \rangle \\
& \quad - 2(1 - a_{k_j})\langle x^* - P_S(x_{k_j}), P_S(x_{k_j}) - x_{k_j} \rangle.
\end{aligned}$$

∀  $x^* \in S$ ,

$$\langle x^* - P_S(x_{k_j}), P_S(x_{k_j}) - x_{k_j} \rangle \geq 0.$$

Dãy  $\{x_{k_j}\}$  bị chặn nên dãy  $\{x_{k_j} - P_S(x_{k_j})\}$  cũng bị chặn.

Do  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|z_{k_j} - x_{k_j}\| = 0$  và  $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_{k_j} = \frac{1}{2}$ , ta thu được

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{k_j+1} - P_S(x_{k_j+1})\| = 0. \quad (2.23)$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh  $\{P_S(x_{k_j})\}$  là một dãy Cauchy. Thật vậy, với mọi  $m > j$ , ta có

$$\begin{aligned}
& \|P_S(x_{k_m}) - P_S(x_{k_j})\|^2 \\
& = 2\|x_{k_m} - P_S(x_{k_m})\|^2 + 2\|x_{k_m} - P_S(x_{k_j})\|^2 \\
& \quad - 4\|x_{k_m} - \frac{1}{2}(P_S(x_{k_{m+1}}) + P_S(x_{k_{j+1}}))\|^2 \\
& \leq 2\|x_{k_m} - P_S(x_{k_m})\|^2 + 2\|x_{k_m} - P_S(x_{k_j})\|^2 - 4\|x_{k_m} - P_S(x_{k_m})\|^2 \\
& = 2\|x_{k_m} - P_S(x_{k_j})\|^2 - 2\|x_{k_m} - P_S(x_{k_m})\|^2.
\end{aligned} \quad (2.24)$$

Khi đó, áp dụng tính chất của phép chiếu với  $z = P_S(x_{k_j})$  ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{k_m} - P_S(x_{k_j})\|^2 & \leq \|x_{k_{m-1}} - P_S(x_{k_j})\|^2 + A_{k_{m-1}} \\
& \leq \dots \\
& \leq \|x_{k_j} - P_S(x_{k_j})\|^2 + \sum_{i=k_j}^{k_m-1} A_i.
\end{aligned} \quad (2.25)$$

Từ (2.24) và (2.25), suy ra

$$\|P_S(x_{k_m}) - P_S(x_{k_j})\|^2 \leq 2\|x_{k_j} - P_S(x_{k_j})\|^2 + 2 \sum_{i=k_j}^{k_m-1} A_i - 2\|x_{k_m} - P_S(x_{k_m})\|^2.$$

Từ (2.23) và  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=k_j}^{k_m-1} A_i = 0$ , ta kết luận rằng  $\{P_S(x_{k_j})\}$  là một dãy Cauchy. Do đó,  $\{P_S(x_{k_j})\}$  hội tụ mạnh tới một điểm  $x \in S$ . Vì  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{k_{j+1}} - P_S(x_{k_{j+1}})\| = 0$ , ta nhận được  $\{x_{k_j}\}$  cũng hội tụ mạnh đến  $x$  nào đó. Cuối cùng, sử dụng Khẳng định 1, ta có

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(x_k) = x^*.$$

Định lý được chứng minh. □

**Nhận xét 2.3.** Ví dụ sau chỉ ra rằng khi bài toán không có nghiệm, thì dãy phép lặp sinh bởi thuật toán 2.1 có thể không bị chặn.

Lấy  $H_1 = H_2 = \mathbb{R}^2$ ,  $A$  là toán tử đồng nhất.

$$K = \{x = (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 1, v \geq \frac{1}{u}\};$$

$$Q = \{x = (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 1, v = 0\};$$

$$f(x, y) = i_K(y) - i_K(x), \text{ và } g(x) = i_Q(x),$$

trong đó  $i_M$  là hàm chỉ của tập  $M$ . Trong trường hợp này, bài toán (SEO) có thể quy về bài toán tìm một điểm trong  $S := K \cap Q$  mà tập này là rỗng.

Chọn

$$\epsilon_k = 0, \beta_k = \frac{1}{k}, \delta_k = 1, \rho_k = 2, a_k = \frac{1}{2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Vì  $f(x, y) = i_K(y) - i_K(x)$  nên ta có  $(0, 0) \in \partial_2 f(u, u)$ , với mọi  $x = (u, u) \in K$ . Suy ra, tại mỗi bước  $k$ , ta có thể chọn  $g_k = (0, 0)$ , do đó  $x_k = y_k$  với mọi  $k$ . Vì  $K \cap Q = \emptyset$ , ta có  $h_k(y_k) \neq 0$ . Ta có  $\text{prox}_{\lambda g}(x) = P_Q(x)$  với mọi  $\lambda > 0$ . Do  $y_k = x_k$ , và tính toán thu được

$$z_k = P_K(y_k - \mu_k(I - \text{prox}_{\lambda g})(y_k)) = P_K(P_Q(x_k)).$$



Đặt  $x_k := (u_k, v_k)$ . Ta sẽ chứng minh rằng  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = +\infty$ . Thật vậy, theo cách xác định các tập  $Q$  và  $K$ , phép chiếu của  $x_k = (u_k, v_k)$  lên  $Q$  là  $(u_k, 0)$ , trong đó phép chiếu của  $(u_k, 0)$  lên  $K$  nằm trên biên của tập  $K$ . Giả sử  $(a_k, \frac{1}{a_k})$  là phép chiếu của  $(u_k, 0)$  lên  $K$ . Khi đó  $a_k$  là nghiệm tối ưu của bài toán  $\min_{a \geq 1} \varphi_k(a)$ , trong đó  $\varphi_k(a) = [(u_k - a)^2 + \frac{1}{a^2}]$  là hàm lồi mạnh trên  $[1, +\infty)$ . Vì  $u_k \geq 1$ , nên

$$\varphi_k'(u_k + \frac{1}{16[u_k]^3}) < 0.$$

Suy ra

$$a_k \geq u_k + \frac{1}{16[u_k]^3}. \quad (2.26)$$

Từ  $z_k = P_K(u_k, 0) = (a_k, 1/a_k)$  và  $x_{k+1} := (u_{k+1}, v_{k+1}) = 1/2(x_k + z_k)$ , nên từ (2.26), suy ra

$$u_{k+1} \geq u_k + \frac{1}{32[u_k]^3}.$$

Vì  $u_k \geq 1$  với mọi  $k$ , ta có  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = +\infty$ .

## 2.3 Ví dụ minh họa

Trong mục này, chúng tôi xét một mô hình bài toán cân bằng - tối ưu mà có thể xem như mở rộng của mô hình cân bằng bán độc quyền Nash–Cournot trong mô hình sản xuất điện. Mô hình bài toán cân bằng trong sản xuất điện đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, (chẳng hạn xem [18, 40]). Trong mô hình này, giả sử có  $n$  nhà máy, mỗi nhà máy thứ  $i$  có  $I_i$  máy phát điện. Đặt  $x$  là vectơ bao gồm bộ  $x_j$  là năng lượng sinh bởi máy phát  $j$ . Theo [18], giả sử giá  $p_i(s)$  là hàm affin giảm theo  $s$  với  $s = \sum_{j=1}^N x_j$  trong đó  $N$  là số tất cả các máy phát điện, tức là  $p_i(s) = \alpha - \beta_i s$ . Khi đó lợi nhuận thu được bởi nhà máy thứ  $i$  được cho bởi  $f_i(x) = p_i(s)(\sum_{j \in I_i} x_j) - \sum_{j \in I_i} c_j(x_j)$ , trong đó  $c_j(x_j)$  là hàm chi phí cho lượng điện  $x_j$  bởi máy phát thứ  $i$ . Giả sử  $K_i$  là tập chiến lược của nhà

máy thứ  $i$ , tức là điều kiện  $\sum_{j \in I_i} x_j \in K_i$  phải được thỏa mãn với mọi  $i$ . Khi đó tập chiến lược của mô hình là  $K := K_1 \times K_2 \dots \times K_n$ .

Như thường lệ, mỗi nhà máy tìm kiếm lợi nhuận cực đại bằng cách chọn mức sản xuất tương thích dưới căn cứ sản lượng của các nhà máy khác là tham số đầu vào. Một cách tiếp cận chung cho mô hình này là dựa trên khái niệm cân bằng Nash.

Chúng tôi nhắc lại rằng  $x^* \in K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$  là một điểm cân bằng của mô hình nếu

$$f_i(x^*) \geq f_i(x^*[x_i]) \quad \forall x_i \in K_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

trong đó vectơ  $x^*[x_i]$  là vectơ thu được từ  $x^*$  bằng cách thay  $x_i^*$  bởi  $x_i$ .

Đặt

$$f(x, y) := \psi(x, y) - \psi(x, x)$$

với

$$\psi(x, y) := - \sum_{i=1}^n f_i(x[y_i]), \quad (2.27)$$

thì bài toán tìm điểm cân bằng Nash của mô hình có thể đưa về bài toán

$$x^* \in K : f(x^*, x) \geq 0 \quad \forall x \in K. \quad (EP)$$

Chúng tôi mở rộng mô hình cân bằng này bằng cách thêm một giả thiết rằng để sản xuất điện thì các nhà máy phải sử dụng nguyên vật liệu. Ký hiệu  $a_{l,j}$  là số lượng vật liệu  $l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) cho việc sản xuất một đơn vị điện bởi máy phát  $j$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Đặt  $A$  là ma trận toàn bộ  $a_{l,j}$ . Khi đó hàng  $l$  của vectơ  $Ax$  là số lượng vật liệu  $l$  cho việc sản xuất  $x$ . Sử dụng vật liệu cho sản xuất có thể làm ô nhiễm môi trường và mỗi nhà máy phải trả phí môi trường. Giả sử  $g(Ax)$  là toàn bộ phí môi trường cho việc sản xuất  $x$ . Nhiệm vụ đặt ra bây giờ là tìm một sản lượng  $x^*$  sao cho nó là điểm cân bằng Nash với phí môi trường cực tiểu. Bài toán này có thể đưa

về dạng

$$\text{Tìm } x^* \in K : f(x^*, x) \geq 0 \forall x \in K, g(Ax^*) \leq g(Ax) \forall x \in K. \quad (SEP)$$

Giả sử với mỗi  $j$ , hàm chi phí  $c_j$  và phí môi trường  $g$  là các hàm lồi tăng. Các giả thiết lồi ở đây theo nghĩa cả hai hàm chi phí và phí môi trường cho việc sản xuất một đơn vị điện tăng khi số lượng điện tăng.

Dưới giả thiết lồi, ta thấy (xem [40]) bài toán (EP) với hàm  $f$  cho bởi (2.27) có thể đưa về dạng

$$\text{Tìm } x^* \in K : \langle \tilde{B}_1 x^* - \bar{a}, x - x^* \rangle + \varphi(x) - \varphi(x^*) \geq 0 \forall x \in K, \quad (2.28)$$

trong đó

$$\bar{a} := (\alpha, \alpha, \dots, \alpha)^T$$

$$B_1 := \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_1 := \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_1 & \dots & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 & \beta_2 & \dots & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n & \beta_n & \beta_n & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(x) := x^T B_1 x + \sum_{j=1}^N c_j(x_j).$$

Chú ý rằng khi  $c_j$  là các hàm lồi khả vi với mỗi  $j$ , thì bài toán (2.28) tương đương với bài toán bất đẳng thức biến phân sau

$$\text{Tìm } x^* \in K : \langle \tilde{B}_1 x^* - \bar{a} + \nabla \varphi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in K. \quad (2.29)$$

Chúng tôi thử nghiệm thuật toán 2.1 với hàm chi phí cho bởi

$$c_j(x_j) = \frac{1}{2} p_j x_j^2 + q_j x_j, \quad p_j > 0.$$

Với hàm chi phí này, sử dụng Mệnh đề 3.2 trong [26], thì toán tử trong bài toán (2.29) là toán tử tiền đơn điệu.

Lấy các dãy tham số là

$$\beta_k = \frac{7}{2(k+1)}, \epsilon_k = 0, \delta_k = 3, \gamma_k = \max\{3, \|g_k\|\} \quad \forall k$$

và giải mô hình với các cỡ khác nhau, 10 bài toán mỗi cỡ.

Thuật toán được chạy thực hiện bằng MATLAB 7.8 trên máy tính Ram 8GB core i7.

Các bài toán con được giải bằng MATLAB Optimization Toolbox bằng công cụ QUADPROG cho các hàm bậc hai nửa xác định dương  $g(u) := 1/2u^T D u + d^T u$ . Các kết quả tính toán được trình bày trong Bảng 2.1. Các trục ngang và trục dọc biểu thị số bước lặp trung bình  $k$ , thời gian CPU (giây) trung bình và  $error1 := \|x - y\|$ ,  $error2 := h(x)$ , tương ứng. Các tham số  $\beta_j, p_j, q_j$ , với mọi  $j = 1, \dots, n$ , được sinh ngẫu nhiên trong khoảng  $(0,1]$ ,  $[1,3]$ ,  $[1,3]$  tương ứng, các ma trận  $A, D$  và vectơ  $d$  được sinh ngẫu nhiên trong khoảng  $[-2,30]$ .

Bảng 2.1: Thuật toán 2.1

size N	Prob.	Iter	CPU-times(s)	Error 1	Error 2
6	10	1654	51.13	$9.9996 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$
10	10	19793	622.09	$9.7011 \cdot 10^{-5}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$
20	10	25690	1282.10	$9.9801 \cdot 10^{-5}$	0.0565
30	10	32001	1059.12	$9.9504 \cdot 10^{-5}$	0.3283
50	10	67344	3213.47	$9.8034 \cdot 10^{-5}$	2.9610
100	10	72469	3729.56	$9.8624 \cdot 10^{-5}$	50.6554

## 2.4 Kết luận

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một thuật toán giải bài toán cân bằng. Bằng cách mở rộng thuật toán của [43] sử dụng phép chiếu cho bài toán cân bằng kết hợp kĩ thuật lặp Mann-Krasnoselskii cho bài toán tối ưu lồi, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới cho bài toán cân bằng giả đơn điệu. Một mô hình sản xuất điện được đưa ra như là một ứng dụng

thực tế cho thuật toán mà chúng tôi đề xuất.

