

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**BÁO CÁO TỔNG KẾT  
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ**

**MỘT SỐ VẤN ĐỀ CHỌN LỌC VỀ HỆ PHƯƠNG  
TRÌNH VI PHÂN VÀ ĐIỀU KHIỂN CÓ TRỄ**

**Mã số: B2017-TNA-54**

**Chủ nhiệm đề tài: TS. Mai Viết Thuận**

**Thái Nguyên – 2018**

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**BÁO CÁO TỔNG KẾT  
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ**

**MỘT SỐ VẤN ĐỀ CHỌN LỌC VỀ HỆ PHƯƠNG  
TRÌNH VI PHÂN VÀ ĐIỀU KHIỂN CÓ TRỄ**

**Mã số: B2017-TNA-54**

**Xác nhận của tổ chức chủ trì**  
*(ký, họ tên, đóng dấu)*

**Chủ nhiệm đề tài**  
*(ký, họ tên)*

**Mai Viết Thuận**

**Thái Nguyên – 2018**

## Danh sách các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài và đơn vị phối hợp chính

### 1. Danh sách các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao
1	TS. Mai Viết Thuận	Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Giải tích	Chủ nhiệm đề tài; Nghiên cứu biên của tập đạt được cho lớp hệ tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên
2	ThS. Nguyễn Thị Thanh Huyền	Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Giải tích	Thành viên nghiên cứu chính; Thư ký khoa học; Nghiên cứu biên của tập đạt được cho lớp hệ nơ ron thần kinh tổng quát có trễ biến thiên
3	ThS. Trần Nguyễn Bình	Trường Đại học kinh tế và quản trị kinh doanh; Toán Ứng dụng	Thành viên nghiên cứu chính của đề tài; Nghiên cứu tính thụ động của lớp hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên
4	TS. Trần Xuân Quý	Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Ứng dụng	Thành viên nghiên cứu chính của đề tài; Nghiên cứu biên của tập đạt được cho lớp hệ chuyển mạch nơ ron thần kinh có trễ hỗn hợp.
5	TS. Nguyễn Thị Ngọc Oanh	Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Ứng dụng	Thành viên nghiên cứu của đề tài; Lập trình giải các ví dụ số bằng phần mềm MATLAB.

**2. Đơn vị phối hợp chính**

<b>Tên đơn vị trong và ngoài nước</b>	<b>Nội dung phối hợp nghiên cứu</b>	<b>Họ và tên người đại diện đơn vị</b>
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam	Tư vấn, định hướng nghiên cứu	GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát
Trường Đại học tổng hợp Deakin, Australia	Viết chung công trình nghiên cứu	GS. Hiếu Trịnh

## Mục lục

Danh sách các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài và đơn vị phối hợp chính	i
Một số ký hiệu và viết tắt	v
Mở đầu	1
<b>Chương 1 Bài toán tìm bao của tập đạt được cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ</b>	<b>5</b>
1.1. Một số bổ đề bổ trợ . . . . .	5
1.2. Bài toán tìm bao của tập đạt được của lớp hệ tuyến tính chuyển mạch có trễ . . . . .	6
1.3. Bài toán tìm bao của tập đạt được của mạng nơ ron tổng quát có trễ . . . . .	23
1.4. Bài toán tìm bao của tập đạt được của mạng nơ ron chuyển mạch có trễ hỗn hợp . . . . .	37
<b>Chương 2 Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của lớp hệ tuyến tính dương đa trễ</b>	<b>56</b>
2.1. Phát biểu bài toán và một số kiến thức chuẩn bị . . . . .	56
2.2. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của lớp hệ tuyến tính dương đa trễ . . . . .	57
<b>Chương 3 Tính ổn định mũ và tính thụ động của lớp hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên</b>	<b>67</b>
3.1. Phát biểu bài toán . . . . .	67
3.2. Tính ổn định mũ của lớp hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên . . . . .	68
3.3. Tính thụ động của lớp hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên	82
<b>Chương 4 Tính ổn định hóa của lớp hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo có nhiễu phi tuyến</b>	<b>86</b>
4.1. Một số kiến thức về giải tích phân thứ . . . . .	86

4.2. Một số tiêu chuẩn ổn định hóa của lớp hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo có nhiễu phi tuyến . . . . .	91
4.3. Ví dụ số . . . . .	97
<b>Kết luận</b>	<b>101</b>

## Một số ký hiệu và viết tắt

$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide $n$ chiều
$\mathbb{R}^{m \times n}$	không gian các ma trận cấp $m \times n$
$\mathbb{R}_+^n$	$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$
$\mathbb{S}_+^n$	tập các ma trận thực vuông cấp $n$ , đối xứng, xác định dương
$\mathbb{D}_n^+$	tập các ma trận thực đường chéo chính dương cấp $n$
$A = [A]_{ij}$	phần tử nằm ở hàng $i$ và cột $j$ của ma trận $A$
$A \succeq 0$	các phần tử của ma trận $A$ đều lớn hơn hoặc bằng 0
$A > 0$	ma trận $A$ xác định dương
$L < 0$	ma trận $L$ xác định âm
*	phần tử đối xứng của một khối ma trận
$I$	ma trận đơn vị
$C([a, b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
${}_{t_0}I_t^\alpha$	toán tử tích phân phân thứ Riemann - Liouville cấp $\alpha$
${}^{RL}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Riemann - Liouville cấp $\alpha$
${}^C D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Caputo cấp $\alpha$

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

**1. Thông tin chung**

**Tên đề tài:** Một số vấn đề chọn lọc về hệ phương trình vi phân và điều khiển có trễ

**Mã số:** B2017-TNA-54

**Chủ nhiệm đề tài:** TS. Mai Viết Thuận

Email: thuanmv@tnus.edu.vn

Điện thoại: 0396661128

**Cơ quan chủ trì:** Đại học Thái Nguyên

Thời gian thực hiện: 2017-2018

**2. Mục tiêu**

- Đưa một số tiêu chuẩn cho bài toán nghiên cứu bao của tập đạt được cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ như lớp hệ chuyển mạch có trễ biến thiên, lớp hệ nơ ron thần kinh tổng quát có trễ, lớp hệ nơ ron thần kinh chuyển mạch có trễ hỗn hợp.

- Đưa ra một số tiêu chuẩn cho tính ổn định hữu hạn, tính thụ động cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ như lớp hệ nơ ron thần kinh có trễ tổng quát, lớp hệ chuyển mạch có trễ, lớp hệ dương có trễ.

**3. Tính mới và tính sáng tạo**

Các kết quả nghiên cứu của đề tài được công bố trên các tạp chí quốc tế uy tín (nằm trong danh sách ISI của Clarivate Analytics). Điều này đảm bảo tính mới và tính sáng tạo của đề tài.

**4. Kết quả nghiên cứu**

- Đề tài đã nghiên cứu bao của tập đạt được cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ;

- Đề tài đã nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của lớp hệ tuyến tính dương đa trễ;

- Đề tài đã nghiên cứu tính ổn định mũ và tính thụ động cho lớp hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên;

- Đề tài nghiên cứu tính ổn định hóa của một lớp hệ phi tuyến phân thứ Caputo.

**5. Sản phẩm**

**5.1. Sản phẩm khoa học**

1. Huong D.C., Thuan M.V. (2017), “State transformations of time-varying delay systems and their applications to state observer design”, *Discrete and Continu-*



- ous Dynamical Systems - Series S*, 10(3), pp. 413–444 (SCIE, Q2)
2. Thuan M.V., Thu N.T.H. (2017), “New results on reachable sets bounding for switched neural networks systems with discrete, distributed delays and bounded disturbances”, *Neural Processing Letters*, 46(1), pp. 355–378 (SCIE, Q2)
  3. Thuan M.V., Trinh H., Huong D.C. (2018), “Reachable sets bounding for switched systems with time-varying delay and bounded disturbances”, *International Journal of Systems Science*, 48(3), pp. 494–504 (SCIE, Q1)
  4. Thuan M.V., Tran H.M, Trinh H. (2018), “Reachable sets bounding for generalized neural networks with interval time-varying delay and bounded disturbances”, *Neural Computing and Applications*, 29(10), pp. 783–794 (SCIE, Q1)
  5. Thuan M.V. (2018), “Robust finite-time guaranteed cost control for positive systems with multiple time delays”, *Journal of Systems Science and Complexity*, 31, pp. 1–14 (SCIE, Q2)
  6. Thuan M.V., Huong D.C. (2018), “New results on stabilization of fractional-order nonlinear systems via an LMI approach”, *Asian Journal of Control*, 20(4), pp. 1541–1550 (SCIE, Q2).
  7. Thuan M.V., Huong D.C. (2018), “New results on exponential stability and passivity analysis of delayed switched systems with nonlinear perturbations”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 37(2), pp. 569–592 (SCIE, Q2).

### **Sản phẩm đào tạo**

#### **- Hướng dẫn 05 luận văn cao học:**

1. Nguyễn Thị Cúc (2017), *Về tính ổn định hữu hạn cho lớp hệ động lực dương*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
2. Nguyễn Thị Thúy (2017), *Về tính ổn định hóa cho lớp hệ tuyến tính dương với điều khiển có hạn chế*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
3. Nguyễn Quang Huân (2017), *Về tính ổn định hữu hạn thời gian đầu vào - đầu ra cho lớp hệ phương trình vi phân phân thứ*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
4. Nguyễn Văn Cường (2018), *Về tính ổn định của một số lớp hệ nơ ron thần kinh phân thứ*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
5. Nguyễn Đình Sự (2018), *Tính ổn định hóa của một số lớp hệ dương phân thứ*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

### **6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại**

- Về khoa học: Công bố được một số kết quả mới, có ý nghĩa khoa học trên các tạp chí quốc tế có uy tín ISI (thuộc chủ đề nghiên cứu của đề tài).
- Về giáo dục và đào tạo: Hướng dẫn thạc sĩ, phục vụ hiệu quả cho công tác giảng

dạy sau đại học các chuyên ngành về Toán tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên.

- Góp phần nâng cao năng lực nghiên cứu các thành viên trong nhóm thực hiện đề tài, mở rộng hợp tác nghiên cứu.

**Tổ chức chủ trì**  
*(ký, họ tên, đóng dấu)*

**Chủ nhiệm đề tài**  
*(ký, họ tên)*

**Mai Viết Thuận**

## INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

### 1. General Information

**Project title:** Selected problems on differential equations and control system with delays

**Code number:** B2017-TNA-54

Coordinator: Dr. Mai Viet Thuan

Email: thuanmv@tnus.edu.vn

Phone: 0396661128

Implementing institution: Thai Nguyen University

Duration: From 1/2017 to 12/2018

### 2. Objectives

- Study the problem of reachable sets bounding for some classes of differential equation systems with time delays such as switched systems with time-varying delay, generalized neural networks with time-varying delays and switched neural networks systems with mixed time delays;
- Study the problems of finite-time stability, passivity analysis for some classes of differential equation systems with time delays such as generalized neural networks with time-varying delays, switched systems with time-varying delay and positive systems with time delays.

### 3. Novelty and creativity

The results of the study are published in qualified international scientific journals.

### 4. Research results

- The project studied the problem of reachable sets bounding for some classes of differential equation systems with time delays;
- The project studied the problem of finite-time guaranteed cost control for positive systems with multiple time delays;
- The project studied exponential stability and passivity analysis of delayed switched systems with nonlinear perturbations;
- The project studied the problem of stabilization of fractional-order nonlinear systems.

### 5. Products

#### 5.1. Scientific publications

1. Huong D.C., Thuan M.V. (2017) “State transformations of time-varying delay systems and their applications to state observer design”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, 10(3), pp. 413–444 (SCIE, Q2)
2. Thuan M.V., Thu N.T.H. (2017), “New results on reachable sets bounding for

- switched neural networks systems with discrete, distributed delays and bounded disturbances”, *Neural Processing Letters*, 46(1), pp. 355–378 (SCIE, Q2)
3. Thuan M.V., Trinh H., Huong D.C. (2018), “Reachable sets bounding for switched systems with time-varying delay and bounded disturbances”, *International Journal of Systems Science*, 48(3), pp. 494–504 (SCIE, Q1)
  4. Thuan M.V., Tran H.M, Trinh H. (2018), “Reachable sets bounding for generalized neural networks with interval time-varying delay and bounded disturbances”, *Neural Computing and Applications*, 29(10), pp. 783–794 (SCIE, Q1)
  5. Thuan M.V. (2018), “Robust finite-time guaranteed cost control for positive systems with multiple time delays”, *Journal of Systems Science and Complexity*, 31, pp. 1–14 (SCIE, Q2)
  6. Thuan M.V., Huong D.C. (2018), “New results on stabilization of fractional-order nonlinear systems via an LMI approach”, *Asian Journal of Control*, 20(4), pp. 1541–1550 (SCIE, Q2).
  7. Thuan M.V., Huong D.C. (2018), “New results on exponential stability and passivity analysis of delayed switched systems with nonlinear perturbations”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 37(2), pp. 569–592 (SCIE, Q2).

**Training results:** 05 master of theses

1. Nguyen Thi Cuc (2017), *On finite-time stability analysis of positive dynamical systems*, Thai Nguyen University of Sciences.
2. Nguyen Thi Thuy (2017), *On stabilization of linear positive systems with bounded controls*, Thai Nguyen University of Sciences.
3. Nguyen Quang Huan (2017), *On input-output finite time stability of fractional order systems*, Thai Nguyen University of Sciences.
4. Nguyen Van Cuong (2018), *On stability analysis of fractional-order neural networks systems*, Thai Nguyen University of Sciences.
5. Nguyen Dinh Su (2018), *Stabilization of fractional order positive systems*, Thai Nguyen University of Sciences.

## **6. Applications and effectiveness**

- On the scientific aspect: Publishing some scientific results in ISI journals of mathematics (in the research topic of the project).
- On educational aspect: Instructing 04 master theses, teaching undergraduate students and graduate students in mathematics at Thai Nguyen University of Sciences.
- Strengthening the research capacity for the investigators of the projects, deepening the cooperation in scientific research with domestic and international research institution.

## Mở đầu

Trong những năm gần đây, hệ phương trình vi phân và điều khiển có trễ đã nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trên thế giới (xem [11, 19, 24] và các tài liệu tham khảo trong đó). Trong đó, tính ổn định theo nghĩa Lyapunov [11, 19, 24], tính ổn định hữu hạn [1, 49], tính thụ động (passivity analysis) [12] là những tính chất định tính quan trọng của hệ phương trình vi phân và điều khiển có trễ. Do đó những tính chất này nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học. Ngoài ra, bài toán nghiên cứu bao của tập đạt được cho hệ phương trình vi phân có trễ cũng nhận được sự quan tâm nghiên cứu của đông đảo các nhà khoa học trong những năm gần đây (xem [13, 10, 28, 47, 48, 58, 60, 80] và các tài liệu tham khảo trong đó).

Bài toán nghiên cứu bao của tập đạt được cho hệ phương trình vi phân có trễ được nghiên cứu đầu tiên vào năm 2003 bởi Fridman E. [13] cho lớp hệ tuyến tính có trễ. Sau đó, bài toán này được nhiều nhà khoa học nghiên cứu và mở rộng cho nhiều lớp hệ động lực có trễ khác nhau, chẳng hạn như hệ tuyến tính có trễ [47], lớp hệ có trễ dạng tích phân [80], lớp hệ trung tính có trễ [58], lớp hệ phi tuyến có trễ [48], lớp hệ sai phân có trễ [28, 60], lớp hệ phương trình vi phân đại số có trễ [10], mạng nơ ron có trễ [81]. Tuy nhiên, theo như sự hiểu biết của chúng tôi, bài toán nghiên cứu bao của tập đạt được cho lớp hệ chuyển mạch có trễ biến thiên, bài toán nghiên cứu bao của tập đạt được cho mạng nơ ron tổng quát có trễ biến thiên dạng khoảng vẫn chưa được nghiên cứu một cách đầy đủ. Bằng cách tiếp cận sử dụng phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii, trong đó có sử dụng một số bất đẳng thức tích phân mới được đề xuất trong [53], trong Chương 1 của đề tài, chúng tôi nghiên cứu bài toán tìm bao của tập đạt được cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ. Đó là lớp hệ phương trình vi phân tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên, mạng nơ ron tổng quát có trễ biến thiên và mạng nơ ron chuyển mạch có trễ hỗn hợp biến thiên. Các kết quả trình bày trong Chương 1 được viết dựa trên ba bài báo khoa học của chủ nhiệm đề tài và đồng nghiệp (xem [64, 65, 66]).

Khái niệm ổn định hữu hạn thời gian (FTS) được nghiên cứu đầu tiên trong [8, 70] đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết ổn định các hệ động lực. Khác với bài toán ổn định theo nghĩa Lyapunov, nghiên cứu dáng điệu của véc tơ trạng thái của hệ phương trình vi phân có trễ trên một khoảng thời gian vô

hạn, khái niệm ổn định hữu hạn thời gian nghiên cứu đáng điều của véc tơ trạng thái trong một khoảng thời gian hữu hạn. Cụ thể hơn một hệ phương trình vi phân có trễ được gọi là FTS nếu khi ta đưa ra một giới hạn cho điều kiện ban đầu, véc tơ trạng thái của hệ không vượt ra khỏi ngưỡng đã giới hạn trong suốt khoảng thời gian đã cho. Mặt khác, trong các bài toán kỹ thuật, ngoài việc tìm cách thiết kế một bộ điều khiển làm cho hệ thống không những ổn định hữu hạn thời gian mà còn đảm bảo một mức độ đầy đủ về hiệu suất (guarantees an adequate level of performance). Bài toán này được gọi là bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của hệ động lực. Nội dung cơ bản của bài toán này là ngoài việc thiết kế một bộ điều khiển để đảm bảo cho hệ thống điều khiển là ổn định hữu hạn thời gian, ta còn phải dựa trên điều khiển đó tìm một cận trên của hàm mục tiêu (hàm chi phí) tương ứng. Bằng cách tiếp cận sử dụng phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii kết hợp với bất đẳng thức ma trận tuyến tính, các tác giả trong [50] nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của lớp hệ tuyến tính có trễ biến thiên với điều khiển bị chặn. Một vài tiêu chuẩn cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của mạng nơ ron có trễ biến thiên được nghiên cứu trong [49]. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của lớp hệ ngẫu nhiên Itô được nghiên cứu trong [73, 74]. Theo như hiểu biết của chúng tôi có rất ít công trình nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ dương có trễ. Trong [3], các tác giả giải bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ tuyến tính dương chuyển mạch có trễ biến thiên bằng cách sử dụng phương pháp tiếp cận thời gian trung bình phụ thuộc tham số. Chú ý rằng, kết quả trong [3] thu được bằng cách sử dụng định nghĩa ổn định hữu hạn tương ứng với hệ dương chuyển mạch. Khái niệm này khác với khái niệm ổn định hữu hạn thời gian (FTS) được đưa ra trong [8, 70]. Vì vậy, việc nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ dương đa trễ sử dụng định nghĩa phổ biến đưa ra trong [8, 70] là một vấn đề mở, cần được quan tâm nghiên cứu. Trong Chương 2 của đề tài, chúng tôi tập trung giải bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ dương đa trễ bằng cách tiếp cận sử dụng bất đẳng thức ma trận tuyến tính với cách chọn hàm Lyapunov–Krasovskii phù hợp.