## Chương 3

# Thuật toán dưới đạo hàm giải bài toán chấp nhận tách phi tuyến và ứng dụng cho mô hình cân bằng Nash có ràng buộc

Chương này chúng tôi trình bày một thuật toán mới giải bài toán chấp nhận tách phi tuyến, ứng dụng cho mô hình cân bằng Nash có ràng buộc: Tìm  $x \in K$  sao cho  $f(x, y) \geq 0, \forall y \in K$  thỏa mãn bao hàm thức  $F(x) \in Q$ , trong đó  $F$  là toán tử phi tuyến. Ý tưởng của phương pháp này là kết hợp phương pháp dưới đạo hàm giải bài toán cân bằng với phương pháp chiếu giải bao hàm thức ràng buộc. So với các kết quả đã có, đóng góp của chúng tôi là xét toán tử  $F$  là phi tuyến, cụ thể là toán tử tựa tuyến tính, trong khi các kết quả nghiên cứu trước xét toán tử  $F$  là tuyến tính liên tục. Các ví dụ số được đưa ra ở cuối chương nhằm minh họa cho tính hữu hiệu của thuật toán do chúng tôi đề xuất.

Kết quả của chương này được viết dựa trên nội dung bài báo [54] gửi đăng trên tạp chí Journal of Global Optimization (minor revision).

### 3.1 Mô tả bài toán

Bài toán chấp nhận tách là bài toán có dạng:

Tìm  $x \in C$  sao cho  $Ax \in Q$ ,

trong đó  $C, Q$  là các tập con lồi trong không gian  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$  tương ứng,  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  là toán tử tuyến tính liên tục trong không gian  $\mathbb{R}^n$ .

Bài toán này được Censor và Elfving [11] đưa ra lần đầu tiên vào năm 1994. Khi  $C$  và/hoặc  $Q$  là tập nghiệm của bài toán điểm bất động hoặc bài toán bất đẳng thức biến phân, hoặc bài toán tối ưu thì đã được nghiên cứu trong các công trình [10, 12, 19, 45, 47]. Các ứng dụng của bài toán chấp nhận tách có thể tìm thấy trong bài toán khôi phục ảnh, và gần đây là trong điều khiển cường độ xạ trị trong điều trị ung thư. Tuy nhiên, trong tất cả các bài báo này, các tác giả đều giả thiết  $A$  là toán tử tuyến tính bị chặn.

Trong nghiên cứu của chúng tôi, chúng tôi xét  $C$  là tập nghiệm của bài toán cân bằng, toán tử  $A$  là toán tử tựa tuyến tính được xác định bởi các hàm tựa tuyến tính trong không gian Euclide hữu hạn chiều. Các hàm tựa tuyến tính đóng vai trò quan trọng trong toán học và các bài toán thực tế, chẳng hạn [4, 20, 30, 34].

Xét bài toán chấp nhận tách như sau:

$$\text{Tìm } z \in K \text{ sao cho } f(z, u) \geq 0, \forall u \in K \text{ và } F(z) \in Q, \quad (NSEP)$$

trong đó  $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$  là tập lồi,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\emptyset \neq Q \subseteq \mathbb{R}^m$  và  $F$  là một ánh xạ từ  $\mathbb{R}^n$  đến  $\mathbb{R}^m$ .

### 3.2 Thuật toán và sự hội tụ

Giả sử bài toán (NSEP) có nghiệm và thỏa mãn các giả thiết sau:

- (B1)  $Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_m$  trong đó  $Q_i$  là một tập con lồi của  $\mathbb{R}$  với mỗi  $i = 1, 2, \dots, m$ ;

(B2)  $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$  trong đó  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  là tựa tuyến tính, tức là,  $F$  vừa tựa lồi vừa tựa lõm và khả vi trên một tập mở chứa  $K$ .

Kí hiệu  $Sol(EP)$  là tập nghiệm của bài toán cân bằng:

$$\text{Tìm } z \in K \text{ sao cho } f(z, u) \geq 0 \quad \forall u \in K. \quad (EP)$$

Khi đó, dưới giả thiết (B1), (B2), bài toán (NSEP) có thể đưa về dạng

$$\min_{x \in C} \max_{i=1,2,\dots,m} \|(I - P_{Q_i})(F_i(x))\|^2, \quad (OP)$$

với  $C$  là tập nghiệm của (EP). Hơn nữa, hàm  $p_i(x) = \|(I - P_{Q_i})(F_i(x))\|^2$  là tựa lồi, suy ra  $p(x) = \max_{i=1,2,\dots,m} p_i(x)$  cũng là một hàm tựa lồi. Có nhiều thuật toán để tìm nghiệm cực tiểu địa phương hoặc toàn cục cho hàm tựa lồi trên một tập lồi. Tuy nhiên trong bài toán (OP), tập  $C$  chưa tường minh, mà hơn nữa nó lại là tập nghiệm của bài toán cân bằng.

Chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa của hàm tựa lồi, mà được dùng rất nhiều trong các phần sau.

Cho  $X \subset \mathbb{R}^n$  là một tập lồi và  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

(i)  $\varphi$  được gọi là hàm tựa lồi trên  $X$  nếu tập mức dưới

$$S_{\varphi, \alpha} = \{x \in X \mid \varphi(x) \leq \alpha\}$$

là tập lồi với mỗi  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $\varphi$  được gọi là hàm tựa lõm trên  $X$  nếu  $-\varphi$  là tựa lồi trên  $X$ .

(iii)  $\varphi$  được gọi là hàm tựa tuyến tính trên  $X$  nếu vừa là hàm tựa lồi vừa là hàm tựa lõm.

Hai hàm tựa tuyến tính quan trọng là  $\varphi(x) := \log x$  và  $\varphi(x) := \frac{a^T x + b}{c^T x + d}$ . Hàm đầu tiên là tựa tuyến tính trên  $\mathbb{R}_{++}$ , trong đó hàm thứ hai là tựa tuyến tính trên tập  $\{x \mid c^T x + d > 0\}$ .

Với mỗi  $x \in K$ , đặt

$$I(x) := \{i : p_i(x) = p(x)\},$$



thì ta có bổ đề sau.

**Bổ đề 3.1.** *Dưới các giả thiết (B1) và (B2), các mệnh đề sau đúng*

i) *Hàm  $p_i$  tựa lồi và khả vi trên  $K$ ;*

ii) *Hàm  $p$  tựa lồi trên  $K$ .*

*Chứng minh.*

(i) Vì  $F_i$  khả vi trên  $K$ , nên  $p_i(x) = \|(I - P_{Q_i})(F_i(x))\|^2$  cũng khả vi trên  $K$  và

$$\nabla p_i(x) = 2(I - P_{Q_i})(F_i(x))^T \nabla F_i(x).$$

Vì  $F_i$  tựa tuyến tính trên  $K$  với mỗi  $i$ , nên với mỗi  $x_1, x_2 \in K$  và  $\lambda \in [0, 1]$  ta có

$$\min \{F(x_1), F(x_2)\} \leq F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max \{F(x_1), F(x_2)\}.$$

Do đó, tồn tại  $\alpha \in [0, 1]$  sao cho

$$F_i(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \alpha F_i(x_1) + (1 - \alpha)F_i(x_2).$$

Vì hàm  $\|(I - P_{Q_i})(\cdot)\|^2$  là hàm lồi, ta thu được

$$\begin{aligned} & p_i(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \\ &= \|(I - P_{Q_i})(F_i(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2))\|^2 \\ &= \|(I - P_{Q_i})[\alpha F_i(x_1) + (1 - \alpha)F_i(x_2)]\|^2 \\ &\leq \alpha \|(I - P_{Q_i})(F_i(x_1))\|^2 + (1 - \alpha) \|(I - P_{Q_i})(F_i(x_2))\|^2 \\ &= \alpha p_i(x_1) + (1 - \alpha)p_i(x_2) \\ &\leq \max \{p_i(x_1), p_i(x_2)\} \quad \forall x_1, x_2 \in K, \end{aligned}$$

điều này suy ra  $p_i$  là hàm tựa lồi trên  $K$ .

(ii) được suy trực tiếp từ phần (i) và định nghĩa của  $p$ .

Bổ đề được chứng minh.

□

Tiếp theo, các giả thiết sau được đặt lên song hàm  $f$  của bài toán cân bằng.

(B3) Với mỗi  $x \in K$ , song hàm  $f(x, \cdot)$  là hàm lồi, khả dưới vi phân,  $f(\cdot, x)$  nửa liên tục trên trên một tập lồi mở chứa  $K$  và  $f(x, x) = 0$  với mỗi  $x \in K$ .

(B4) Song hàm  $f$  giả đơn điệu trên  $K$  đối với tập nghiệm  $Sol(EP)$  của bài toán  $(EP)$ , tức là

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0 \quad \forall x \in Sol(EP), y \in K.$$

Nhắc lại rằng, với mỗi  $\epsilon \geq 0$  cố định,  $\partial_2^\epsilon f(x, x)$  là kí hiệu  $\epsilon$ -dưới vi phân của hàm lồi  $f(x, \cdot)$  tại  $x$ , tức là

$$\partial_2^\epsilon(x, x) := \{g : \langle g, y - x \rangle \leq f(x, y) - f(x, x) + \epsilon \quad \forall y\}.$$

Vì hàm  $f(x, \cdot)$  là hàm lồi và khả dưới vi phân trên một tập lồi mở chứa  $K$ ,  $\epsilon$ -dưới vi phân ánh xạ  $\partial_2^\epsilon f(x, \cdot)$  một tập bị chặn trên  $K$  thành một tập bị chặn.

Thuật toán được mô tả như sau:

---

### Thuật toán 3.1

Lấy số dương  $\delta$  và các dãy số thực  $\{\delta_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\epsilon_k\}$  thỏa mãn các điều kiện

$$\delta_k > \delta > 0, \beta_k > 0, \epsilon_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}; \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \epsilon_k}{\delta_k} < +\infty; \quad (3.2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\delta_k} = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < +\infty; \quad (3.3)$$

**Bước 0:** Lấy  $x_1 \in K$  và đặt  $k := 1$ .

**Bước k:** Có  $x_k \in K$ . Lấy  $g_k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x_k, x_k)$  và định nghĩa

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \text{ trong đó } \gamma_k = \max\{\delta_k, \|g_k\|\}.$$

Tính  $y_k = P_K(x_k - \alpha_k g_k)$ .

Nếu  $\nabla p_i(y_k) = 0 \quad \forall i \in I(y_k)$  thì lấy  $\hat{h}_k = 0$ ;

Ngược lại, lấy  $0 \neq h_k \in \text{co}\{\nabla p_i(y_k), \quad i \in I(y_k)\}$  và đặt

$$\hat{h}_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}.$$

Tính

$$x_{k+1} = P_K(y_k - \alpha_k \hat{h}_k),$$

tăng  $k$  bởi 1 và quay lại bước  $k$ .

-----

**Nhận xét 3.1.** (i) Nếu  $\epsilon_k = 0$ ,  $x_k = y_k$  và  $p(x_k) = 0$ , thì  $x_k$  là một nghiệm chính xác. Vì vậy, gọi  $x_k$  là một  $\epsilon$ - nghiệm nếu  $\epsilon_k \leq \epsilon$ ,  $\|x_k - y_k\| \leq \epsilon$  và  $p(x_k) \leq \epsilon$ .

(ii) Nếu  $Q_i \equiv \mathbb{R}$  với mỗi  $i$ , thì  $p_i(x) = \|(I - P_{Q_i})F_i(x)\| = 0$  với mỗi  $i$ . Khi đó bài toán (NSEP) trở thành bài toán cân bằng (EP). Trong trường hợp này, thuật toán 3.1 trở thành thuật toán trong [43] với phép chiếu chính xác. Thật vậy, vì  $\hat{h}_k = 0$  với mỗi  $k$ , bước lặp  $k$  trong thuật toán 3.1 có thể viết lại là

**Bước k:** Cho trước  $x_k \in K$ . Lấy  $g_k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x_k, x_k)$  và định nghĩa

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \text{ trong đó } \gamma_k = \max\{\delta_k, \|g_k\|\}.$$

Tính  $x_{k+1} = P_K(x_k - \alpha_k g_k)$ .

Bổ đề sau được chứng minh trong [43].

**Bổ đề 3.2.** Với mỗi  $k$ , các bất đẳng thức sau đúng:

(i)  $\alpha_k \|g_k\| \leq \beta_k$ ;

$$(ii) \|y_k - x_k\| \leq \beta_k.$$

Các bổ đề sau được sử dụng trong chứng minh sự hội tụ của thuật toán 1.

**Bổ đề 3.3.** Với mỗi  $z \in K$ , ta có

$$\|x_{k+1} - z\|^2 \leq \|y_k - z\|^2 - 2\alpha_k \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle + \alpha_k^2, \quad \forall z \in K.$$

*Chứng minh.* Do tính không giãn của toán tử chiếu, ta có

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - z\|^2 &= \|P_K(y_k - \alpha_k \widehat{h}_k) - z\|^2 \\ &\leq \|y_k - \alpha_k \widehat{h}_k - z\|^2 \\ &= \|y_k - z\|^2 - 2\alpha_k \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle + \alpha_k^2. \quad \forall z \in K. \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Dựa vào Bổ đề 3.3, chúng tôi đánh giá được bất đẳng thức sau.

**Bổ đề 3.4.** (i) Dưới các giả thiết (B1), (B2), (B3), ta có

$$\|x_{k+1} - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + 2\alpha_k f(x_k, z) - 2\alpha_k \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle + A_k, \quad (3.4)$$

$$\text{trong đó } A_k = 2(\alpha_k \epsilon_k + \beta_k^2) + \alpha_k^2.$$

(ii) Nếu tồn tại  $z \in K$ ,  $\epsilon > 0$  và  $\delta > 0$  sao cho

$$p(y) < p(y_k) - \delta \quad \forall y \in B(z, \epsilon),$$

thì

$$\langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle \geq \epsilon \quad \forall k$$

trong đó  $\widehat{h}_k \neq 0$ .