Bài toán nghiên cứu tính thụ động và tính thụ động hóa cho hệ phương trình vi phân và điều khiển tuyến tính có trễ được nghiên cứu đầu tiên bởi các nghiên cứu của Fridman E. và Shaked U. [12], Niculescu S.I. và Lozano R. [51]. Sau đó, bài toán nghiên cứu tính thụ động và thụ động hóa được các nhà khoa học nghiên cứu cho nhiều lớp hệ phương trình vi phân có trễ khác nhau như mạng

nơ ron có trễ (xem [27, 30, 32] và các tài liệu tham khảo trong đó), hệ phương trình vi phân mờ có trễ [31], hệ phương trình vi phân đại số có trễ [34]. Đối với lớp hệ chuyển mạch, đã có một số kết quả thú vị được công bố cho bài toán nghiên cứu tính thụ động và thụ động hóa cho lớp hệ phương trình vi phân chuyển mạch không có trễ (xem [15, 79]). Tuy nhiên, theo như hiểu biết của chúng tôi, bài toán nghiên cứu tính thụ động cho lớp hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên vẫn chưa có một kết quả nào được công bố. Bằng cách sử dụng một vài bất đẳng thức tích phân mới được đề xuất trong [53], kết hợp kỹ thuật tổ hợp lỗi trong [52] khi ước lượng đạo hàm của hàm Lyapunov-Krasovskii và sử dụng cách tiếp cận thời gian dừng trung bình (the average dwell time), trong Chương 3 của đề tài chúng tôi nghiên cứu bài toán nghiên cứu tính thụ động và tính ổn định mũ cho lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên.

Trong những năm gần đây, giải tích phân thứ và hệ phương trình vi phân phân thứ đã nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học do những ứng dụng của chúng trên nhiều lĩnh vực của khoa học kỹ thuật. Nhiều hệ thống trong kỹ thuật, chẳng hạn như hệ thống viscoelastic, sự phân cực điện môi (dielectric polarization), sự phân cực điện cực (the electrode-electrolyte polarization), mô hình mạng nơ ron, được mô tả tốt hơn và chi tiết hơn bởi hệ phương trình vi phân phân thứ. Như chúng ta đã biết tính ổn định là một tính chất quan trọng của mọi hệ động lực. Do đó bài toán nghiên cứu tính ổn định, ổn định hóa theo nghĩa Lyapunov của hệ phương trình vi phân phân thứ đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học. Trong những năm gần đây, bài toán nghiên cứu tính ổn định hóa của hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo phi tuyến nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu và đã có nhiều kết quả thú vị về bài toán này được công bố trên các tạp chí quốc tế uy tín (xem [4, 5, 29, 69, 75]). Tuy nhiên, các kết quả trong [4, 5, 29, 69, 75] chỉ nghiên cứu tính ổn định hóa được địa phương của điểm cân bằng gốc 0 của hệ bởi vì thành phần phi tuyến trong các kết quả trên thỏa mãn điều kiện  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(x(t))\|}{\|x(t)\|} = 0$ . Vì vậy, việc tìm ra các tiêu chuẩn mới cho tính ổn định hóa được toàn cục của hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo phi tuyến là cần thiết và có ý nghĩa khoa học. Trong Chương 4 của đề tài, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định hóa của lớp hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo có nhiều phi tuyến bằng cách tiếp cận sử dụng bất đẳng thức ma trận tuyến tính và phương pháp hàm Lyapunov cho hệ phân thứ.

Nội dung chính của đề tài được chia làm bốn chương:

**Chương 1. Bài toán tìm bao của tập đạt được cho một số lớp hệ**

### **phương trình vi phân có trễ**

Trong chương này, chúng tôi trình bày khái niệm tập đạt được tiến và tập đạt được lùi đối với một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ như lớp hệ tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên, mạng nơ ron tổng quát có trễ, mạng nơ ron chuyển mạch có trễ hỗn hợp biến thiên. Ngoài ra, chúng tôi trình bày một số tiêu chuẩn cho bài toán tìm bao của tập đạt được tiến và bao của tập đạt được lùi cho ba lớp hệ phương trình vi phân có trễ trên. Các ví dụ và hình vẽ minh họa cho các kết quả lý thuyết cũng được chúng tôi trình bày chi tiết và đầy đủ trong chương này.

### **Chương 2. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của lớp hệ tuyến tính dương đa trễ**

Chương này trình bày kết quả nghiên cứu của chủ nhiệm đề tài trong bài báo [61] về bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của lớp hệ tuyến tính dương đa trễ.

### **Chương 3. Tính ổn định mũ và tính thụ động của lớp hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên**

Chương này trình bày các kết quả của đề tài từ bài báo [62] về tính ổn định mũ và tính thụ động của lớp hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên với cách tiếp cận sử dụng phương pháp hàm Lyapunov–Krasovskii. Các ví dụ minh họa và so sánh kết quả của chúng tôi với các kết quả đã có cũng được chúng tôi trình bày chi tiết trong Chương 3 của đề tài.

### **Chương 4. Tính ổn định hóa của lớp hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo có nhiễu phi tuyến**

Trước tiên, trong chương này chúng tôi giới thiệu về giải tích phân thứ bao gồm tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp  $\alpha$ , đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp  $\alpha$ , đạo hàm phân thứ Caputo cấp  $\alpha$  với  $\alpha \in (0, 1)$ . Sau đó chúng tôi trình bày một vài tiêu chuẩn cho tính ổn định hóa của lớp hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo có nhiễu phi tuyến. Cuối chương là một vài ví dụ và hình vẽ để minh họa cho kết quả lý thuyết.



# Chương 1

## Bài toán tìm bao của tập đạt được cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán bao của tập đạt được cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ. Nội dung trình bày trong chương này dựa trên các bài báo [64, 65, 66].

### 1.1. Một số bổ đề bổ trợ

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số bổ đề bổ trợ được dùng để chứng minh các kết quả trong các mục sau.

**Bổ đề 1.1.** ([53]) Cho trước ma trận  $R \in \mathbb{S}_n^+$  và một hàm  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mà trong đó đạo hàm  $\dot{\varphi} \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ . Khi đó ta có bất đẳng thức sau đây

$$\int_a^b \dot{\varphi}^T(s) R \dot{\varphi}(s) ds \geq \frac{1}{b-a} \hat{\chi}^T \bar{R} \hat{\chi},$$

ở đó  $\bar{R} = \text{diag}\{R, 3R, 5R\}$ ,  $\hat{\chi} = [\chi_1^T \quad \chi_2^T \quad \chi_3^T]^T$ , và

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \varphi(b) - \varphi(a), \quad \chi_2 = \varphi(b) + \varphi(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \varphi(s) ds, \\ \chi_3 &= \varphi(b) - \varphi(a) + \frac{6}{b-a} \int_a^b \varphi(s) ds - \frac{12}{(b-a)^2} \int_a^b \int_s^b \varphi(u) du ds. \end{aligned}$$

**Bổ đề 1.2.** ([52]) Cho trước các ma trận đối xứng, xác định dương  $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Nếu tồn tại một ma trận  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sao cho

$$\begin{bmatrix} R_1 & X \\ * & R_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

thì bất đẳng thức sau đây

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\beta}R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\beta}R_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} R_1 & X \\ * & R_2 \end{bmatrix}$$

đúng với mọi  $\beta \in (0, 1)$ .

**Bổ đề 1.3.** ([67]) Cho trước một số dương  $\alpha$  và  $V(t)$  là hàm Lyapunov-Krasovskii cho hệ (1.1)–(1.4). Nếu  $\dot{V}(t) + \alpha V(t) - \frac{\alpha}{\omega^2} \omega^T(t) \omega(t) \leq 0, \forall t \geq 0$  thì

$$V(t) \leq \max\{1, V(0)\}, \quad \forall t \geq 0.$$

**Bổ đề 1.4.** (Bất đẳng thức Jensen [17]) Cho các ma trận  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}, R = R^T > 0$ , các số  $a, b$  với  $a < b$ , và véc tơ  $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sao cho các tích phân được đề cập đến là định nghĩa tốt. Khi đó

$$(b-a) \int_a^b \omega^T(s) R \omega(s) ds \geq \left( \int_a^b \omega(s) ds \right)^T R \left( \int_a^b \omega(s) ds \right).$$

## 1.2. Bài toán tìm bao của tập đạt được của lớp hệ tuyến tính chuyển mạch có trễ

Xét hệ tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên và nhiễu bị chặn

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + D_\sigma x(t - \tau(t)) + B_\sigma \omega(t), \\ x(s) \equiv \varphi(s), \quad s \in [-\tau_2, 0], \end{cases} \quad (1.1)$$

ở đó  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  là véc tơ trạng thái,  $\sigma(\cdot)$  là quy tắc chuyển mạch giữa các hệ con trong hệ (1.1), ở đây  $\sigma(\cdot)$  là một hàm phụ thuộc vào  $x(t)$ ,  $\sigma(\cdot)$  lấy giá trị trong tập hữu hạn  $\mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}$ ;  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}, i = 1, \dots, N$ , là các ma trận thực, hằng số cho trước có số chiều thích hợp sao cho các phép toán đại số về ma trận thực hiện được. Hàm trễ  $\tau(t)$  là hàm liên tục thỏa mãn

$$0 \leq \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2. \quad (1.2)$$

Hàm  $\varphi(s) \in C^1([-\tau_2, 0], \mathbb{R}^n)$  là điều kiện ban đầu thỏa mãn

$$\max_{s \in [-\tau_2, 0]} \dot{\varphi}^T(s) \dot{\varphi}(s) \leq \mu^2. \quad (1.3)$$

Véc tơ nhiễu  $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$ , không biết nhưng giả thiết thỏa mãn điều kiện dưới đây

$$\omega^T(t)\omega(t) \leq \omega^2, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.4)$$

ở đó  $\tau_1, \tau_2, \mu, \omega$  là các số không âm.

Trước khi trình bày các kết quả chính của mục này, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa và bổ đề được dùng để chứng minh các kết quả chính của chúng tôi.

**Định nghĩa 1.1.** (xem [67])

(i) Cho trước  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$  là một tập lồi đóng, bị chặn chứa điểm gốc 0. Một tập  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là tập đạt được tiến (forwards reachable set) tương ứng với tập ban đầu cho trước  $\Omega_0$  của hệ (1.1) với các điều kiện (1.2), (1.3) và (1.4) dưới quy tắc chuyển mạch  $\sigma(\cdot)$  nếu với mọi điều kiện ban đầu  $\varphi(s) \in \Omega_0, \forall s \in [-\tau_2, 0]$ , nghiệm của hệ thỏa mãn  $x(t, \varphi(t), \omega(t)) \in \Omega, \forall t \geq 0$ .

(ii) Cho trước  $\Lambda_0 \subset \mathbb{R}^n$  là một tập lồi đóng, bị chặn chứa điểm gốc 0. Tập  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là tập đạt được lùi (backwards reachable set) tương ứng với tập mục tiêu  $\Lambda_0$  của hệ (1.1) với các điều kiện (1.2), (1.3) và (1.4) dưới quy tắc chuyển mạch  $\sigma(\cdot)$  nếu với mọi hàm điều kiện ban đầu  $\varphi(s) \in \Lambda, \forall s \in [-\tau_2, 0]$ , nghiệm của hệ thỏa mãn  $x(t, \varphi(t), \omega(t)) \in \Lambda_0, \forall t \geq 0$ .

**Định nghĩa 1.2.** Hệ thống các ma trận  $\{L_i\}, i = 1, 2, \dots, N$ , được gọi là đầy đủ chặt (strictly complete) nếu với mọi véc tơ  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tồn tại một chỉ số  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  sao cho

$$x^T L_i x < 0.$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng hệ thống các ma trận  $\{L_i\}$  là đầy đủ chặt khi và chỉ khi

$$\bigcup_{i=1}^N S_i = \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

ở đó

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T L_i x < 0\}, i = 1, 2, \dots, N.$$

Trong [25, 68], các tác giả đã chỉ ra rằng hệ thống các ma trận  $\{L_i\}, i = 1, 2, \dots, N$ , là đầy đủ chặt nếu tồn tại các số  $\epsilon_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\sum_{i=1}^N \epsilon_i > 0$ , sao cho

$$\sum_{i=1}^N \epsilon_i L_i < 0.$$

Nếu  $N = 2$  thì các điều kiện trên trở thành điều kiện cần và đủ cho tính đầy đủ chặt của hệ ma trận tương ứng.

Trong mục này, chúng tôi trình bày một vài tiêu chuẩn cho bài toán tìm bao của tập đạt được cho lớp hệ tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên và nhiễu bị chặn (1.1).

Để thuận lợi cho việc trình bày các kết quả nghiên cứu trong mục này, ta ký hiệu

$$e_j = [0_{n \times (j-1)n} \quad I_n \quad 0_{n \times (11-j)n} \quad 0_{n \times m}]^T, \quad j = 1, 2, \dots, 11,$$

$$e_{12} = [0_{m \times 11n} \quad I_m]^T, \quad \tau_{12} = \tau_2 - \tau_1,$$

các véc tơ khối  $\chi_0(t) = [\chi_{01}^T(t) \quad \chi_{02}^T(t) \quad \chi_{03}^T(t)]^T$ , ở đó

$$\chi_{01}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \\ x(t - \tau(t)) \\ x(t - \tau_2) \end{bmatrix}, \quad \chi_{02}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} \int_{t-\tau_1}^t x(s) ds \\ \frac{1}{\tau(t)-\tau_1} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds \\ \frac{1}{\tau_2-\tau(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \\ \frac{2}{\tau_1^2} \int_{t-\tau_1}^t \int_s^t x(u) du ds \end{bmatrix},$$

$$\chi_{03}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(\tau(t)-\tau_1)^2} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \int_s^{t-\tau_1} x(u) du ds \\ \frac{2}{(\tau_2-\tau(t))^2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \int_s^{t-\tau(t)} x(u) du ds \\ \dot{x}(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix},$$

và ma trận

$$L_i(U_i) = U_i A_i + A_i^T U_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T L_i(U_i) x < 0\}, \quad \bar{S}_1 = S_1, \quad \bar{S}_i = S_i \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} \bar{S}_j \right), \quad i = 2, 3, \dots, N,$$

$$G_1 = [e_1^T \quad e_2^T \quad e_5^T \quad e_8^T]^T, \quad G_2 = [e_2^T \quad e_3^T \quad e_6^T \quad e_9^T]^T, \quad G_3 = [e_3^T \quad e_4^T \quad e_7^T \quad e_{10}^T]^T,$$

$$\bar{R}_1 = \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_1} R_1, 3e^{-\alpha\tau_1} R_1, 5e^{-\alpha\tau_1} R_1\},$$

$$\bar{R}_2 = \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_2} R_2, 3e^{-\alpha\tau_2} R_2, 5e^{-\alpha\tau_2} R_2\},$$

$$F = \begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0 & 0 \\ I_n & I_n & -2I_n & 0 \\ I_n & -I_n & 6I_n & -6I_n \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \text{col}\{FG_2, FG_3\}.$$

Định lý dưới đây đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại bao của tập đạt được tiến ứng với tập ellipsoid cho trước  $\Omega_0 = \{\varphi(s) \in C^1([- \tau_2, 0], \mathbb{R}^n) : \varphi^T(s) E \varphi(s) \leq 1, \forall s \in [- \tau_2, 0]\}$ , ở đó  $E$  là một ma trận đối xứng, xác định dương cho trước.

**Định lý 1.1.** *Giả sử rằng tồn tại bảy hằng số dương  $\alpha, \beta_0, \beta_1, q_1, q_2, r_1, r_2$ , năm ma trận  $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ , các ma trận  $U_i, W_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $i = 1, \dots, N$ ), một*

ma trận  $X \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) Hệ thống ma trận  $\{L_i(U_i)\}$ ,  $(i = 1, 2, \dots, N)$  là đầy đủ chặt, tức là tồn tại các số  $\epsilon_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\sum_{i=1}^N \epsilon_i > 0$  sao cho

$$\sum_{i=1}^N \epsilon_i L_i(U_i) < 0, \quad (1.5)$$

(ii) Với  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$P \leq \beta_1 I_n, \quad Q_1 \leq q_1 I_n, \quad Q_2 \leq q_2 I_n, \quad R_1 \leq r_1 I_n, \quad R_2 \leq r_2 I_n, \quad (1.6a)$$

$$P \geq \frac{1}{\beta_0^2} I_n, \quad (1.6b)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X \\ X^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.6c)$$

$$\Omega_i = \Xi_i - G_1^T F^T \bar{R}_1 F G_1 - \Gamma^T \Phi \Gamma < 0, \quad (1.6d)$$

$$\kappa_1 \mu_0 + \kappa_2 \mu^2 \leq 1, \quad (1.6e)$$

ở đó  $\mu_0 = \frac{1}{\lambda_{\min}(E)}$ , và

$$\begin{aligned} \Xi_i = & e_1^T (P A_i + A_i^T P + \alpha P + Q_1) e_1 + e_2^T (-e^{-\alpha \tau_1} Q_1 + e^{-\alpha \tau_1} Q_2) e_2 \\ & - e^{-\alpha \tau_2} e_4^T Q_2 e_4 + e_{11}^T (\tau_1^2 R_1 + \tau_{12}^2 R_2 - W_i - W_i^T) e_{11} + e_1^T P D_i e_3 \\ & + e_3^T D_i^T P e_1 + e_1^T P B_i e_{12} + e_{12}^T B_i^T P e_1 - e_1^T U_i e_{11} - e_{11}^T U_i^T e_1 + e_1^T U_i D_i e_3 \\ & + e_3^T D_i^T U_i^T e_1 + e_1^T U_i B_i e_{12} + e_{12}^T B_i^T U_i^T e_1 + e_{11}^T W_i A_i e_1 + e_1^T A_i^T W_i^T e_{11} \\ & + e_{11}^T W_i D_i e_3 + e_3^T D_i^T W_i^T e_{11} + e_{11}^T W_i B_i e_{12} + e_{12}^T B_i^T W_i^T e_{11} - \frac{\alpha}{\omega^2} e_{12}^T e_{12}, \end{aligned}$$

$$\kappa_1 = \beta_1 + \frac{q_1(1 - e^{-\alpha \tau_1}) + q_2(e^{-\alpha \tau_1} - e^{-\alpha \tau_2})}{\alpha},$$

$$\kappa_2 = r_1 \tau_1 \left( \frac{\tau_1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha \tau_1} - 1) \right) + r_2 \tau_{12} \left( \frac{\tau_{12}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha \tau_2} - e^{-\alpha \tau_1}) \right).$$

Khi đó tập đạt được tiến của hệ (1.1) được bao bởi hình cầu  $\mathcal{B}(0, \beta_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \beta_0\}$  dưới quy luật chuyển mạch được chọn như sau  $\sigma(x(t)) = i \in \mathcal{N}$  khi mà  $x(t) \in \bar{S}_i$ .