*Chứng minh.*

(i) Ta có

$$\begin{aligned}
\|y_k - z\|^2 &= \|z - x_k + x_k - y_k\|^2 \\
&= \|x_k - z\|^2 - \|x_k - y_k\|^2 + 2\langle x_k - y_k, z - y_k \rangle \\
&\leq \|x_k - z\|^2 + 2\langle x_k - y_k, z - y_k \rangle.
\end{aligned}$$

Vì  $y_k = P_K(x_k - \alpha_k g_k)$ , ta có

$$\begin{aligned}
\langle y_k - x_k + \alpha_k g_k, z - y_k \rangle &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \langle \alpha_k g_k, z - y_k \rangle &\geq \langle x_k - y_k, z - y_k \rangle.
\end{aligned}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}
\|y_k - z\|^2 &\leq \|x_k - z\|^2 + 2\langle \alpha_k g_k, z - y_k \rangle \\
&= \|x_k - z\|^2 + 2\langle \alpha_k g_k, z - x_k \rangle \\
&\quad + 2\langle \alpha_k g_k, x_k - y_k \rangle.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Từ  $g_k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x_k, x_k)$  suy ra

$$\begin{aligned}
f(x_k, z) - f(x_k, x_k) &\geq \langle g_k, z - x_k \rangle - \epsilon_k \\
\Leftrightarrow f(x_k, z) + \epsilon_k &\geq \langle g_k, z - x_k \rangle.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Mặt khác, theo Bổ đề 3.2, suy ra

$$\langle \alpha_k g_k, x_k - y_k \rangle \leq \alpha_k \|g_k\| \|x_k - y_k\| \leq \beta_k^2. \tag{3.7}$$

Từ (3.5), (3.6) và  $\alpha_k > 0$ , suy ra

$$\|y_k - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + 2\alpha_k f(x_k, z) + 2\alpha_k \epsilon_k + 2\beta_k^2, \tag{3.8}$$

Vậy, từ Bổ đề 3.3, suy ra

$$\|x_{k+1} - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + 2\alpha_k f(x_k, z) - 2\alpha_k \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle + A_k, \tag{3.9}$$

trong đó  $A_k = 2(\alpha_k \epsilon_k + \beta_k^2) + \alpha_k^2$ .

(ii) Vì  $z + \epsilon \widehat{h}_k \in B(z, \epsilon)$ , theo giả thiết, ta có

$$p(z + \epsilon \widehat{h}_k) < p(y_k).$$

Khi đó, từ định nghĩa của  $p$  và  $I(y_k)$ , ta thu được

$$p_i(z + \epsilon \widehat{h}_k) < p_i(y_k) \quad \forall i \in I(y_k).$$

Áp dụng Định lý 1.1 với  $\varphi = p_i$ ,  $y = z + \epsilon \widehat{h}_k$ , và  $x = y_k$  ta có

$$\langle \nabla p_i(y_k), z + \epsilon \widehat{h}_k - y_k \rangle \leq 0, \quad \forall i \in I(y_k).$$

Vậy, vì  $\widehat{h}_k \neq 0$ ,  $\widehat{h}_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}$  với  $h_k \in \text{co} \{ \nabla p_i(y_k), \quad i \in I(y_k) \}$ . Nên,

$$\langle \widehat{h}_k, z + \epsilon \widehat{h}_k - y_k \rangle \leq 0.$$

Suy ra,

$$\langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle \geq \epsilon.$$

Bỏ đề được chứng minh. □

Trước khi bắt đầu chứng minh kết quả hội tụ của thuật toán, chúng tôi nhắc lại đạo hàm theo hướng của một hàm Lipschitz địa phương  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tại  $x$  theo hướng  $d$  được định nghĩa là

$$\varphi^0(x, d) := \limsup_{y \rightarrow x, t \searrow 0} \frac{\varphi(y + td) - \varphi(y)}{t}.$$

Dưới vi phân theo nghĩa Clarke của  $f$  tại  $x$  được định nghĩa là

$$\partial^0 \varphi(x) := \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \varphi^0(x, d) \geq \langle \xi, d \rangle \quad \forall d \in \mathbb{R}^n \}.$$

Chú ý rằng, vì  $p(x) := \max\{p_i(x) : i \in I(x)\}$ , và  $p_i$  khả vi, Lipschitz địa phương, nên theo Mệnh đề 2.3.12 [16], ta có  $\partial^0 p(x) = \text{co}\{\nabla p_i(x) : i \in I(x)\}$ , trong đó  $\text{co}$  là kí hiệu cho bao lồi. Như thường lệ, điểm  $x^* \in C$  là điểm dừng của bài toán  $\min_{x \in C} \varphi(x)$  (hoặc  $x^*$  là một điểm dừng của  $\varphi$  trên  $C$ ), nếu  $0 \in \partial^0 \varphi(x^*) + N_C(x^*)$ , đặc biệt,  $0 \in \partial^0 \varphi(x^*)$ .

Kí hiệu  $S$  là tập nghiệm của bài toán ( $NSEP$ ), khi đó ta có Định lý hội tụ sau đây.

**Định lý 3.1.** *Dưới các giả thiết (B1) - (B4) và giả sử thêm rằng  $f$  là tiền đơn điệu đối với tập nghiệm của bài toán ( $EP$ ), dãy  $\{g_k\}$  bị chặn. Khi đó, dãy  $\{x_k\}$  hội tụ tới một nghiệm của bài toán ( $NSEP$ ) hoặc tới một nghiệm của bài toán cân bằng ( $EP$ ) mà cũng là điểm dừng của bài toán  $\min\{p(x) : x \in K\}$ . Rõ ràng hơn, đặt*

$$J = \left\{ k \mid \hat{h}_k \neq 0 \right\}, \quad (3.10)$$

thì

- (i) *Nếu  $\sum_{k \in J} \alpha_k = +\infty$  thì dãy  $\{x_k\}$  hội tụ tới một nghiệm của bài toán ( $NSEP$ ).*
- (ii) *Nếu  $\sum_{k \in J} \alpha_k < +\infty$  thì dãy  $\{x_k\}$  hội tụ tới một nghiệm  $x^*$  của bài toán cân bằng ( $EP$ ), mà cũng là điểm dừng của bài toán  $\min\{p(x) : x \in K\}$ .*

**Nhận xét 3.2.** Các điều kiện để dãy  $\{g_k\}$  bị chặn được xét trong [43]. Chú ý rằng trong trường hợp bất đẳng thức biến phân trong đó  $f(x, y) := \langle \phi(x), y - x \rangle$ , dãy  $\{g_k\}$  bị chặn khi  $\phi$  là hàm liên tục. Điều kiện  $\sum_{k \in J} \alpha_k = +\infty$  thỏa mãn nếu tồn tại một số nguyên  $k_0$  sao cho  $\hat{h}_k \neq 0$  với  $k \geq k_0$ .

*Chứng minh Định lý.* Chúng tôi chia chứng minh thành các bước như sau.

**Bước 1.** Trước hết chúng tôi chứng minh trong trường hợp bất kì, dãy  $\{\|x_k - z\|^2\}$  hội tụ với mọi  $z \in S$ , suy ra  $\{x_k\}$  và  $\{y_k\}$  đều bị chặn.

Thật vậy, vì  $f$  giả đơn điệu trên  $K$  đối với tập nghiệm của bài toán ( $EP$ ), nên ta có

$$f(y_k, z) \leq 0 \quad \forall z \in \text{Sol}(EP).$$

Mặt khác, vì  $z$  là cực tiểu của  $p$ , nên  $p(y_k) \geq p(z)$ . Suy ra, từ định nghĩa của  $p$  và  $p_i$ , ta có

$$\langle \nabla p_i(y_k), z - y_k \rangle \leq 0 \quad \forall k.$$

Vì  $h_k \in \text{co} \{ \nabla p_i(y_k), \quad i \in I(y_k) \}$  và  $\widehat{h}_k = 0$  hoặc  $\widehat{h}_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}$ , ta có

$$\langle \widehat{h}_k, z - y_k \rangle \leq 0 \quad \forall k.$$

Khi đó, theo Bổ đề 3.4 (i), ta thu được

$$\|x_{k+1} - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + A_k \quad \forall z \in S, \quad (3.11)$$

trong đó  $A_k = 2(\alpha_k \epsilon_k + \beta_k^2) + \alpha_k^2$ . Vì  $\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}$  với  $\gamma_k = \max\{\delta_k, \|g_k\|\}$ ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \epsilon_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{\gamma_k} \epsilon_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{\delta_k} \epsilon_k < +\infty.$$

Vì  $\delta_k > \delta > 0$ ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k^2}{\gamma_k^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k^2}{\delta_k^2} < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k^2}{\delta^2},$$

kết hợp với  $\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k^2 < +\infty$  suy ra

$$\sum_{k=1}^{+\infty} A_k = \sum_{k=1}^{+\infty} [2(\alpha_k \epsilon_k + \beta_k^2) + \alpha_k^2] < +\infty.$$

Sử dụng Bổ đề 1.2 suy ra  $\{\|x_k - z\|^2\}$  hội tụ với mọi  $z \in S$ . Suy ra,  $\{x_k\}$  bị chặn. Khi đó, vì  $y_k = P_K(x_k - \alpha_k g_k)$  nên theo Bổ đề 3.2 dãy  $\{y_k\}$  cũng bị chặn.

Bây giờ, ta xét hai trường hợp.

(i) *Trường hợp 1.*  $\sum_{k \in J} \alpha_k = +\infty$ .

**Bước 2(i):** Chúng ta chứng minh rằng, với  $z \in S$ ,

$$\liminf_{\substack{k \in J \\ k \rightarrow \infty}} \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] = 0.$$

Thật vậy, theo Bổ đề 3.4(i), với mỗi  $k$ , ta có

$$2\alpha_k \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] \leq \|x_k - z\|^2 - \|x_{k+1} - z\|^2 + A_k. \quad (3.12)$$



Tổng lại ta thu được

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2\alpha_k \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] < +\infty. \quad (3.13)$$

Vì  $z$  là một nghiệm của bài toán (NSEP), do tính giả đơn điệu của song hàm  $f$ , ta có  $f(x_k, z) \leq 0$  và  $\langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle \geq 0$ . Suy ra,

$$\sum_{k \in J} \alpha_k \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] < +\infty. \quad (3.14)$$

Nhưng từ  $\sum_{k \in J} \alpha_k = +\infty$ , ta có

$$\liminf_{\substack{k \in J \\ k \rightarrow \infty}} \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] = 0.$$

**Bước 3(i):** Chúng ta chứng minh rằng nếu  $z \in S$  và  $\{x_{k_j}\}$  là một dãy con của dãy  $\{x_k\}$  sao cho

$$\widehat{h}_{k_j} \neq 0 \quad \forall j,$$

$$\liminf_{\substack{k \in J \\ k \rightarrow \infty}} \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \langle \widehat{h}_{k_j}, y_{k_j} - z \rangle - f(x_{k_j}, z) \right], \quad (3.15)$$

và  $x^*$  là một điểm tụ của  $\{x_{k_j}\}$ , thì  $x^*$  thuộc  $S$ .

Kết hợp (3.15) với  $f(x_{k_j}, z) \leq 0$  và  $\langle \widehat{h}_{k_j}, y_{k_j} - z \rangle \geq 0$ , ta thu được

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \widehat{h}_{k_j}, y_{k_j} - z \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}, z) = 0. \quad (3.16)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng  $x_{k_j}$  hội tụ tới  $x^*$  vì  $j \rightarrow \infty$ . Vì  $f(\cdot, z)$  là nửa liên tục trên, nên

$$f(x^*, z) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}, z) = 0.$$

Do giả thiết (B4), song hàm  $f$  là giả đơn điệu trên  $K$  đối với tập  $S$ , nên ta có  $f(x^*, z) \leq 0$  nếu  $z \in S$ . Vì vậy,  $f(x^*, z) = 0$ . Hơn nữa, lại do tính giả đơn điệu của  $f$ ,  $f(z, x^*) \leq 0$ . Suy ra,  $f(z, x^*) = f(x^*, z) = 0$ .

Khi đó sử dụng tính tiền đơn điệu của  $f$ , ta có  $x^*$  là một nghiệm của (EP).

Bây giờ, ta chứng minh  $p(x^*) = 0$ . Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại  $\alpha > 0$  sao cho

$$p(x^*) > \alpha.$$

Vì  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = x^*$  và  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$ , ta có  $\lim_{j \rightarrow \infty} y_{k_j} = x^*$ . Vì vậy,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p(y_{k_j}) = p(x^*) > \alpha > 0,$$

do đó tồn tại  $j_0 \in \mathbb{N}$  sao cho

$$p(y_{k_j}) > \frac{\alpha}{2} \quad \forall j \geq j_0.$$

Chú ý rằng  $0 = p(z) < \frac{\alpha}{2}$  với mỗi  $z \in S$ . Vì  $p$  liên tục, nên tồn tại  $\epsilon > 0$  sao cho

$$p(y) < \frac{\alpha}{2} \quad \forall y \in B(z, \epsilon).$$

Khi đó  $p(y) < p(y_{k_j})$  với mọi  $j \geq j_0$  và  $y \in B(z, \epsilon)$ . Vì  $\widehat{h}_{k_j} \neq 0$  với mọi  $j$ , áp dụng Bổ đề 3.4(ii), ta thu được

$$\langle \widehat{h}_{k_j}, y_{k_j} - z \rangle \geq \epsilon \quad \forall j \geq j_0,$$

điều này mâu thuẫn với (3.16). Vậy  $p(x^*) = 0$ , tức là  $x^* \in S$ .

**Step 4(i):** Bây giờ, ta chứng minh  $\{x_k\}$  hội tụ tới một nghiệm của (NSEP).

Trong bước 1(i), ta thấy dãy  $\{\|x_k - z\|\}$  hội tụ với mọi  $z \in S$ . Kết hợp điều này với Bước 3(i) ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{k_j} - x^*\| = 0.$$

(ii) Trường hợp 2.  $\sum_{k \in J} \alpha_k < +\infty$

**Bước 2(ii):** Chúng ta chứng minh rằng, với mọi  $z \in S$ ,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] = 0.$$

Thật vậy, theo Bổ đề 3.4, với mỗi  $k$ , ta có

$$2\alpha_k \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] \leq \|x_k - z\|^2 - \|x_{k+1} - z\|^2 + A_k. \quad (3.17)$$

Lấy tổng hai vế, ta thu được

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2\alpha_k \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] < +\infty. \quad (3.18)$$

Mặt khác, sử dụng giả thiết (B2) và  $\{x_k\}$  là dãy bị chặn, nên ta có  $\{\|g_k\|\}$  bị chặn. Khi đó, tồn tại  $L > \delta$  sao cho  $\|g_k\| \leq L$  với mỗi  $k$ . Vì vậy,

$$\frac{\gamma_k}{\delta_k} = \max\left\{1, \frac{\|g_k\|}{\delta_k}\right\} \leq \frac{L}{\delta}.$$

Suy ra,

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \geq \frac{\delta}{L} \frac{\beta_k}{\delta_k}.$$

Vì  $z$  là một nghiệm của bài toán (NSEP), nên do tính giả đơn điệu của  $f$ , ta có  $f(x_k, z) \leq 0$  và  $\langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle \geq 0$ . Suy ra, từ (3.18) ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\delta_k} \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] < +\infty. \quad (3.19)$$

Nhưng do  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\delta_k} = +\infty$ , nên

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] = 0.$$

**Bước 3(ii):** Chúng ta chứng minh rằng, nếu  $z \in S$  và  $\{x_{k_j}\}$  là một dãy con của dãy  $\{x_k\}$  sao cho

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left[ \langle \widehat{h}_k, y_k - z \rangle - f(x_k, z) \right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \langle \widehat{h}_{k_j}, y_{k_j} - z \rangle - f(x_{k_j}, z) \right],$$

và  $x^*$  là một điểm tụ của dãy  $\{x_{k_j}\}$ , thì  $x^*$  thuộc  $Sol(EP)$ .