*Chứng minh.* Xét hàm Lyapunov–Krasovskii sau

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t),$$

ở đó

$$V_1(x_t) = x^T(t) P x(t),$$

$$\begin{aligned}
V_2(x_t) &= \int_{t-\tau_1}^t e^{\alpha(s-t)} x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{\alpha(s-t)} x^T(s) Q_2 x(s) ds, \\
V_3(x_t) &= \tau_1 \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+s}^t e^{\alpha(u-t)} \dot{x}^T(u) R_1 \dot{x}(u) duds \\
&\quad + \tau_{12} \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+s}^t e^{\alpha(u-t)} \dot{x}^T(u) R_2 \dot{x}(u) duds.
\end{aligned}$$

Do điều kiện (1.6b), ta thu được đánh giá sau

$$V(x_t) \geq \frac{\|x(t)\|^2}{\beta_0^2}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.7)$$

Từ ràng buộc

$$-\dot{x}(t) + A_i x(t) + D_i x(t - \tau(t)) + B_i \omega(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

ta có

$$\begin{aligned}
&[2x^T(t)U_i + 2\dot{x}^T(t)W_i] [-\dot{x}(t) + A_i x(t) + D_i x(t - \tau(t)) + B_i \omega(t)] = 0, \\
&i = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \quad (1.8)$$

Lấy đạo hàm của  $V(x_t)$  theo  $t$  và sử dụng điều kiện (2.12), ta thu được

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) - \frac{\alpha}{\omega^2} \omega^T(t) \omega(t) \\
&\leq x^T(t) L_i(U_i) x(t) + \chi_0^T(t) \Xi_i \chi_0(t) - \tau_1 e^{-\alpha \tau_1} \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \\
&\quad - \tau_{12} e^{-\alpha \tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds.
\end{aligned} \quad (1.9)$$

Bằng cách áp dụng Bổ đề 1.1, ta có

$$-\tau_1 e^{-\alpha \tau_1} \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \leq -\chi_0^T(t) G_1^T F^T \bar{R}_1 F G_1 \chi_0(t). \quad (1.10)$$

Tách tích phân sau thành tổng của hai tích phân

$$\begin{aligned}
&-\tau_{12} e^{-\alpha \tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\
&= -\tau_{12} e^{-\alpha \tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds - \tau_{12} e^{-\alpha \tau_2} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds
\end{aligned}$$

và sử dụng các Bổ đề 1.1, Bổ đề 1.2, tích phân thứ hai trong (1.9) có thể ước lượng như sau

$$\begin{aligned}
& -\tau_{12}e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds \\
& \leq -\frac{\tau_{12}}{\tau(t)-\tau_1}\chi_0^T(t)G_2^TF^T\bar{R}_2FG_2\chi_0(t) - \frac{\tau_{12}}{\tau_2-\tau(t)}\chi_0^T(t)G_3^TF^T\bar{R}_2FG_3\chi_0(t) \\
& = -\chi_0^T(t)\Gamma^T \begin{bmatrix} \frac{\tau_{12}}{\tau(t)-\tau_1}\bar{R}_2 & 0 \\ 0 & \frac{\tau_{12}}{\tau_2-\tau(t)}\bar{R}_2 \end{bmatrix} \Gamma\chi_0(t) \\
& \leq -\chi_0^T(t)\Gamma^T \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X \\ X^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \Gamma\chi_0(t) \\
& = -\chi_0^T(t)\Gamma^T\Phi\Gamma\chi_0(t).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Vậy, ta có

$$\dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) - \frac{\alpha}{\omega^2}\omega^T(t)\omega(t) \leq x^T(t)L_i(U_i)x(t) + \chi_0^T(t)\Omega_i\chi_0(t). \tag{1.12}$$

Từ (1.6c), (1.6d) và (1.12), ta thu được ước lượng sau

$$\dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) - \frac{\alpha}{\omega^2}\omega^T(t)\omega(t) \leq x^T(t)L_i(U_i)x(t). \tag{1.13}$$

Vì hệ thống các ma trận  $\{L_i(U_i)\}$  đầy đủ chặt nên ta có

$$\bigcup_{i=1}^N S_i = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{1.14}$$

Dựa trên các tập  $S_i$ , ta xây dựng các tập  $\bar{S}_i$  như trong phần ký hiệu bên trên định lý. Ta dễ dàng kiểm tra được rằng

$$\bar{S}_i \cap \bar{S}_j = \{0\}, i \neq j, \bar{S}_i \cup \bar{S}_j = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{1.15}$$

Bây giờ, ta xây dựng qui tắc chuyển mạch giữa các hệ con trong hệ (1.1) như sau  $\sigma(x(t)) = i \in \mathcal{N}$ , khi mà  $x(t) \in \bar{S}_i$ . Vậy, ta có

$$\dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) - \frac{\alpha}{\omega^2}\omega^T(t)\omega(t) \leq 0.$$

Sử dụng các điều kiện (1.6a), (1.6b), (1.6e) và sử dụng một vài tính toán trực tiếp, ta thu được

$$V(x_0) \leq \kappa_1\|\varphi(0)\|^2 + \kappa_2\mu^2 \leq \kappa_1\mu_0 + \kappa_2\mu^2 \leq 1.$$

Từ điều này và Bổ đề 1.3, ta có  $V(x_t) \leq 1$ . Sử dụng (1.7), ta thu được

$$\|x(t)\| \leq \beta_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn.  $\square$

**Nhận xét 1.1.** Chú ý rằng khi ta cố định các số  $\alpha$  và  $\beta_0$  thì các bất đẳng thức ma trận (1.6a)-(1.6e) trở thành bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs). Do đó, ta có thể kết hợp phương pháp tìm kiếm hai chiều kết hợp với thuật toán tối ưu lồi trong MATLABs LMI Control Toolbox (xem [14]) để giải các bất đẳng thức ma trận này. Tương tự như trong bài báo [67], để tìm bao nhỏ nhất của tập đạt được tiến của hệ (1.1) ứng với tập ban đầu cho trước  $\Omega_0 = \{\varphi(s) \in C_1([-\tau_2, 0], \mathbb{R}^n) : \varphi^T(s)E\varphi(s) \leq 1, \forall s \in [-\tau_2, 0]\}$ , tức là tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của  $\beta_0$ , ta đi giải bài toán tối ưu lồi sau đây:

$$\begin{aligned} \text{(OP1)} : \quad & \min \beta_0. \\ & (i), (1.6a) - (1.6e). \end{aligned}$$

Bằng cách xây dựng một hàm Lyapunov-Krsovskii đơn giản, Định lý 1.1 đưa ra một điều kiện đủ cho việc tồn tại một bao của tập đạt được tiến của hệ tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên (1.1). Bây giờ, nếu ta xây dựng một hàm Lyapunov-Krsovskii phức tạp hơn như sau

$$V(x_t) = \bar{V}_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t),$$

ở đó  $V_2(x_t), V_3(x_t)$  được xác định như trong chứng minh của Định lý 1.1 và  $\bar{V}_1(x_t) = \eta^T(t)P\eta(t)$ , trong đó

$$\eta(t) = \left[ x^T(t) \quad \int_{t-\tau_1}^t x^T(s)ds \quad \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} x^T(s)ds \quad \int_{t-\tau_1}^t \int_s^t x^T(u)duds \right]^T,$$

$$P_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}, i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_{4n}^+$$

thì bằng kỹ thuật chứng minh tương tự như Định lý 1.1, ta thu được kết quả sau

**Hệ quả 1.1.** *Giả sử rằng tồn tại 10 số dương  $\alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, q_1, q_2, r_1, r_2, 4$  ma trận  $Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ , ma trận  $\mathcal{P} \in \mathbb{S}_{4n}^+$ , các ma trận  $U_i, W_i \in \mathbb{R}^{n \times n} (i =$*



$1, \dots, N$ ), và một ma trận  $X \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  sao cho các điều kiện dưới đây được thỏa mãn:

(i) Hệ thống ma trận  $\{L_i(U_i)\}$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) là đầy đủ chặt, tức là tồn tại các số  $\epsilon_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\sum_{i=1}^N \epsilon_i > 0$  sao cho

$$\sum_{i=1}^N \epsilon_i L_i(U_i) < 0, \quad (1.16)$$

(ii) Với  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\mathcal{P} \leq \text{diag}\{\beta_1 I_n, \beta_2 I_n, \beta_3 I_n, \beta_4 I_n\}, \quad (1.17a)$$

$$Q_1 \leq q_1 I_n, \quad Q_2 \leq q_2 I_n, \quad R_1 \leq r_1 I_n, \quad R_2 \leq r_2 I_n, \quad (1.17b)$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_0^2} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \end{bmatrix} > 0, \quad (1.17c)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X \\ X^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.17d)$$

$$\Omega_i(\tau) = \hat{\Xi}_i(\tau) - G_1^T F^T \bar{R}_1 F G_1 - \Gamma^T \Phi \Gamma < 0, \quad \forall \tau \in \{\tau_1, \tau_2\} \quad (1.17e)$$

$$\kappa_1 \mu_0 + \kappa_2 \mu^2 \leq 1, \quad (1.17f)$$

ở đó  $\mu_0 = \frac{1}{\lambda_{\min}(E)}$ , và

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_i(\tau) &= \mathcal{H}_0^T(\tau) \mathcal{P} \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1^T \mathcal{P} \mathcal{H}_0(\tau) + \alpha \mathcal{H}_0^T(\tau) \mathcal{P} \mathcal{H}_0(\tau) + e_1^T Q_1 e_1 \\ &+ e_2^T (-e^{-\alpha \tau_1} Q_1 + e^{-\alpha \tau_1} Q_2) e_2 - e^{-\alpha \tau_2} e_4^T Q_2 e_4 \\ &+ e_{11}^T (\tau_1^2 R_1 + \tau_{12}^2 R_2 - W_i - W_i^T) e_{11} + e_1^T P D_i e_3 + e_3^T D_i^T P e_1 \\ &+ e_1^T P B_i e_{12} + e_{12}^T B_i^T P e_1 - e_1^T U_i e_{11} - e_{11}^T U_i^T e_1 + e_1^T U_i D_i e_3 + e_3^T D_i^T U_i^T e_1 \\ &+ e_1^T U_i B_i e_{12} + e_{12}^T B_i^T U_i^T e_1 + e_{11}^T W_i A_i e_1 + e_1^T A_i^T W_i^T e_{11} \\ &+ e_{11}^T W_i D_i e_3 + e_3^T D_i^T W_i^T e_{11} + e_{11}^T W_i B_i e_{12} + e_{12}^T B_i^T W_i^T e_{11} - \frac{\alpha}{\omega^2} e_{12}^T e_{12}, \end{aligned}$$

$$\kappa_1 = \beta_1 + \tau_1 \beta_2 + \tau_{12} \beta_3 + \frac{\tau_1^2}{2} \beta_4 + \frac{q_1(1 - e^{-\alpha \tau_1}) + q_2(e^{-\alpha \tau_1} - e^{-\alpha \tau_2})}{\alpha},$$

$$\kappa_2 = r_1 \tau_1 \left( \frac{\tau_1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha \tau_1} - 1) \right) + r_2 \tau_{12} \left( \frac{\tau_{12}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha \tau_2} - e^{-\alpha \tau_1}) \right),$$

trong đó

$$\mathcal{H}_0(\tau) = \begin{bmatrix} e_1^T & \tau_1 e_5^T & (\tau_2 - \tau) e_7 + (\tau - \tau_1) e_6^T & \frac{\tau_1^2}{2} e_8^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathcal{H}_1 = [e_{11}^T \quad (e_1 - e_2)^T \quad (e_2 - e_4)^T \quad \tau_1(e_1 - e_5)^T]^T.$$

Khi đó tập đạt được tiến của hệ (1.1) được bao bởi hình cầu  $\mathcal{B}(0, \beta_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \beta_0\}$  dưới luật chuyển mạch được cho bởi  $\sigma(x(t)) = i \in \mathcal{N}$  khi mà  $x(t) \in \overline{S}_i$ .

**Nhận xét 1.2.** Hệ quả 1.1 có thể đưa ra một cận trên  $\tau_2$  cho độ trễ  $\tau(t)$  lớn hơn so với Định lý 1.1 khi nghiên cứu bài toán tìm bao của tập đạt được tiến cho hệ (1.1). Do đó có thể nói các điều kiện trong Hệ quả 1.1 là ít bảo thủ hơn so với điều kiện đưa ra bởi Định lý 1.1. Tuy nhiên, có thể quan sát thấy rằng Hệ quả 1.1 có nhiều biến và ẩn ma trận hơn so với Định lý 1.1. Vì vậy việc giải các điều kiện trong Hệ quả 1.1 là phức tạp hơn và tốn bộ nhớ hơn so với việc giải các điều kiện trong Định lý 1.1.

Trong trường hợp  $N = 1$ , Định lý 1.1 đưa ra một điều kiện đủ cho bài toán tìm bao của tập đạt được tiến cho hệ phương trình vi phân tuyến tính có trễ biến thiên.

**Hệ quả 1.2.** Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính có trễ biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t - \tau(t)) + B\omega(t), & t \geq 0, \\ x(s) \equiv \varphi(s), & s \in [-\tau_2, 0]. \end{cases} \quad (1.18)$$

Giả sử rằng tồn tại bảy hằng số dương  $\alpha, \beta_0, \beta_1, q_1, q_2, r_1, r_2$ , năm ma trận  $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ , các ma trận  $U, W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  và một ma trận  $X \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  sao cho các điều kiện dưới đây được thỏa mãn:

$$P \leq \beta_1 I_n, \quad Q_1 \leq q_1 I_n, \quad Q_2 \leq q_2 I_n, \quad R_1 \leq r_1 I_n, \quad R_2 \leq r_2 I_n, \quad (1.19a)$$

$$P \geq \frac{1}{\beta_0^2} I_n, \quad (1.19b)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \overline{R}_2 & X \\ X^T & \overline{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.19c)$$

$$\Omega = \Xi - G_1^T F^T \overline{R}_1 F G_1 - \Gamma^T \Phi \Gamma < 0, \quad (1.19d)$$

$$\kappa_1 \mu_0 + \kappa_2 \mu^2 \leq 1, \quad (1.19e)$$

ở đó  $\mu_0 = \frac{1}{\lambda_{\min}(E)}$ , và

$$\begin{aligned} \Xi = & e_1^T (PA + A^T P + \alpha P + UA + A^T U^T + Q_1) e_1 \\ & + e_2^T (-e^{-\alpha\tau_1} Q_1 + e^{-\alpha\tau_1} Q_2) e_2 - e^{-\alpha\tau_2} e_4^T Q_2 e_4 \\ & + e_{11}^T (\tau_1^2 R_1 + \tau_{12}^2 R_2 - W - W^T) e_{11} + e_1^T P D e_3 + e_3^T D^T P e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e_1^T P B e_{12} + e_{12}^T B^T P e_1 - e_1^T U e_{11} - e_{11}^T U^T e_1 + e_1^T U D e_3 + e_3^T D^T U^T e_1 \\
& + e_1^T U B e_{12} + e_{12}^T B^T U^T e_1 + e_{11}^T W A e_1 + e_1^T A^T W^T e_{11} \\
& + e_{11}^T W D_i e_3 + e_3^T D^T W^T e_{11} + e_{11}^T W B e_{12} + e_{12}^T B^T W^T e_{11} - \frac{\alpha}{\omega^2} e_{12}^T e_{12}, \\
\kappa_1 & = \beta_1 + \frac{q_1(1 - e^{-\alpha\tau_1}) + q_2(e^{-\alpha\tau_1} - e^{-\alpha\tau_2})}{\alpha}, \\
\kappa_2 & = r_1\tau_1 \left( \frac{\tau_1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha\tau_1} - 1) \right) + r_2\tau_{12} \left( \frac{\tau_{12}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha\tau_2} - e^{-\alpha\tau_1}) \right).
\end{aligned}$$

Khi đó tập đạt được tiến của hệ (1.18) được bao bởi hình cầu  $\mathcal{B}(0, \beta_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \beta_0\}$ .

**Nhận xét 1.3.** Chú ý rằng trong bài báo [67], các tác giả nghiên cứu bài toán tìm bao của tập đạt được tiến của hệ phương trình vi phân tuyến tính (1.18) trong trường hợp độ trễ là hàm khả vi liên tục với đạo hàm  $\dot{\tau}(t)$  thỏa mãn điều kiện  $d_m \leq \dot{\tau}(t) \leq d_M \leq 1$ , ở đó  $d_m$  và  $d_M$  là các hằng số cho trước. Khác với kết quả trong bài báo này, Hệ quả 1.2 giải bài toán tìm bao của tập đạt được tiến của hệ phương trình vi phân tuyến tính (1.18) trong trường hợp độ trễ là hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Do đó có thể nói Hệ quả 1.2 như là một mở rộng tự nhiên cho kết quả của bài báo trong [67].

Ngoài ra, khi  $\omega(t) = 0, \forall t \geq 0$ , Định lý 1.1 đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của hệ phương trình vi phân tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên (1.1). Chú ý rằng bài toán nghiên cứu tính ổn định theo nghĩa Lyapunov cho lớp hệ phương trình vi phân chuyển mạch có trễ đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học (xem [40, 76] và các tài liệu tham khảo trong đó). Gần đây, bài toán nghiên cứu tính ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho hệ phương trình vi phân tuyến tính chuyển mạch có trễ được nghiên cứu trong [35]. Hệ quả dưới đây đưa ra một điều kiện đủ cải tiến cho tính ổn định mũ của hệ phương trình vi phân tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên (1.1) khi véc tơ nhiễu  $\omega(t) \equiv 0$ .