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử rằng  $x_{k_j}$  hội tụ tới  $x^*$  khi  $j \rightarrow \infty$ . Ta có

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \langle \widehat{h}_{k_j}, y_{k_j} - z \rangle - f(x_{k_j}, z) \right] = 0.$$

Kết hợp với  $f(x_{k_j}, z) \leq 0$  và  $\langle \widehat{h}_{k_j}, y_{k_j} - z \rangle \geq 0$ , suy ra

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \widehat{h}_{k_j}, y_{k_j} - z \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}, z) = 0. \quad (3.20)$$

Bằng cách làm giống Bước 3(i), ta có thể chỉ ra rằng  $x^*$  là một nghiệm của (EP).

Bây giờ, nếu tồn tại một dãy con của dãy  $\{k_j\}$  sao cho  $\widehat{h}_{k_j} \neq 0$ , thì tương tự phát biểu trong Bước 3(i), ta có thể kết luận  $x^*$  thuộc  $S$ . Giả sử ngược lại, tồn tại  $j_1$  sao cho với mọi  $j \geq j_1$ ,

$$\widehat{h}_{k_j} = 0,$$

suy ra  $\nabla p_i(y_{k_j}) = 0$  với mọi  $i \in I(y_{k_j})$ . Chú ý rằng  $\{y_{k_j}\}$  cũng hội tụ tới  $x^*$ .

**Bước 4(ii):** Chúng ta chứng minh dãy  $\{\|x_k - x^*\|\}$  hội tụ, và suy ra toàn bộ dãy  $\{x_k\}$  hội tụ tới  $x^*$ .

Vì  $x^* \in K$ , theo Bổ đề 3.4(i), ta có

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + 2\alpha_k f(x_k, x^*) - 2\alpha_k \langle \widehat{h}_k, y_k - x^* \rangle + A_k.$$

Trong Bước 3(ii), chúng ta đã chứng minh rằng  $x^*$  thuộc  $Sol(EP)$ , và do tính giả đơn điệu của song hàm  $f$ , nên

$$f(x_k, x^*) \geq 0 \quad \forall k.$$

Vì vậy,

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha_k \langle \widehat{h}_k, y_k - x^* \rangle + A_k. \quad (3.21)$$

Nếu  $k \notin J$ , thì  $\widehat{h}_k = 0$  và vì vậy,

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + A_k. \quad (3.22)$$

Nếu  $k \in J$ , thì  $\hat{h}_k \neq 0$  và  $\|\hat{h}_k\| = 1$ , suy ra

$$\langle \hat{h}_k, y_k - x^* \rangle \geq -\|y_k - x^*\|.$$

Chú ý rằng  $\{y_k\}$  bị chặn, nên tồn tại  $M > 0$  đủ lớn sao cho

$$\|y_k - x^*\| < M \quad \forall k.$$

Khi đó,

$$\langle \hat{h}_k, y_k - x^* \rangle \geq -M.$$

Suy ra, từ (3.21) ta có

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + 2M\alpha_k + A_k \quad \forall k \in J. \quad (3.23)$$

Từ (3.22) and (3.23), ta thu được

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + B_k,$$

trong đó

$$B_k = \begin{cases} A_k + 2M\alpha_k & \text{if } k \in J, \\ A_k & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Vì  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k < +\infty$  và  $\sum_{k \in J} \alpha_k < +\infty$ , nên ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k + \sum_{k \in J} 2M\alpha_k < +\infty.$$

Nhờ Bổ đề 1.2, ta có  $\{\|x_k - x^*\|^2\}$  hội tụ, và suy ra  $\{x_k\}$  hội tụ đến  $x^*$ , vì, theo Bước 3(ii), có một dãy con hội tụ tới  $x^*$ . Một cách chính xác, nếu tồn tại  $N_0$  sao cho  $\hat{h}_k \neq 0$  với mỗi  $k \geq N_0$ , khi đó bởi khẳng định như trong trường hợp 1, ta có thể chỉ ra rằng  $x^*$  là một nghiệm của bài toán (NSEP). Nếu  $\hat{h}_k = 0$  là hữu hạn với nhiều  $k$  vô hạn, thì tồn tại một dãy vô hạn  $\{y_{k_j}\}$  sao cho  $\nabla p_i(y_{k_j}) = 0$  với mỗi  $j$  và  $i \in I(y_{k_j})$ . Đặt

$$I_0 := \{i \mid i \in I(y_{k_j}), \nabla p_i(y_{k_j}) = 0 \text{ với nhiều số } j \text{ vô hạn}\}.$$

Vì  $\nabla p_i(y_{k_j}) = 0$  với nhiều số  $j$  vô hạn, và  $I(y_{k_j}) \subseteq \{1, \dots, m\}$ , ta có  $I_0 \neq \emptyset$ . Cho  $j \rightarrow \infty$  ta thu được  $\nabla p_i(x^*) = 0$  với mỗi  $i \in I_0$ . Mặt khác, với  $i \in I_0$ ,

$$p_i(x^*) = \lim_{i \rightarrow \infty} p_i(y_{k_j}) = \lim_{i \rightarrow \infty} p(y_{k_j}) = p(x^*),$$

điều này suy ra  $I_0 \subseteq I(x^*)$ . Vì vậy,  $0 \in \text{co}(\{\nabla p_i(x^*) = 0 \mid i \in I_0\}) \subseteq \text{co}(\{\nabla p_i(x^*) = 0 \mid i \in I(x^*)\})$  tức là  $x^*$  là một điểm dừng của  $p$  trên  $C$ . Vì cả hai dãy  $\{x_k\}$ ,  $\{y_k\}$  hội tụ đến  $x^*$ , nên ta có điều phải chứng minh. □

### 3.3 Ví dụ minh họa

Trong phần này, chúng tôi thử nghiệm thuật toán của chúng tôi, kí hiệu là NSEP và so sánh nó với thuật toán MACEP được đưa ra trong [44] giải bài toán cân bằng có ràng buộc trong 3 ví dụ. Ví dụ đầu tiên là mô hình cân bằng Nash có ràng buộc. Ví dụ thứ hai là ví dụ được đưa ra trong [44] cho mô hình Nash–Cournot. Trong ví dụ cuối cùng, chúng tôi xét một bài toán NSEP mà mỗi hàm  $F_i(x_i) = \log(a_i x_i + b_i)$ . Các thuật toán được lập trình bằng MATLAB 7.8 trên máy tính 8Gb RAM core i7.

#### Ví dụ 3.1. (Ứng dụng cho mô hình cân bằng Nash có ràng buộc)

Giả sử có  $i = 1, \dots, n$  người tham gia một trò chơi. Mỗi người chơi có một hoạt động riêng, kí hiệu là  $x_i \in \mathbb{R}$ . Tất cả người chơi có một tập hoạt động chung  $x \in \mathbb{R}^n$ . Mỗi người chơi thứ  $i$  sử dụng một hàm chi phí  $f_i$  mà phụ thuộc vào các hoạt động của những người chơi khác. Khi đó hàm Nikaido-Isoda của trò chơi được định nghĩa là

$$f(x, y) := \sum_{i=1}^n \left( f_i(x) - f_i(x[y_i]) \right), \quad (3.24)$$

trong đó vectơ  $x[y_i]$  là vectơ nhận được bằng cách từ vectơ  $x$  thay thành phần  $x_i$  bởi  $y_i$ . Kí hiệu  $K_i \subset \mathbb{R}$  là tập chiến lược của người chơi thứ  $i$ . Khi đó tập chiến lược của trò chơi là  $K := K_1 \times \dots \times K_n$ . Chúng tôi nhắc lại rằng, một điểm  $x^* \in K$  được gọi là điểm cân bằng Nash của trò chơi nếu

$$f_i(x^*) = \max_{y_i \in K_i} f_i(x^*[y_i]) \quad \forall y_i \in K_i, \quad \forall i.$$

Điểm  $x^*$  là điểm cân bằng nếu và chỉ nếu  $f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in K$ . Trong một vài mô hình thực tế, một điểm cân bằng có thể phải thỏa mãn thêm ràng buộc  $F(x) \in Q$ , trong đó  $F$  là một ánh xạ từ  $\mathbb{R}^n$  vào  $Q$  với  $Q$  là một tập con lồi trong không gian  $\mathbb{R}^m$ . Khi đó bài toán này có dạng của bài toán (NSEP).

Chúng tôi xét một mô hình sản xuất điện, trong đó giả sử một công ty có  $n$  chi nhánh, mỗi chi nhánh sản xuất một loại điện, chẳng hạn, điện hạt nhân, điện mặt trời, điện gió, thủy điện và nhiệt điện.

Giả sử giá sản xuất tại mỗi chi nhánh  $i$  là một hàm affin được cho bởi  $p_i(x_1, \dots, x_n) := \alpha - \sum_{k=1}^n \tau_{ik} x_k$  với mỗi  $i$ , trong đó  $\alpha > 0$ ,  $\tau_{ik} > 0$ . Hàm giá này xuất phát từ mô hình hàng hóa khác nhau của [25], trong đó người dùng thích dùng điện của chi nhánh này hơn chi nhánh khác, chẳng hạn, nhiều người thích dùng điện mặt trời và điện gió hơn nhiệt điện hoặc điện hạt nhân. Khi  $\tau_{ik} = \tau$  với mỗi  $i$  và  $k$  thì hàm giá trở thành một hàm thông dụng. Lợi nhuận của chi nhánh thứ  $i$  được cho bởi

$$f_i(x) := p_i(x_1, \dots, x_n)x_i - c_i(x_i), \quad (3.25)$$

trong đó  $c_i(x_i)$  là chi phí (bao gồm phí ô nhiễm môi trường) cho việc sản xuất  $x_i$  bởi chi nhánh thứ  $i$ . Nói chung  $c_i$  là một hàm lồi tăng. Tính lồi này có nghĩa là chi phí sản xuất cho việc sản xuất một đơn vị điện tăng khi số lượng sản xuất tăng lên.

Công ty tìm kiếm lợi nhuận bằng cách chọn một mức sản xuất tương ứng tại mỗi chi nhánh dưới việc giả thiết tại mỗi chi nhánh khác nhau

một tham số đầu vào. Đặt  $K_i$  là tập chiến lược của chi nhánh thứ  $i$ , tức là mức sản xuất  $x_i$  phải được chọn trong  $K_i$ . Một cách tiếp cận chung cho mô hình này là dựa trên khái niệm cân bằng Nash bằng cách sử dụng hàm Nikaido-Isoda được định nghĩa trong (3.24). Hàm này đã được sử dụng trong mô hình sản xuất điện và một số mô hình khác [18, 27].

Trong thực tế, mức sản xuất tại mỗi chi nhánh phải thỏa mãn một tỷ lệ, chẳng hạn, tỷ lệ của thủy điện  $x_1$  và tổng sản lượng điện  $\sum_{j \neq 1} x_j$  của tất cả các chi nhánh khác bị hạn chế bởi một số phần trăm cho trước, mà có thể hiểu là  $l_1 \leq \frac{x_1}{\sum_{j \neq 1} x_j} \leq u_1$ , trong đó  $l_1$  và  $u_1$  là các hằng số cho trước. Trong trường hợp này, bài toán tìm điểm cân bằng thỏa mãn thêm điều kiện ràng buộc dẫn đến bài toán chấp nhận tách phi tuyến (NSEP). Các mô hình có ràng buộc có thể xem trong một số bài báo, chẳng hạn [3, 32].

Chúng tôi thử nghiệm thuật toán 3.1 với hàm chi phí cho bởi

$$c_j(x_j) := \frac{1}{2}r_j x_j^2 + q_j x_j, \quad r_j > 0$$

và các hàm giá là

$$p_i\left(\sum_{j=1}^n x_j\right) := 30 - \sum_{j=1}^n \tau_{ij} x_j,$$

trong đó  $r_j$ ,  $q_j$  và mỗi  $\tau_{ij}$  được lấy ngẫu nhiên trong khoảng  $[0, 20]$ ,  $[0, 3]$  và trong khoảng  $[0, 1/n]$  tương ứng. Với các hàm chi phí và hàm giá này, bằng cách sử dụng Mệnh đề 3.2 trong [26], song hàm  $f$  xác định bởi (3.24) với hàm  $f$  cho bởi (3.25) là tiền đơn điệu.

Chúng tôi lấy tập chiến lược  $K_i := [0, 6]$  với mỗi  $i$  và yêu cầu tỷ số mỗi loại điện với tổng tất cả lượng điện nhỏ hơn bằng năm mươi phần trăm, tức là biểu diễn bởi ràng buộc  $0 \leq F_i(x) \leq 0.5$  với mỗi  $i = 1, \dots, m$ .

Chọn dãy các tham số là

$$\epsilon_k = 0, \delta_k = 3, \quad \forall k.$$

và chúng tôi tính mô hình với  $m = 5$  và các giá trị khác nhau của  $n$  từ 10



đến 50 và

$$F_i(x) = \frac{\sum_{k \in I_i} x_k}{\sum_{j=1}^n x_j}, \quad i = 1, \dots, m,$$

trong đó  $I_i$  là tập các chi nhánh mà sản xuất loại điện  $i$ .

Kết quả tính toán được chỉ ra trong bảng 3.1 với các cỡ khác nhau, một trăm bài toán được tính ở mỗi cỡ. Thuật toán dừng ở bước lặp  $k$  nếu  $\|x_k - y_k\| \leq 10^{-4}$  và  $p(x_k) \leq 10^{-4}$  hoặc số bước lặp không vượt quá 20000.

Bảng 3.1: Thuật toán 3.1 with  $\beta_k = \frac{7}{2(k+1)}$

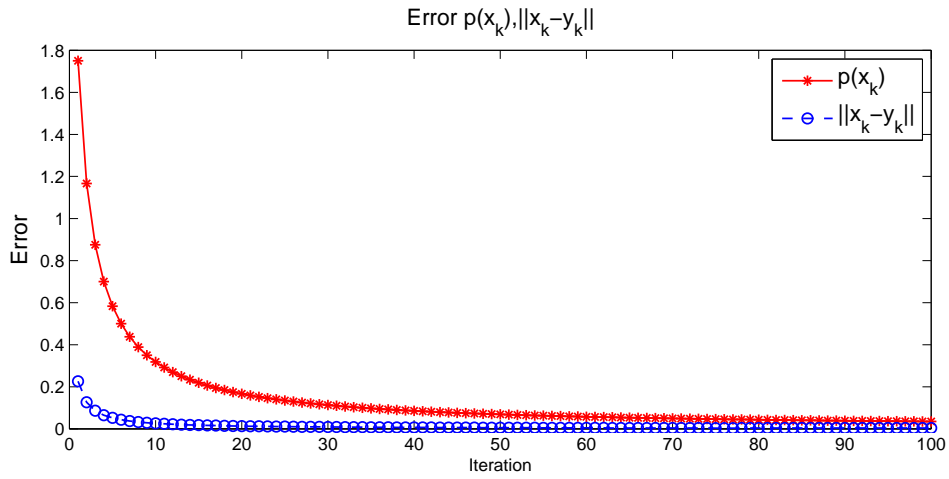
n	m	Iter	CPU-times(s)
10	5	248.11	7.2859
20	5	674.82	24.9143
30	5	1224.2	40.4671
40	5	1670	58.5344
50	5	2259.7	84.3867

Hình 3.1 chỉ ra rằng các sai số  $p(x_k)$  và  $\|x_k - y_k\|$  đều dần đến 0 khi số bước lặp  $k$  tiến ra  $+\infty$ . Chúng ta có thể nhìn thấy trong ví dụ này, cả hai sai số đều giảm nhanh khi số bước lặp  $k$  đủ lớn. Tuy nhiên, trong một vài trường hợp, giá trị hàm  $p(x_k)$  có thể không đơn điệu tăng. Ngoài ra, đối với tất cả các bài toán chúng tôi thử nghiệm, giá trị của hàm  $p$  tại bước lặp dừng là rất nhỏ. Chúng tôi cũng thử nghiệm thuật toán với các giá trị khác nhau của  $\beta_k$ :  $\frac{7}{2(k+1)}$ ,  $\frac{10}{(k+1)}$ ,  $\frac{20}{(k+1)}$ ,  $\frac{50}{k+1}$ ,  $\frac{100}{k+1}$ . Chúng tôi thấy rằng, việc chọn tham số  $\beta_k$  đóng vai trò quan trọng trong thuật toán, nhìn chung,  $\|x_k - y_k\|$  tiến đến 0 rất chậm khi tham số này là quá nhỏ hoặc quá lớn, xem hình 3.2.

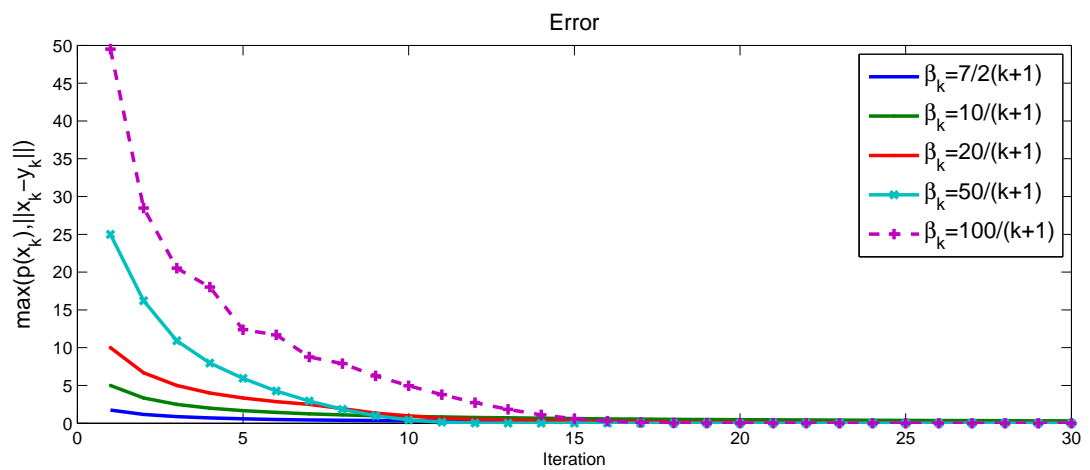
Gần đây, các tác giả trong [44] xét bài toán cân bằng

$$\text{Find } x \in C \cap D : f(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad EP(f, C, D)$$

trong đó  $C, D$  là các tập con lồi trong  $\mathbb{R}^n$  và  $f$  là một song hàm hữu hạn xác định trên một tập mở chứa  $C$  và  $D$ .



Hình 3.1:

Hình 3.2: Sai số ứng với các giá trị khác nhau của  $\beta_k$

Để so sánh với thuật toán của chúng tôi, kí hiệu là NSEP, với thuật toán , kí hiệu là MACEP trong [44] ở ví dụ trên, chúng tôi viết bài toán (NSEP) về dạng bài toán cân bằng  $EP(C, D, f)$  bằng cách lấy  $C \equiv K$ ,  $D := \{x : F(x) \in Q\}$  và áp dụng thuật toán MACEP trong [44] để giải mô hình này. Chúng tôi thử với tiêu chuẩn dừng giống nhau  $\max\{\|x_k - y_k\|, p(x_k)\} \leq 10^{-4}$ , và thấy rằng thuật toán MACEP mất nhiều thời gian hơn, thậm chí với số chiều nhỏ  $n = 10, k = 5$ .

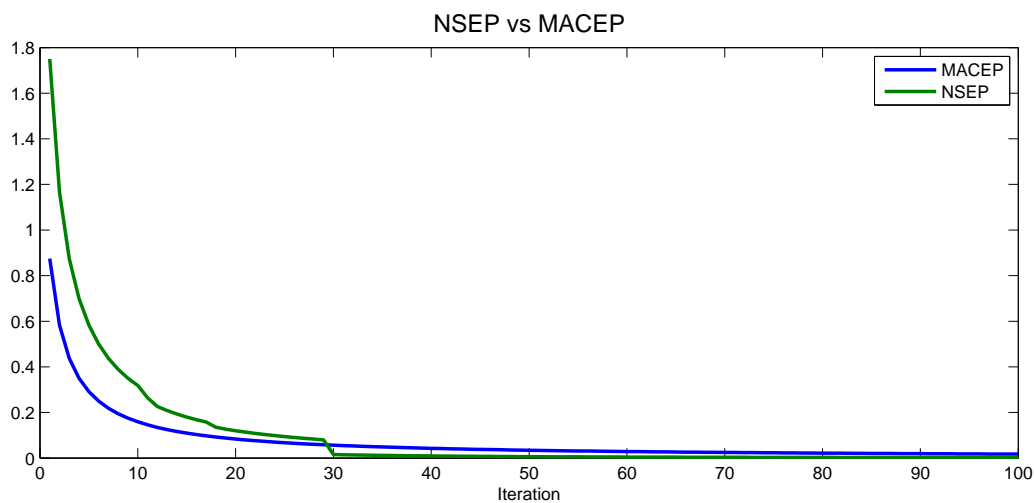
Bảng 3.2 bên dưới là kết quả tính toán trung bình 150 bước lặp đầu tiên cho cả hai thuật toán.

Bảng 3.2: MACEP vs NSEP (n=10,k=5)

	Iter.	Cpu(s)	Err.
MACEP	150	2.3349	0.0116
NSEP	150	4.2481	0.0012

Từ bảng tính toán, ta thấy, đối với ví dụ này, thời gian tính toán thuật toán MACEP ít hơn thời gian của thuật toán NSEP trong 150 bước lặp đầu tiên, nhưng sai số thu được bởi thuật toán NSEP tiến đến 0 nhanh hơn thuật toán MACEP.

Đồ thị về sai số của hai thuật toán được mô tả trong hình 3.3:



Hình 3.3: So sánh

Hình 3.3 cho thấy các sai số của thuật toán MACEP trong 30 bước lặp đầu tiên giảm rất nhanh, nhưng từ bước lặp 30 trở đi, thuật toán NSEP hội tụ đến 0 nhanh hơn.

**Ví dụ 3.2.** ([44]) Chúng tôi thử nghiệm thuật toán 3.1 trên ví dụ 4.3 trong [44], trong đó song hàm được cho bởi

$$f(x, y) = \langle Ax + \chi^5(y + x) + \mu - \alpha, y - x \rangle,$$

với

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \chi & \chi & \cdots & \chi \\ \chi & 0 & \chi & \cdots & \chi \\ \chi & \chi & 0 & \cdots & \chi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \chi & \chi & \cdot & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{10 \times 10}, \chi = 3, \alpha = (2, 2, \dots, 2)^T, \mu = (3, 4, 5, 6, 7)^T.$$

Như trong ví dụ 4.3([44]),

$$C = D = \begin{cases} x \in \mathbb{R}^5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 10, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 15, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 0.5x_5 \geq 4. \end{cases}$$

Bằng cách đặt

$$Q = (-\infty; 10] \times (-\infty; 15] \times (4, +\infty]$$

và  $F(x) = Mx$  trong đó

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.5 \end{pmatrix},$$

ta thấy  $D = \{x \mid F(x) \in Q\}$ .

Chúng tôi chọn  $x^0 = (1; 2; 1; 1; 1)$  và  $\lambda_k = k/(k+1)$ ,  $\rho_k = 1$ ,  $\beta_k = 40/k$ ,  $x^0 = (1; 2; 1; 1; 1)$ . Kết quả tính toán được cho bởi bảng 3.3:

Bảng 3.3: Ví dụ 2

	Iter.	Cpu(s)	Err.	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$	$x_4^k$	$x_5^k$
MACEP	46	1,4078	$8,8654 \cdot 10^{-5}$	0,9466	0,9449	0,9425	0,9404	0,4510
NSEP	21	0,1551	$4,8698 \cdot 10^{-6}$	0,9467	0,9447	0,9426	0,9405	0,4509

**Ví dụ 3.3.** Chúng tôi xét bài toán (NSEP) trong đó

$$K = \underbrace{[0, 6] \times [0, 6] \times \dots \times [0, 6]}_{10},$$

$$F(x) = (F_1(x_1), \dots, F_5(x_5))$$

với  $F_i(x_i) = \log(a_i x_i + b_i)$ ,  $a = (1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $b_i = 14$  với mọi  $i = 1, \dots, 5$ , và

$$Q = \underbrace{[0, 3] \times [0, 3] \times \dots \times [0, 3]}_5.$$

Song hàm  $f$  được xác định bởi

$$f(x, y) = \langle Px + q, y - x \rangle,$$

trong đó  $q = (-28, -29, -27, -29, -29, -29, -28, -29, -28, -29)$ ,

$$P = \begin{pmatrix} 23 & 10 & 3 & 7 & 6 & 4 & 7 & 10 & 2 & 2 \\ 1 & 23 & 8 & 2 & 9 & 10 & 1 & 9 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 14 & 1 & 10 & 9 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 7 & 21 & 6 & 9 & 7 & 5 & 3 & 8 \\ 2 & 10 & 4 & 4 & 20 & 4 & 10 & 3 & 9 & 3 \\ 8 & 8 & 2 & 10 & 6 & 15 & 9 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 5 & 10 & 1 & 9 & 14 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 5 & 10 & 8 & 24 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 7 & 5 & 6 & 20 & 5 \\ 1 & 6 & 8 & 9 & 6 & 3 & 10 & 6 & 7 & 20 \end{pmatrix}.$$

Khi đó song hàm  $f$  thỏa mãn các giả thiết đảm bảo sự hội tụ của cả hai thuật toán. Lấy  $\rho_k = 3$ ,  $\beta_k = 7/2(k + 1)$ ,  $x^0 = (3; 3; 3; 3; 3; 0; 0; 0; 0; 0)$  và thử thuật toán MACEP và thuật toán của chúng tôi. Kết quả tính toán được mô tả trong Bảng 3.4 và 3.5.

Bảng 3.4: Ví dụ 3.3

	Iter.	Cpu(s)	Err.
MACEP	4415	70.4365	$10^{-4}$
NSEP	737	15.4585	$10^{-4}$

Bảng 3.5: Ví dụ 3.3(tiếp)

Nghiem xấp xỉ	
MACEP	(0.3402, 0.2121, 0.9073, 0.4221, 0.6421, 0.3109, 0.2946, 0.3426, 0.1756, 0.1518)
NSEP	(0.3466, 0.2203, 0.8904, 0.4399, 0.6305, 0.2709, 0.2648, 0.3585, 0.2040, 0.1703)

### 3.4 Kết luận

Trong chương này, chúng tôi thu được một thuật toán mới giải bài toán chấp nhận tách phi tuyến: ứng dụng cho mô hình cân bằng Nash có ràng buộc. Tính hữu hiệu và ưu việt của thuật toán được đưa ra thông qua 3 ví dụ số minh họa.

## Chương 4

# Nghiên cứu tính chất định tính của mạng nơ ron

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất định tính của mạng nơ ron. Lý do chúng tôi nghiên cứu vấn đề này là do nhiều nhà khoa học đề xuất dùng mạng nơ ron để giải một lớp các bài toán bất đẳng thức biến phân phi tuyến mà đây là một trường hợp riêng của bài toán cân bằng. Cụ thể, chúng tôi nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của mạng nơ ron phân thứ và nghiên cứu tính thụ động trong thời gian hữu hạn của mạng nơ ron phân thứ không chắc chắn.

### 4.1 Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của mạng nơ ron phân thứ

Trước hết, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa.

**Định nghĩa 4.1.** ([29]) Cho  $\alpha > 0$  và  $[a, b] \in \mathbb{R}$ , tích phân phân thứ Riemann-Liouville cấp  $\alpha$  của hàm  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  được cho bởi

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

trong đó  $\Gamma(\cdot)$  là hàm Gamma xác định bởi  $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}, s > 0$ .