**Hệ quả 1.3.** Hệ (1.1) với véc tơ nhiễu  $\omega(t) \equiv 0$ , là ổn định mũ với tốc độ mũ  $\alpha^* = \frac{\alpha}{2} \geq 0$  nếu tồn tại năm ma trận  $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ , các ma trận  $U_i, W_i \in \mathbb{R}^{n \times n} (i = 1, \dots, N)$  và một ma trận  $X \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) Hệ thống các ma trận  $\{L_i(U_i)\}, (i = 1, 2, \dots, N)$  là đầy đủ chặt, tức là tồn

tại các số  $\epsilon_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N, \sum_{i=1}^N \epsilon_i > 0$  sao cho

$$\sum_{i=1}^N \epsilon_i L_i(U_i) < 0, \quad (1.20)$$

(ii) Với  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X \\ X^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.21a)$$

$$\Sigma_i = \Psi_i - G_1^T F^T \bar{R}_1 F G_1 - \Gamma^T \Phi \Gamma < 0, \quad (1.21b)$$

ở đó

$$\begin{aligned} \Psi_i = & e_1^T (P A_i + A_i^T P + \alpha P + Q_1) e_1 + e_2^T (-e^{-\alpha \tau_1} Q_1 + e^{-\alpha \tau_1} Q_2) e_2 \\ & - e^{-\alpha \tau_2} e_4^T Q_2 e_4 + e_{11}^T (\tau_1^2 R_1 + \tau_{12}^2 R_2 - W_i - W_i^T) e_{11} \\ & + e_1^T P D_i e_3 + e_3^T D_i^T P e_1 - e_1^T U_i e_{11} - e_{11}^T U_i^T e_1 \\ & + e_1^T U_i D_i e_3 + e_3^T D_i^T U_i^T e_1 + e_{11}^T W_i A_i e_1 + e_1^T A_i^T W_i^T e_{11} \\ & + e_{11}^T W_i D_i e_3 + e_3^T D_i^T W_i^T e_{11}. \end{aligned}$$

Ngoài ra, quy tắc chuyển mạch được chọn như sau  $\sigma(x(t)) = i \in \mathcal{N}$  khi mà  $x(t) \in \bar{S}_i$ .

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu bài toán tìm bao của tập đạt được lồi cho hệ phương trình vi phân tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên (1.1). Cụ thể hơn, chúng tôi sẽ đưa ra một điều kiện đủ cho việc tồn tại một hình cầu  $\mathcal{B}(0, \mu_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \mu_0\}$  chứa tập đạt được lồi của hệ (1.1)-(1.4) tương ứng với một tập mục tiêu cho trước  $\Lambda_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T F x \leq 1\}$ , ở đó  $F$  là một ma trận đối xứng, xác định dương cho trước dưới luật chuyển mạch thích hợp  $\sigma(\cdot)$ . Bằng các kỹ thuật tương tự như Định lý 1.1, chúng tôi thu được kết quả sau đây:

**Định lý 1.2.** *Giả sử rằng tồn tại bảy hằng số dương  $\alpha, \mu_0, \beta_1, q_1, q_2, r_1, r_2$ , năm ma trận  $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ , các ma trận  $U_i, W_i \in \mathbb{R}^{n \times n} (i = 1, \dots, N)$  và một ma trận  $X \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  sao cho điều kiện (i) trong Định lý 1.1 và các điều kiện sau đây*

$$P \leq \beta_1 I_n, \quad Q_1 \leq q_1 I_n, \quad Q_2 \leq q_2 I_n, \quad R_1 \leq r_1 I_n, \quad R_2 \leq r_2 I_n, \quad (1.22a)$$

$$P - F > 0, \quad (1.22b)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X \\ X^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.22c)$$

$$\Omega_i = \Xi_i - G_1^T F^T \bar{R}_1 F G_1 - \Gamma^T \Phi \Gamma < 0, i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.22d)$$

$$\kappa_1 \mu_0^2 + \kappa_2 \mu^2 \leq 1, \quad (1.22e)$$

đúng. Khi đó tập đạt được lõi của hệ (1.1) được bao bởi hình cầu  $\mathcal{B}(0, \mu_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \mu_0\}$  dưới luật chuyển mạch cho bởi  $\sigma(x(t)) = i \in \mathcal{N}$  khi mà  $x(t) \in \bar{S}_i$ .

**Nhận xét 1.4.** Tương tự như Nhận xét 1.1, ta có bài toán tối ưu lồi sau để tìm bao lớn nhất có thể  $\mu_0$  :

$$(OP2) : \quad \max \mu_0 \\ (i), (1.22a) - (1.22e).$$

Sau đây, chúng tôi đưa ra một vài ví dụ minh họa cho kết quả lý thuyết.

**Ví dụ 1.1.** Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính chuyển mạch (1.1) với hai hệ con và các số liệu cho bởi như sau

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0.1 \\ -1 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.2 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

và  $\|\omega(t)\| \leq 1$ . Độ trễ  $\tau(t)$  là hàm liên tục thỏa mãn  $\tau(t) \in [\tau_1, 0.7]$ . Trong ví dụ này, chúng tôi thiết kế quy tắc chuyển mạch và tìm bao của tập đạt được trong hai trường hợp:

- (a) Cho trước  $\mu = 1$ . Tìm luật chuyển mạch phù hợp và bao nhỏ nhất có thể chứa tập đạt được tiến tương ứng với tập ban đầu cho trước  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$ .
- (b) Cho trước  $\mu = 1$ . Tìm luật chuyển mạch phù hợp và bao lớn nhất có thể có của tập đạt được lùi tương ứng với tập mục tiêu cho trước  $\Lambda_0 \equiv \mathcal{B}(0, 2)$ .

*Lời giải:*

(a) Sử dụng Định lý 1.1 kết hợp với Nhận xét 1.1, hình cầu nhỏ nhất có thể  $\mathcal{B}(0, \beta_0)$ , chứa tập đạt được tiến của hệ ứng với tập điều kiện ban đầu cho trước  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$  được cho trong Bảng 1.1 với các giá trị nhỏ nhất có thể của  $\beta_0$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ .

Để minh họa bằng hình vẽ, ta chọn độ trễ  $\tau(t) = 0.3 + 0.4 \sin^2\left(\frac{10t}{4}\right)$ , véc tơ nhiễu  $\omega(t) \in \{a \sin(t), a = -1, -0.9, \dots, 0.9, 1\} \cup \{-1, -0.9, \dots, 0.9, 1\}$ , điều kiện ban đầu  $(x_1(t), x_2(t))^T \in \{(b \sin(t/2), \pm \sqrt{1 - b^2} \cos(t/2)), b = -1, -0.9, \dots, 0.9, 1\} \cup$

Bảng 1.1: Giá trị nhỏ nhất có thể của  $\beta_0$  ứng với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ 

$\tau_1$	0	0.1	0.2	0.3
Định lý 1.1	1.400	1.358	1.355	1.350

$\{(b, \pm\sqrt{1-b^2}), b = -1, -0.9, \dots, 0.9, 1\}$ . Ta thấy các điều kiện trong Định lý 1.1 và Nhận xét 1.1 được thỏa mãn với  $\alpha = 0.455, \epsilon_1 = 0.05, \epsilon_2 = 0.95, \beta_0 = 1.350, \beta_1 = 0.5934, q_1 = 0.4138, q_2 = 0.5565, r_1 = 2.5128, r_2 = 0.9961$ , và

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 0.5793 & -0.0054 \\ -0.0054 & 0.5614 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0.3782 & 0.0113 \\ 0.0113 & 0.1657 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0.4692 & 0.1090 \\ 0.1090 & 0.3199 \end{bmatrix}, \\
R_1 &= \begin{bmatrix} 0.8572 & 0.1805 \\ 0.1805 & 0.7173 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0.7557 & 0.0087 \\ 0.0087 & 0.7055 \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} -0.3227 & 0.1774 \\ -0.0037 & -0.3333 \end{bmatrix}, \\
U_2 &= \begin{bmatrix} 0.0914 & 0.1750 \\ -0.0617 & 0.1377 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0.2371 & 0.0877 \\ -0.0091 & 0.2104 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0.2177 & 0.0333 \\ 0.0127 & 0.3597 \end{bmatrix}, \\
X &= \begin{bmatrix} -0.4403 & -0.0973 & 0.0014 & 0.0009 & 0.0006 & -0.0002 \\ -0.1361 & -0.1964 & -0.0006 & -0.0001 & -0.0006 & 0.0005 \\ 0.0019 & 0.0010 & -0.0031 & -0.0001 & -0.0045 & -0.0001 \\ 0.0005 & 0.0004 & -0.0001 & -0.0025 & -0.0001 & -0.0039 \\ 0.0010 & -0.0002 & 0.0044 & 0.0001 & 0.0074 & 0.0002 \\ -0.0003 & 0.0014 & 0.0001 & 0.0039 & 0.0002 & 0.0065 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