**Định nghĩa 4.2.** ([29]) Cho  $\alpha > 0$  và  $[a, b] \in \mathbb{R}$ , đạo hàm phân thứ Caputo cấp  $\alpha$  của hàm  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  được định nghĩa là

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t - s)^{\alpha+1-n}} ds,$$

trong đó,  $t \geq 0, n - 1 < \alpha \leq n, n$  là một số nguyên dương. Đặc biệt, khi  $0 < \alpha < 1$ , ta có

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t - s)^\alpha} ds, \quad t \geq 0.$$

**Bổ đề 4.1.** ([29]) Cho  $x(t) \in C^n([0, +\infty], \mathbb{R})$  và  $n - 1 < \alpha < n, (n \geq 1, n \in \mathbb{Z}^+)$ . Khi đó

$$I_t^\alpha (D_t^\alpha x(t)) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0).$$

Đặc biệt, khi  $0 < \alpha < 1$  ta có

$$I_t^\alpha (D_t^\alpha x(t)) = x(t) - x(0).$$

Xét mạng nơ ron phân thứ Caputo

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]f(x(t)) \\ \quad + [W + \Delta W(t)]w(t) + [B + \Delta B(t)]u(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.1)$$

trong đó  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  là vec tơ trạng thái của mạng nơ ron,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  là vectơ điều khiển đầu vào,  $w(t) \in \mathbb{R}^p$  là vectơ nhiễu,  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là ma trận đường chéo chính, xác định dương;  $D, W, B$  là các ma trận hằng số đã biết với số chiều thích hợp;  $\Delta A(t) = G_a F_a(t) H_a$ ,  $\Delta D(t) = G_d F_d(t) H_d$ ,  $\Delta W(t) = G_w F_w(t) H_w$ ,  $\Delta B(t) = G_b F_b(t) H_b$ , trong đó  $G_a, G_d, G_w, G_b, H_a, H_d, H_w, H_b$  là các ma trận thực, hằng số, đã biết với số chiều thích hợp;



$F_a(t), F_d(t), F_w(t)$  và  $F_b(t)$  là các ma trận không biết nhưng thỏa mãn  $F_a^T(t)F_a(t) \leq I, F_d^T(t)F_d(t) \leq I, F_w^T(t)F_w(t) \leq I, F_b^T(t)F_b(t) \leq I, \forall t \geq 0$ ;  $f(x(t)) = [f_1(x_1(t)), \dots, f_n(x_n(t))]^T \in \mathbb{R}^n$  là các hàm kích hoạt của các nơ ron;  $x_0$  là điều kiện ban đầu.

Để nghiên cứu tính ổn định của mạng nơ ron phân thứ (4.1), ta cần các giả thiết sau:

**H1.** Các hàm kích hoạt  $f_i(\cdot)$  ( $i=1, \dots, n$ ) liên tục, thỏa mãn điều kiện Lipschitz với hằng số Lipschitz  $l_i > 0, f_i(0) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), tức là

$$\|f_i(\xi_1) - f_i(\xi_2)\| \leq l_i \|\xi_1 - \xi_2\|,$$

với mọi  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ . Điều kiện trên tương đương với tồn tại một ma trận đường chéo chính, xác định dương  $L = \text{diag}\{l_1, \dots, l_n\}$  thỏa mãn

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|L(y - x)\|,$$

với mọi  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^m$ .

**H2.** Nhiễu  $w(t) \in \mathbb{R}^p$  thỏa mãn điều kiện:

$$\exists d > 0 : \quad w^T(t)w(t) \leq d, \quad \forall t \in [0, T_f]. \quad (4.2)$$

Cho trước một số dương  $T_f$ . Hàm chi phí bậc hai liên kết với mạng nơ ron phân thứ (4.1) có dạng

$$J(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_f} (T_f - s)^{\alpha-1} (x^T(s)Q_1x(s) + u^T(s)Q_2u(s))ds, \quad (4.3)$$

trong đó  $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  là các ma trận đối xứng xác định dương cho trước.

Xét hệ phương trình

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^\alpha x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]f(x(t)) \\ \quad \quad \quad + [W + \Delta W(t)]w(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

**Định nghĩa 4.3.** ([29]) Cho trước các số dương  $c_1, c_2, T_f$  và một ma trận đối xứng xác định dương  $R$ . Hệ (4.4) được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$  nếu và chỉ nếu

$$x_0^T R x_0 \leq c_1 \rightarrow x^T(t) R x(t) \leq c_2, \quad t \in [0, T_f],$$

với mọi nhiễu  $w(t) \in \mathbb{R}^p$  thỏa mãn (4.2).

**Định nghĩa 4.4.** Nếu tồn tại một điều khiển ngược  $u^*(t) = Kx(t)$  và một số dương  $J^*$  sao cho hệ phương trình vi phân

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^\alpha x(t) = [-A + BK - \Delta A(t) + \Delta B(t)K]x(t) \\ \quad + [D + \Delta D(t)]f(x(t)) \\ \quad + [W + \Delta W(t)]w(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$  và hàm chi phí (4.3) thỏa mãn  $J(u) \leq J^*$  thì giá trị  $J^*$  gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển,  $u^*(t)$  gọi là luật điều khiển đảm bảo chi phí điều khiển.

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại một bổ đề hỗ trợ cần thiết cho chứng minh kết quả chính.

**Bổ đề 4.2.** ([29]) Giả sử  $x(t) \in \mathbb{R}^m$  là một hàm liên tục và có đạo hàm.

Khi đó, với mỗi  $t \geq t_0$ , bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{2} D_t^\alpha (x^T(t) P x(t)) \leq x^T(t) P D_t^\alpha x(t),$$

$$\forall \alpha \in (0, 1), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0,$$

trong đó  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là ma trận đối xứng xác định dương.

**Bổ đề 4.3.** ([9]) Cho trước các hằng số  $X, Y, Z$  với số chiều hữu hạn thỏa mãn  $Y = Y^T > 0, X = X^T$ , khi đó  $X + Z^T Y^{-1} Z < 0$  nếu và chỉ nếu

$$\begin{bmatrix} X & Z^T \\ Z & -Y \end{bmatrix} < 0.$$

Bổ đề 4.3 còn được gọi là Bổ đề Schur.

Định lý sau đưa ra một điều kiện đủ mới cho hệ phương trình vi phân phân thứ nơ ron (4.5).

**Định lý 4.1.** *Giả sử các điều kiện **H1** và **H2** thỏa mãn. Cho trước các số dương  $c_1, c_2, T_f$  và ma trận đối xứng xác định dương  $R$ . Nếu tồn tại ma trận đối xứng xác định dương  $P$  và ma trận  $Y$ , các số dương  $\epsilon_1, \epsilon_2$  thỏa mãn điều kiện sau*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & PH_a^T & Y^T H_b^T & PL^T & PQ_1 & Y^T Q_2 & D \\ * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Q_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \mathcal{M}_{77} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.6a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{d(1 + \lambda_3)}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (4.6b)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} = & -AP - PA^T + BY + Y^T B^T + \epsilon_1 G_a G_a^T \\ & + \epsilon_2 G_b G_b^T + G_d G_d^T + WW^T + G_w G_w^T, \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_{77} = -I + H_d^T H_d,$$

$$\bar{P} = R^{-\frac{1}{2}} P^{-1} R^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda_1 = \lambda_{\min}(\bar{P}), \quad \lambda_2 = \lambda_{\max}(\bar{P}),$$

$$\lambda_3 = \lambda_{\max}(H_w^T H_w), \quad L = \text{diag}\{l_1, \dots, l_n\}.$$

Khi đó, hệ (4.5) ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$ .

Hơn nữa,

$$u(t) = Y P^{-1} x(t), \quad \forall t \geq 0,$$

là luật điều khiển đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (4.1) với giá trị đảm

bảo chi phí điều khiển là

$$J^* = \frac{d(1 + \lambda_3)}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha + \lambda_2 c_1.$$

*Chứng minh.* Xét hàm toàn phương không âm cho mạng nơ ron (4.5)

$$V(x(t)) = x^T(t)P^{-1}x(t).$$

Từ Bổ đề 4.2, đạo hàm Caputo của  $V(x(t))$  theo  $t$  của hệ (4.5) được định nghĩa là

$$\begin{aligned} & D_t^\alpha V(x(t)) \\ & \leq 2x^T(t)P^{-1}D_t^\alpha x(t) \\ & = x^T(t) \left[ -P^{-1}A - A^T P^{-1} + P^{-1}BK \right. \\ & \quad \left. + K^T B^T P^{-1} \right] x(t) \\ & \quad - 2x^T(t)P^{-1}G_a F_a(t)H_a x(t) + 2x^T(t)P^{-1}Df(x(t)) \\ & \quad + 2x^T(t)P^{-1}G_d F_d(t)H_d f(x(t)) + 2x^T(t)P^{-1}W\omega(t) \\ & \quad + 2x^T(t)P^{-1}G_w F_w(t)H_w \omega(t) \\ & \quad + 2x^T(t)P^{-1}G_b F_b(t)H_b Kx(t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned}
& -2x^T(t)P^{-1}G_aF_a(t)H_ax(t) \\
& \leq \epsilon_1x^T(t)P^{-1}G_aG_a^TP^{-1}x(t) + \epsilon_1^{-1}x^T(t)H_a^TH_ax(t); \\
& 2x^T(t)P^{-1}G_dF_d(t)H_df(x(t)) \\
& \leq x^T(t)P^{-1}G_dG_d^TP^{-1}x(t) + f^T(x(t))H_d^TH_df(x(t)); \\
& 2x^T(t)P^{-1}W\omega(t) \\
& \leq x^T(t)P^{-1}WW^TP^{-1}x(t) + \omega^T(t)\omega(t); \\
& 2x^T(t)P^{-1}G_wF_w(t)H_w\omega(t) \\
& \leq x^T(t)P^{-1}G_wG_w^TP^{-1}x(t) + \omega^T(t)H_w^TH_w\omega(t) \\
& \leq x^T(t)P^{-1}G_wG_w^TP^{-1}x(t) + \lambda_3\omega^T(t)\omega(t); \\
& 2x^T(t)P^{-1}G_bF_b(t)H_bKx(t) \\
& \leq \epsilon_2x^T(t)P^{-1}G_bG_b^TP^{-1}x(t) \\
& \quad + \epsilon_2^{-1}x^T(t)K^TH_b^TH_bKx(t).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Mặt khác, từ điều kiện **H1** ta có

$$0 \leq -f^T(x(t))f(x(t)) + x^T(t)L^TLx(t). \tag{4.9}$$

Từ (4.7)–(4.9), ta thu được

$$D_t^\alpha V(x(t)) \leq \eta^T(t)\Omega\eta(t) + (1 + \lambda_3)\omega^T(t)\omega(t) \tag{4.10}$$

$$- x^T(t)[Q_1 + K^TQ_2K]x(t), \tag{4.11}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \begin{bmatrix} x^T(t) & f^T(x(t)) \end{bmatrix}^T, \\ \Omega &= \begin{bmatrix} \Omega_{11} & P^{-1}D \\ D^T P^{-1} & \Omega_{22} \end{bmatrix}, \\ \Omega_{11} &= -P^{-1}A - A^T P^{-1} + P^{-1}BK + K^T B^T P^{-1} \\ &\quad + \epsilon_1 P^{-1}G_a G_a^T P^{-1} + \epsilon_1^{-1} H_a^T H_a + P^{-1}G_d G_d^T P^{-1} \\ &\quad + P^{-1}W W^T P^{-1} + P^{-1}G_w G_w^T P^{-1} \\ &\quad + \epsilon_2 P^{-1}G_b G_b^T P^{-1} + \epsilon_2^{-1} K^T H_b^T H_b K \\ &\quad + L^T L + Q_1 + K^T Q_2 K, \\ \Omega_{22} &= H_d^T H_d - I.\end{aligned}$$

Bây giờ, nhân cả hai vế bên trái và bên phải  $\Omega$  với  $\mathcal{P} = \text{diag}\{P, I\}$  và đặt  $K = YP^{-1}$ , ta có

$$\Phi = \mathcal{P}\Omega\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & D \\ D^T & \Xi_{22} \end{bmatrix},$$

trong đó

$$\begin{aligned}\Xi_{11} &= -AP - PA^T + BY + Y^T B^T + \epsilon_1 G_a G_a^T \\ &\quad + \epsilon_1^{-1} P H_a^T H_a P + G_d G_d^T + W W^T + G_w G_w^T \\ &\quad + \epsilon_2 G_b G_b^T + \epsilon_2^{-1} Y^T H_b^T H_b Y \\ &\quad + PL^T LP + PQ_1 P + Y^T Q_2 Y.\end{aligned}$$

Chú ý rằng  $\Omega < 0$  tương đương với  $\Phi < 0$ . Áp dụng Bổ đề Schur, ta có  $\Phi < 0$  tương đương với (4.6a). Do đó, từ các điều kiện (4.6a), (4.10) và  $x^T(t)[Q_1 + K^T Q_2 K]x(t) > 0$ , ta có

$$D_t^\alpha V(x(t)) \leq (1 + \lambda_3)\omega^T(t)\omega(t), \quad \forall t \in [0, T_f]. \quad (4.12)$$

Tích phân cấp  $\alpha$  cả hai vế của (4.12) từ 0 đến  $t$  ( $0 < t < T_f$ ) và sử dụng

Bổ đề 4.1, ta thu được

$$\begin{aligned}
& x^T(t)P^{-1}x(t) \\
& \leq x^T(0)P^{-1}x(0) + I_t^\alpha((1 + \lambda_3)\omega^T(t)\omega(t)) \\
& = x^T(0)P^{-1}x(0) + \frac{1 + \lambda_3}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \omega^T(s)\omega(s) ds \\
& \leq x^T(0)P^{-1}x(0) + \frac{d(1 + \lambda_3)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} ds \\
& \leq x^T(0)P^{-1}x(0) + \frac{d(1 + \lambda_3)}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
x^T(t)P^{-1}x(t) & = x^T(t)R^{\frac{1}{2}}\bar{P}R^{\frac{1}{2}}x(t) \\
& \geq \lambda_{\min}(\bar{P})x^T(t)Rx(t) \\
& = \lambda_1 x^T(t)Rx(t),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

và

$$\begin{aligned}
x^T(0)P^{-1}x(0) & = x^T(0)R^{\frac{1}{2}}\bar{P}R^{\frac{1}{2}}x(0) \\
& \leq \lambda_{\max}(\bar{P})x^T(0)Rx(0) \\
& = \lambda_2 x^T(0)Rx(0) \leq \lambda_2 c_1.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Từ (4.13)–(4.15), ta nhận được

$$\begin{aligned}
\lambda_1 x^T(t)Rx(t) & \leq V(x(t)) = x^T(t)P^{-1}x(t) \\
& \leq \lambda_2 c_1 + \frac{d(1 + \lambda_3)}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha.
\end{aligned}$$

Điều kiện (4.6b) suy ra  $x^T(t)Rx(t) < c_2$ . Vậy, hệ (4.5) ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$ . Tiếp theo, chúng tôi sẽ tìm giá trị chi phí đảm bảo điều khiển cho hàm chi phí (4.3). Từ các điều kiện (4.6a) và (4.10), ta có

$$D_t^\alpha V(x(t)) \leq (1 + \lambda_3)\omega^T(t)\omega(t) - x^T(t)[Q_1 + K^T Q_2 K]x(t), \forall t \in [0, T_f]. \tag{4.16}$$

Tích phân cấp  $\alpha$  cả hai vế của (4.16) từ 0 đến  $T_f$  và sử dụng Bổ đề 4.1, ta thu được

$$V(x(T_f)) - V(x(0)) \leq I_{T_f}^\alpha((1 + \lambda_3)\omega^T(t)\omega(t)) - J(u). \quad (4.17)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} J(u) &\leq I_{T_f}^\alpha((1 + \lambda_3)\omega^T(t)\omega(t)) + V(x(0)) \\ &\leq \frac{d(1 + \lambda_3)}{\Gamma(\alpha + 1)}T_f^\alpha + \lambda_2 c_1 := J^* \end{aligned} \quad (4.18)$$

do  $V(x(T_f)) = x^T(T_f)P^{-1}x(T_f) \geq 0$ . Định lý được chứng minh. □

**Nhận xét 4.1.** Chú ý rằng, trong Định lý 4.1, bất đẳng thức ma trận (4.6a) là tuyến tính với các ẩn  $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0, P > 0$  và ma trận  $Y$ . Vì vậy các điều kiện này có thể giải trong thời gian đa thức bằng cách sử dụng MATLAB's LMI Control Toolbox trong MATLAB.

**Nhận xét 4.2.** Từ Định lý 4.1 và Nhận xét 4.1, chúng ta thu được thuật toán sau đây giải bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của mạng nơ ron phân thứ như sau:

**Bước 1.** Giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính (4.6a) thu được ma trận đối xứng xác định dương  $P$ , và ma trận  $Y$  và hai số dương  $\epsilon_1, \epsilon_2$ .

**Bước 2.** Tính ma trận nghịch đảo  $P^{-1}$ , ma trận  $\bar{P} = R^{-\frac{1}{2}}P^{-1}R^{-\frac{1}{2}}$  và các số  $\lambda_1 = \lambda_{\min}(\bar{P}), \lambda_2 = \lambda_{\max}(\bar{P}), \lambda_3 = \lambda_{\max}(H_w^T H_w)$ .

**Bước 3.** Kiểm tra điều kiện (4.6b) trong Định lý 4.1. Nếu đúng, tiếp tục Bước 4; nếu sai thì quay lại Bước 1.

**Bước 4.** Điều khiển đảm bảo chi phí cho hệ (4.1) được cho bởi  $u(t) = YP^{-1}x(t)$ .



## 4.2 Tính thụ động trong thời gian hữu hạn cho mạng nơ ron phân thứ không chắc chắn

Xét mạng nơ ron phân thứ không chắc chắn

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha x(t) = -[A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]f(x(t)) + W\omega(t), t \geq 0, \\ y(t) = Mf(x(t)) + N\omega(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.19)$$

trong đó  $0 < \alpha < 1$ ,  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$  là véctơ trạng thái,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  là véctơ đầu vào,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$  là nhiễu đầu vào,  $n$  là số các nơ ron,  $f(x(t)) = (f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \dots, f_n(x_n(t)))^T \in \mathbb{R}^n$  là các hàm kích hoạt,  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là ma trận đường chéo chính, xác định dương,  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là ma trận trọng số,  $W \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{p \times m}$  là các ma trận thực đã biết,  $\Delta A(t) = G_a F_a(t) H_a$ ,  $\Delta D(t) = G_d F_d(t) H_d$ ,  $G_a, G_d, H_a, H_d$  là các ma trận thực đã biết với số chiều thích hợp;  $F_a(t), F_d(t)$  là các ma trận thời gian thực chưa biết nhưng thỏa mãn  $F_a^T(t) F_a(t) \leq I, F_d^T(t) F_d(t) \leq I, \forall t \geq 0$ .

Chúng tôi sử dụng hai giả thiết kinh điển **H1**, **H2** ở mục trước để chứng minh tính thụ động trong thời gian hữu hạn cho mạng nơ ron phân thứ (4.19).

**Định nghĩa 4.5.** (Tính thụ động trong thời gian hữu hạn) Hệ (4.19) được gọi là thụ động trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$  nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn

(i) Khi đầu vào  $y(t) \equiv 0$ , thì hệ (4.19) ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$ .

(ii) Dưới điều kiện ban đầu bằng không, tồn tại một vô hướng  $\gamma > 0$  sao

cho bất đẳng thức sau đúng

$$2 {}_0I_{t_f}^\alpha(y^T(t)\omega(t)) \geq -\gamma {}_0I_{t_f}^\alpha(\omega^T(t)\omega(t)), \forall t_f \in [0, T_f].$$

**Bổ đề 4.4.** ([35]) *Giả sử  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  là một véctor khả vi. Khi đó, với mỗi hằng số thời gian  $t \geq t_0$ , bất đẳng thức sau đúng*

$$\frac{1}{2} {}_t^C D_t^\alpha(x^T(t)Px(t)) \leq x^T(t)P {}_t^C D_t^\alpha x(t), \quad \forall \alpha \in (0, 1), \forall t \geq t_0 \geq 0,$$

trong đó  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là ma trận đối xứng xác định dương.

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh một điều kiện đủ cho tính bị chặn hữu hạn của hệ phương trình vi phân nơ ron phân thứ với tham số bất định.

**Định lý 4.2.** *Giả sử các giả thiết **H1**, **H2** thỏa mãn. Cho các số dương  $c_1, c_2, T_f$  và ma trận đối xứng xác định dương  $R$ . Hệ (4.19) với đầu vào  $y(t) \equiv 0$  là ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$  nếu tồn tại một ma trận đối xứng xác định dương  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  và các hằng số dương  $\theta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  thỏa mãn các điều kiện sau*

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & PD & PG_a & PG_d & PW \\ * & \Xi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.20a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{d\epsilon_3}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (4.20b)$$

trong đó

$$\bar{P} = R^{-\frac{1}{2}} P R^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda_1 = \lambda_{\min}(\bar{P}), \quad \lambda_2 = \lambda_{\max}(\bar{P}), \quad L = \text{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_n\},$$

$$\Xi_{11} = -PA - A^T P + \epsilon_1 H_a^T H_a + \theta L^T L,$$

$$\Xi_{22} = \epsilon_2 H_d^T H_d - \theta I.$$

*Chứng minh.* Chọn hàm Lyapunov như sau

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t).$$

Do đó, từ Bổ đề 4.4 ta thu được đạo hàm Caputo cấp  $\alpha$  với ( $0 < \alpha < 1$ ) của  $V(x(t))$  theo quỹ đạo của hệ nơ ron (4.19):

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha V(x(t)) &\leq 2x^T(t)P {}^C D_t^\alpha x(t) \\ &= x^T(t)[-PA - A^T P]x(t) - 2x^T(t)PG_a F_a(t)H_a x(t) \\ &\quad + 2x^T(t)PDf(x(t)) + 2x^T(t)PG_d F_d(t)H_d f(x(t)) \\ &\quad + 2x^T(t)PW\omega(t). \end{aligned}$$

Dùng bất đẳng thức ma trận Cauchy, ta có đánh giá sau:

$$-2x^T(t)PG_a F_a(t)H_a x(t) \leq \epsilon_1^{-1}x^T(t)PG_a G_a^T Px(t) + \epsilon_1 x^T(t)H_a^T H_a x(t), \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} 2x^T(t)PG_d F_d(t)H_d f(x(t)) &\leq \epsilon_2^{-1}x^T(t)PG_d G_d^T Px(t) \\ &\quad + \epsilon_2 f^T(x(t))H_d^T H_d f(x(t)), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$2x^T(t)PW\omega(t) \leq \epsilon_3^{-1}x^T(t)PWW^T Px(t) + \epsilon_3 \omega^T(t)\omega(t). \quad (4.23)$$

Áp dụng giả thiết **H1** ta có

$$0 \leq -\theta f^T(x(t))f(x(t)) + \theta x^T(t)L^T Lx(t). \quad (4.24)$$

Từ (??)–(4.24), ta nhận được

$${}^C D_t^\alpha V(x(t)) \leq \eta^T(t)\Omega\eta(t) + \epsilon_3 \omega^T(t)\omega(t), \quad (4.25)$$

trong đó

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ f(x(t)) \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & PD \\ D^T P & \Omega_{22} \end{bmatrix},$$

với

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= -PA - A^T P + \theta L^T L + \epsilon_1 H_a^T H_a + \epsilon_1^{-1}PG_a G_a^T P \\ &\quad + \epsilon_2^{-1}PG_d G_d^T P + \epsilon_3^{-1}PWW^T P, \\ \Omega_{22} &= \epsilon_2 H_d^T H_d - \theta I. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề Schur (Bổ đề 4.3), ta có  $\Omega < 0$  tương đương với (4.20a). Do đó, từ điều kiện (4.20a) ta có đánh giá sau:

$${}^C D_t^\alpha V(x(t)) \leq \epsilon_3 \omega^T(t) \omega(t), \quad \forall t \in [0, T_f]. \quad (4.26)$$

Tích phân cấp  $\alpha$  cả hai vế của (4.26) từ 0 tới  $t$  ( $0 < t < T_f$ ) và sử dụng Bổ đề 2.1, ta có

$$\begin{aligned} x^T(t)Px(t) &\leq x^T(0)Px(0) + {}_0 I_t^\alpha(\epsilon_3 \omega^T(t) \omega(t)) \\ &= x^T(0)Px(0) + \frac{\epsilon_3}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \omega^T(s) \omega(s) ds \\ &\leq x^T(0)Px(0) + \frac{d\epsilon_3}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq x^T(0)Px(0) + \frac{d\epsilon_3}{\Gamma(\alpha+1)} T_f^\alpha. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Bằng tính toán trực tiếp, ta có các ước lượng sau đây

$$x^T(t)Px(t) = x^T(t)R^{\frac{1}{2}}\bar{P}R^{\frac{1}{2}}x(t) \geq \lambda_{\min}(\bar{P})x^T(t)Rx(t) = \lambda_1 x^T(t)Rx(t), \quad (4.28)$$

và

$$\begin{aligned} x^T(0)Px(0) &= x^T(0)R^{\frac{1}{2}}\bar{P}R^{\frac{1}{2}}x(0) \leq \lambda_{\max}(\bar{P})x^T(0)Rx(0) \\ &= \lambda_2 x^T(0)Rx(0) \leq \lambda_2 c_1. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Kết hợp (4.27), (4.28) và (4.29), ta thu được

$$\lambda_1 x^T(t)Rx(t) \leq V(x(t)) = x^T(t)Px(t) \leq \lambda_2 c_1 + \frac{d\epsilon_3}{\Gamma(\alpha+1)} T_f^\alpha.$$

Điều kiện (4.20b) suy ra  $x^T(t)Rx(t) < c_2$ . Vậy, hệ (4.19) với đầu vào  $y(t) = 0$  là ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$ . Định lý được chứng minh. □

Tiếp theo, chúng tôi xét một trường hợp đặc biệt của hệ nơ ron (4.19).

Khi  $\Delta A(t) = 0, \Delta D(t) = 0$ , thì hệ (4.19) có dạng

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = -Ax(t) + Df(x(t)) + W\omega(t), & t \geq 0, \\ y(t) = Mf(x(t)) + N\omega(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.30)$$

Từ Định lý 4.2, ta có hai hệ quả sau.

**Hệ quả 4.1.** Cho các số dương  $c_1, c_2, T_f$  và một ma trận đối xứng xác định dương  $R$ . Giả sử các giả thiết **H1, H2** thỏa mãn. Khi đó, hệ (4.30) với đầu ra  $y(t) \equiv 0$  ổn định trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$  nếu tồn tại một ma trận đối xứng xác định dương  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  và các số dương  $\theta, \epsilon$  thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{bmatrix} (-PA - A^T P + \theta L^T L) & PD & PW \\ * & -\theta I & 0 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.31a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{d\epsilon}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (4.31b)$$

trong đó

$$\bar{P} = R^{-\frac{1}{2}} P R^{-\frac{1}{2}}, \lambda_1 = \lambda_{\min}(\bar{P}), \lambda_2 = \lambda_{\max}(\bar{P}), L = \text{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_n\}.$$

**Hệ quả 4.2.** Cho các số dương  $c_1, c_2, T_f$  và một ma trận đối xứng xác định dương  $R$ . Giả sử các giả thiết **H1, H2** thỏa mãn. Khi đó, hệ (4.30) là thụ động trong thời gian hữu hạn tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f, R, d)$  nếu tồn tại một ma trận đối xứng xác định dương  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  và các số dương

$\gamma, \theta, \epsilon$  thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{bmatrix} (-PA - A^T P + \theta L^T L) & PD & 0 & PW \\ * & -\theta I & -M^T & 0 \\ * & * & (\epsilon I - (N + N^T + \gamma I)) & 0 \\ * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.32a)$$

$$\lambda_2 c_1 + \frac{d\epsilon}{\Gamma(\alpha + 1)} T_f^\alpha < \lambda_1 c_2, \quad (4.32b)$$

trong đó

$$\bar{P} = R^{-\frac{1}{2}} P R^{-\frac{1}{2}}, \lambda_1 = \lambda_{\min}(\bar{P}), \lambda_2 = \lambda_{\max}(\bar{P}), L = \text{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_n\}.$$

### 4.3 Ví dụ minh họa

Trong mục này, chúng tôi đưa ra hai ví dụ minh họa cho hai bài toán mà chúng tôi xét ở trên.

**Ví dụ 4.1.** Trong hệ (4.1), xét mạng nơ ron có  $n = 2$  nơ ron,  $\alpha = 0.95$ ,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\omega(t) = \sqrt{0.1} \cos t$ ,  $f(x(t)) = (\tanh(x_1(t)), \tanh(x_2(t)))^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $A = \text{diag}\{3, 4\}$  và

$$G_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H_a = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}, F_a(t) = \sin t,$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.5 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}, G_d = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, H_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$F_d(t) = \cos t, W = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, G_w = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}, H_w = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$

$$F_w(t) = \cos t, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, G_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H_b = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, F_b(t) = \sin t.$$

Ta có hàm kích hoạt thỏa mãn điều kiện **H1** với  $L = \text{diag}\{1, 1\}$ , nhiễu  $\omega(t)$  thỏa mãn điều kiện **H2** với  $d = 0.1$ . Hàm chi phí được cho bởi (4.4) với

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}, Q_2 = [0.2].$$

Lấy  $c_1 = 1, c_2 = 2, T_f = 1, R = I$ , các điều kiện (4.6a) và (4.6b) trong Định lý 4.1 thỏa mãn với  $\epsilon_1 = 1.2473, \epsilon_2 = 1.2503$ , và

$$P = \begin{bmatrix} 0.3364 & -0.0366 \\ -0.0366 & 0.3190 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -0.0717 & -0.0790 \end{bmatrix}.$$

Theo Định lý 4.1, hệ đóng của hệ đang xét ổn định trong thời gian hữu hạn với bộ  $(1, 2, 1, I, 0.1)$  và giá trị đảm bảo chi phí là  $J^* = 0.5694$ . Hơn nữa, bộ đảm bảo chi phí điều khiển tìm được là

$$u(t) = \begin{bmatrix} -0.2430 & -0.2755 \end{bmatrix} x(t), t \in [0, 1].$$

**Ví dụ 4.2.** Trong hệ (4.30) với đầu ra  $y(t) \equiv 0$ , chúng tôi xét mạng nơ ron có  $n = 3$  nơ ron,  $\alpha = 0.96$ ,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T \in \mathbb{R}^3$  là trạng thái giả,  $f(x(t)) = (\sin(x_1(t)), \tanh(x_2(t)), \tanh(x_3(t)))^T \in \mathbb{R}^3$  là hàm kích hoạt,  $\omega(t) = 0.1 \cos t \in \mathbb{R}$  là nhiễu đầu vào,  $A = \text{diag}\{6, 2, 2\}$ , và

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.9 \end{bmatrix}.$$

Do đó, hệ (4.30) với đầu ra  $y(t) \equiv 0$  có thể viết lại là

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^{0.96} x_1(t) = -6x_1(t) + 3 \sin(x_1(t)) - 2 \tanh(x_2(t)) - 2 \tanh(x_3(t)) \\ \quad + 0.02 \cos t, \\ {}_0^C D_t^{0.96} x_2(t) = -2x_2(t) + \sin(x_1(t)) + \tanh(x_2(t)) + 0.05 \cos t, \\ {}_0^C D_t^{0.96} x_3(t) = -2x_3(t) + \sin(x_1(t)) + \tanh(x_3(t)) + 0.09 \cos t, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \quad (4.33)$$

trong đó  $t \geq 0$ .

Xét bài toán mạng nơ ron phân thứ Caputo trong thời gian hữu hạn bị chặn (4.33). Các giả thiết **H1**, **H2** thỏa mãn với  $L = \text{diag}\{1, 1, 1\}$ ,  $d = 0.01$ . Chọn  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 3.7$ ,  $T_f = 10$  và ma trận  $R = I$ . Sử dụng Hệ quả 4.1, ta có các điều kiện (4.31a), (4.31b) thỏa mãn với  $\theta = 0.8763$ ,  $\epsilon = 1.0818$  và

$$P = \begin{bmatrix} 0.1692 & -0.0033 & -0.0035 \\ -0.0033 & 0.4879 & -0.0249 \\ -0.0035 & -0.0249 & 0.4790 \end{bmatrix}.$$

Vậy, hệ (4.33) là ổn định tương ứng với bộ  $(1, 3.7, 10, I, 0.01)$ .

## 4.4 Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã thu được hai kết quả định tính cho nghiệm của bài toán cân bằng thông qua bài toán bất đẳng thức biến phân bằng cách tiếp cận ổn định cho nghiệm của mạng nơ ron phân thứ.



## Kết luận chung

Đề tài đã thu được các kết quả sau:

1) Đề xuất được một thuật toán chiếu kết hợp phép lặp Mann-Krasnoselskii giải bài toán cân bằng. Thuật toán này là sự mở rộng thuật toán chiếu của [43] cho bài toán cân bằng. Chúng tôi thu được sự hội tụ mạnh cho thuật toán. Ngoài ra, một ví dụ mô hình sản xuất điện được tính toán thử nghiệm bằng chương trình MATLAB minh họa cho thuật toán mà chúng tôi đưa ra.

2) Đề xuất một thuật toán dưới đạo hàm giải bài toán chấp nhận tách phi tuyến và ứng dụng cho mô hình cân bằng Nash có ràng buộc. Đóng góp của chúng tôi là xét toán tử của bài toán chấp nhận tách là phi tuyến, cụ thể là chúng tôi mở rộng cho trường hợp toán tử tựa tuyến tính. Chúng tôi áp dụng thuật toán này giải bài toán cân bằng Nash có ràng buộc và so sánh thuật toán của chúng tôi với thuật toán trong [44], kết quả tính toán cho thấy thuật toán của chúng tôi hội tụ tới nghiệm nhanh hơn.

3) Thu được một số tính chất định tính của mạng nơ ron phân thứ.

Để phát triển tiếp nghiên cứu của đề tài này, chúng tôi hy vọng sẽ nghiên cứu được thuật toán mới giải bài toán chấp nhận tách phi tuyến và áp dụng cho mô hình cân bằng có ràng buộc, trong trường hợp toán tử của bài toán chấp nhận tách là phi tuyến tổng quát. Đồng thời chúng tôi mong muốn chứng minh được sự hội tụ của nó.

## Danh sách các công trình của tác giả liên quan đến đề tài

- (1). Le Hai Yen, Le Dung Muu, Nguyen Thi Thanh Huyen (2016), "An Algorithm for a Class of Split Feasibility Problems: Application to a Model in Electricity Production", *Mathematical Methods of Operations Research*, 84, pp. 549-565. (SCIE)
- (2). Mai Viet Thuan, Dinh Cong Huong, Duong Thi Hong (2018), "New results on robust finite-time passivity for fractional-order neural networks with uncertainties", *Neural Processing Letters*, DOI 10.1007/s11063-018-9902-9. (SCIE)
- (3). Mai Viet Thuan, Tran Nguyen Binh, Dinh Cong Huong (2018), "Finite-time guaranteed cost control of caputo fractional-order neural networks", *Asian Journal of Control*, DOI: 10.1002/asjc.1927. pp. 1-10. (SCIE)

# Tài liệu tham khảo

## Tiếng Việt

- [1] Lê Dũng Mưu và Nguyễn Văn Hiền (2009), *Nhập môn Giải tích lồi ứng dụng*, Nhà xuất bản Khoa học tự nhiên và Công nghệ.

## Tiếng Anh

- [2] Blum E., Oettli W. (1994), "From optimization and variational inequality to equilibrium problems", *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 63, pp. 127-149.
- [3] Aussel D., Bendottib P. and Pišteek M. (2017), "Nash equilibrium in a pay-as-bid electricity market Part 2 - best response of a producer", *Optimization*, 66, pp. 1027-1053.
- [4] Avriel M. (1976), *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*, Prentice-Hall Englewood Cliffs.
- [5] Bauschke H. H., Combettes P. L. (2010), *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer.
- [6] Bertsekas D. (2003), *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientific Belmont, Massachusetts.
- [7] Bertsekas D. P. (1989), *Parallel and distributed computation: numerical methods*, Prentice-Hall, Upper Saddle River.

- [8] Boroomand A. and Menhaj M. B. (2008), "Fractional-order Hopfield neural networks, in: International Conference on Neural Information Processing", *Springer, Berlin, Heidelberg*, pp. 883-890.
- [9] Boyd S., Ghaoui L. E., Feron E., Balakrishnan V. (1994) *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia.
- [10] Byrne C. (2002), "Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problems", *Inverse Problems*, 18, pp. 441-453.
- [11] Censor Y., Elfving T. (1994), "A multiprojections algorithm using Bregman projections in a product spaces", *Numerical Algorithms*, 8, pp. 221-239.
- [12] Censor Y., Gibali A., Reich S. (2012), "Algorithms for the split variational inequality problem", *Numerical Algorithms*, 59, pp. 301-323.
- [13] Cheng L., Hou Z., Tan M. (2008), "A neutral-type delayed projection neural network for solving nonlinear variational inequalities", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, II(55), pp. 806-810.
- [14] Cheng L., Hou Z., Tan M. (2009), "Solving linear variational inequalities by projection neural network with time-varying delays", *Physics Letters A*, 373, pp. 1739-1743.
- [15] Cheng L., Hou Z., Tan M. (2009), "A delayed projection neural network for solving linear variational inequalities", *IEEE Transactions on Neural Networks*, 20, pp. 915-925.
- [16] Clarke F. H. (1983), *Optimization and Nonsmooth Analysis*, SIAM.
- [17] Cohen G. (1988), "Auxiliary principle extended to variational inequalities", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 59, pp. 325-333.

- [18] Contreras J., Klusch M., Krawczyk J. B. (2004), "Numerical solution to Nash-Cournot equilibria in coupled constraint electricity markets", *IEEE Transactions on Power Systems*, 19, pp. 195-206.
- [19] Deepho J., Kumam W., Kumam P. (2014), "A new Hybrid Projection Algorithm for Solving the Split Generalized Equilibrium Problems and the System of Variational Inequality Problems", *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 13, pp. 405–423.
- [20] Dragomir S. S., Pearce C. E. M. (2012), "Jensen's inequality for quasi-convex functions", *Numerical Algebra Control and Optimization*, 2(2), pp. 279-291.
- [21] Facchinei F., Pang J. S. (2003), *Finite dimensional variational inequalities and complementarity problems*, Springer, New York.
- [22] Fan K. (1972), "A minimax inequality and applications, in: Shisha, O. (ed.) Inequality III", *Academic Press, New York*, pp. 103-113.
- [23] Finetti D., Sulle B. (1949), "Stratificazioni Conversse", *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 30, pp. 173-183.
- [24] Giorgi G. (2014), "A simple way to prove the characterization of differentiable quasiconvex functions", *Applied Mathematics*, 5, pp. 1226-1238.
- [25] Gorbachuk V.M. (2010), "Cournot-Nash and Bertrand-Nash equilibria for heterogeneous duopoly of differentiated products", *Cyber Systems Analysis*, 46, pp. 25-26.
- [26] Iusem A. N. (1998), "On some properties of paramonotone operator", *Convex Analysis*, 5, pp. 269-278.

- [27] Jing-Yuan W., Smeers Y. (1999), "Spatial oligopolistic electricity models with Cournot generators and regulated transmission prices", *Operations Research*, 47, pp. 102-112.
- [28] Kennedy M. P., Chua L. O. (1988), "Neural networks for nonlinear programming", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, II(35), pp. 554-562.
- [29] Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. (2006), *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, Elsevier, New York.
- [30] Kiwiel K. C. (2001), "Convergence and efficiency of subgradient methods for quasiconvex minimization", *Mathematical Programming*, 90, pp. 1-25.
- [31] Konnov I. V. (2000), *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Springer, Berlin.
- [32] Krawczyk J. B., Uryasev S. (2000), "Relaxation algorithms to find Nash equilibria with economic applications", *Environmental Modeling and Assessment*, 5, pp. 63-73.
- [33] Liu Q., Cao J., Xia Y. (2005), "A delayed neural network for solving linear projection equations and its analysis", *IEEE Transactions on Neural Networks*, 16, pp. 834-843.
- [34] Dinh The Luc (1993), "Characterisations of quasiconvex functions", *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 48, pp. 393-406.
- [35] Mathiyalagan K., Park J. H., Sakthivel R. (2016), " Novel results on robust finite-time passivity for discrete-time delayed neural networks", *Neurocomputing*, 177, pp. 585-593.

- [36] Matroeni G. (2004), "Gap function for equilibrium problems", *Journal of Global Optimization* 27, pp. 411-426.
- [37] Moudafi A., Thakur B. S. (2014), "Solving proximal split feasibility problems without prior knowledge of operator norms", *Optimization Letters*, 8, pp. 2099-2110.
- [38] Le Dung Muu, Oetli W. (1992), "Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constraint equilibria", *Theory, Methods and Applications*, 18, pp. 1159-1166.
- [39] Nikaido H., Isoda K. (1955), "Note on noncooperative convex games", *Pacific Journal of Mathematics*, 5, pp. 807-815.
- [40] Tran Dinh Quoc, Le Dung Muu (2012), "Iterative methods for solving monotone equilibrium problems via dual gap functions", *Computational Optimization and Applications*, 51, pp. 709-728.
- [41] Rockafellar R. T., Wets Roger J. B. (1998), *Variational Analysis*, Springer.
- [42] Rockafellar R. T. (1976), "Monotone operators and the proximal point algorithm", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14 , pp. 877-898.
- [43] Santos P., Scheimberg S. (2011), "An inexact subgradient algorithm for Equilibrium problems", *Computational and Applied Mathematics.*, 30, pp. 91-107.
- [44] Santos P., Scheimberg S. (2017), "A modified projection algorithm for constrained equilibrium problems", *Optimization*, 66(12), pp. 2051-2062.

- [45] Shehu Y., Ogbuisi F. U. (2015), "Convergence analysis for proximal split feasibility problems and fixed point problems", *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 48, pp. 221-239.
- [46] Xu H. K. (2011), "Averaged Mappings and the Gradient-Projection Algorithm", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 150, pp. 360-378.
- [47] Phan Tu Vuong, Strodiot J. J., Nguyen Van Hien (2015), "A gradient projection method for solving split equality and split feasibility problems in Hilbert spaces", *Optimization*, 64, pp. 2321-2341.
- [48] Wu Z. B, Zou Y.Z. (2014), "Global fraction-order projective dynamical systems", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19 , pp. 2811-2819.
- [49] Wu Z. B., Zou Y. Z, Huang N. J. (2016), "A system of fractional-order interval projection neural networks", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 294, pp. 389-402.
- [50] Wu Z. B, Li J. D., Huang N. J. (2018), "A new system of global fractional-order interval implicit projection neural networks", *Neurocomputing*, 282, pp. 111-121.
- [51] Wu Z. B, Zou Y. Z, Huang N. J. (2016), "A class of global fractional-order projective dynamical systems involving set-valued perturbations", *Applied Mathematics and Computation*, 277, pp. 23-33.
- [52] Zhang H., Huang B., Gong D., Wang Z. (2013), " New results for neutral-type delayed projection neural network to solve linear variational inequalities", *Neural Computing and Applications*, 23(6), pp. 1753-1761.



- [53] Yang Y., Cao J. (2006), "Solving quadratic programming problems by delayed projection neural network", *IEEE Transactions on Neural Networks* 17, pp. 1630-1634.
- [54] Le Hai Yen, Nguyen Thi Thanh Huyen, Le Dung Muu (2018), "A subgradient algorithm for a class of nonlinear split feasibility problems: application to jointly constrained Nash equilibrium models", *Journal of Global Optimization*, minor revision.