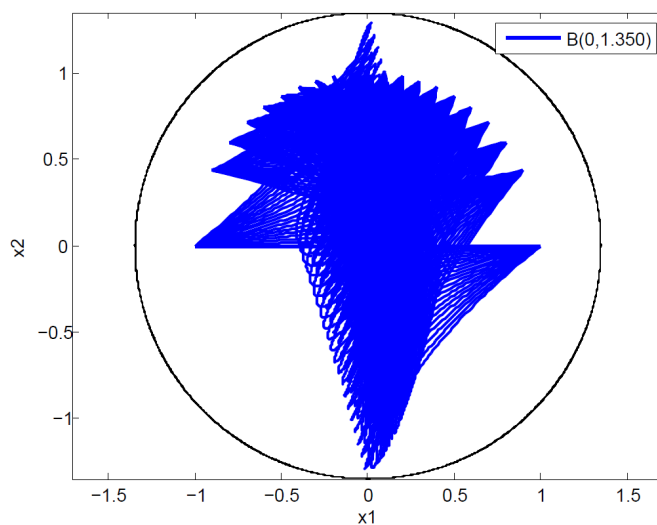
Các tập  $\bar{S}_1, \bar{S}_2$  trong Định lý 1.1 được xác định như sau

$$\begin{aligned}
\bar{S}_1 &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1.2910x_1^2 - 0.2334x_1x_2 + 0.4666x_2^2 \leq 0\}, \\
\bar{S}_2 &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1.2910x_1^2 - 0.2334x_1x_2 + 0.4666x_2^2 > 0, (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}.
\end{aligned}$$

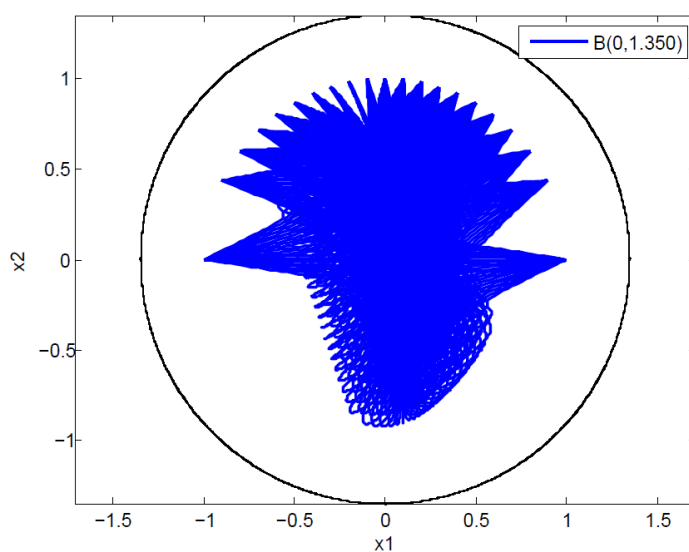
Luật chuyển mạch giữa hai hệ con được chọn như sau

$$\sigma(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x(t) \in \bar{S}_1, \\ 2 & \text{nếu } x(t) \in \bar{S}_2. \end{cases}$$

Theo Định lý 1.1, quỹ đạo của véc tơ trạng thái bắt đầu từ trong hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1)$  của hệ được bao bởi hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.350)$ . Hình 1.1 và 1.2 chỉ ra rằng hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.350)$  chứa tập đạt được tiến tương ứng với tập điều kiện đầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$  của hệ.



Hình 1.1: Hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.350)$  chứa tập đạt được tiến tương ứng với tập điều kiện đầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$  của hệ con 1



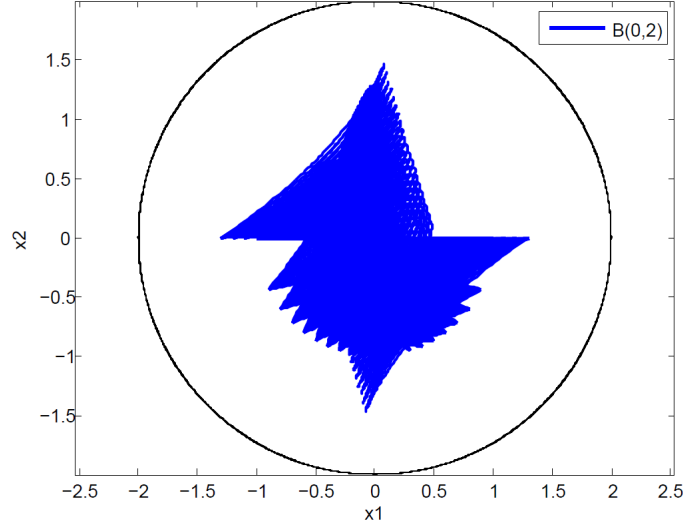
Hình 1.2: Hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.350)$  chứa tập đạt được tiến tương ứng với tập điều kiện đầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$  của hệ con 2

Bảng 1.2: Giá trị lớn nhất có thể có của  $\mu_0$  ứng với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ 

$\tau_1$	0	0.1	0.2	0.3
Định lý 1.2	1.650	1.705	1.750	1.755

(b) Sử dụng Định lý 1.2 kết hợp với Nhận xét 1.4, chúng tôi tìm hình cầu lớn nhất có thể có  $\mathcal{B}(0, \mu_0)$  chứa tập đạt được lùi tương ứng với tập mục tiêu cho trước  $\Lambda_0 \equiv \mathcal{B}(0, 2)$ . Bảng 1.2 liệt kê các giá trị lớn nhất có thể có của  $\mu_0$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ .

Để minh họa bằng hình vẽ, ta chọn độ trễ  $\tau(t) = 0.3 + 0.4 \sin^2\left(\frac{10t}{4}\right)$ , véc

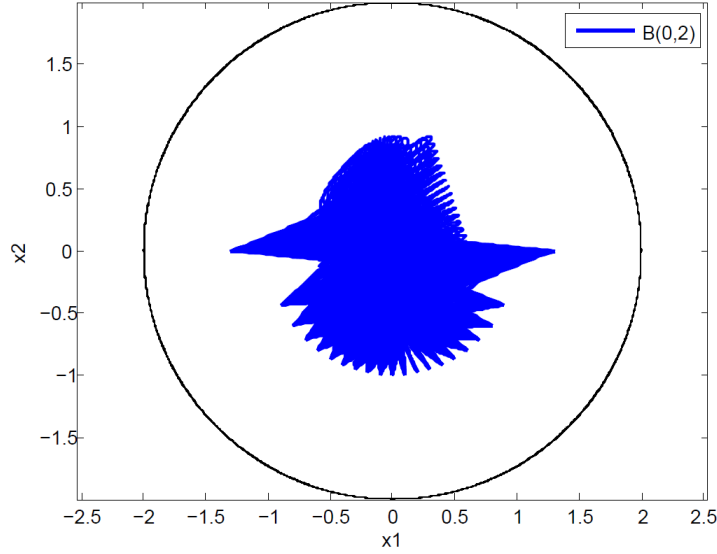


Hình 1.3: Hình cầu  $\mathcal{B}(0, 2)$  chứa tất cả các véc tơ trạng thái của hệ con thứ 1 với điều kiện ban đầu nằm trong hình cầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1.755)$

tơ nhiễu  $\omega(t) \in \{-1, -0.9, \dots, 0.9, 1\}$ ,  $(x_1(t), x_2(t))^T \in \{(b, \pm\sqrt{1-b^2}), b = -1.3, \dots, 1.3\}$  là điều kiện ban đầu. Ta thấy các điều kiện trong Định lý 1.2 và Nhận xét 1.4 được thỏa mãn với  $\alpha = 0.455$ ,  $\epsilon_1 = 0.05$ ,  $\epsilon_2 = 0.95$ ,  $\mu_0 = 1.755$ ,  $\beta_1 = 0.2515$ ,  $q_1 = 0.0090$ ,  $q_2 = 0.1950$ ,  $r_1 = 0.5485$ ,  $r_2 = 0.2502$ , và

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} 0.2508 & -0.0001 \\ -0.0001 & 0.2506 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0.0075 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0032 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0.1731 & 0.0484 \\ 0.0484 & 0.0815 \end{bmatrix}, \\
 R_1 &= \begin{bmatrix} 0.4469 & 0.0651 \\ 0.0651 & 0.2407 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0.2311 & 0.0181 \\ 0.0181 & 0.1819 \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} -0.1311 & 0.1260 \\ 0.0303 & -0.2386 \end{bmatrix}, \\
 U_2 &= \begin{bmatrix} 0.0357 & 0.0812 \\ -0.0246 & 0.0324 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0.1078 & 0.0205 \\ -0.0294 & 0.1138 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0.0804 & 0.0055 \\ 0.0101 & 0.1126 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$





Hình 1.4: Hình cầu  $\mathcal{B}(0, 2)$  chứa tất cả các véc tơ trạng thái của hệ con thứ 2 với điều kiện ban đầu nằm trong hình cầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1.755)$

$$X = \begin{bmatrix} -0.1548 & -0.0314 & 0.0003 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \\ -0.0477 & -0.0648 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0002 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \end{bmatrix}.$$

Các tập  $\bar{S}_1, \bar{S}_2$  trong Định lý 1.2 được xác định như sau

$$\bar{S}_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0.5245x_1^2 - 0.2974x_1x_2 + 0.3340x_2^2 \leq 0\},$$

$$\bar{S}_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0.5245x_1^2 - 0.2974x_1x_2 + 0.3340x_2^2 > 0, (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}.$$

Luật chuyển mạch giữa hai hệ con được cho bởi

$$\sigma(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x(t) \in \bar{S}_1, \\ 2 & \text{nếu } x(t) \in \bar{S}_2. \end{cases}$$

Theo Định lý 1.2, mọi quỹ đạo của véc tơ trạng thái bắt đầu từ trong hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.755)$  đều nằm trong hình cầu  $\mathcal{B}(0, 2)$ . Các hình 1.3, 1.4 chỉ ra rằng hình cầu  $\mathcal{B}(0, 2)$  chứa tất cả các véc tơ trạng thái của hệ con 1 và hệ con 2 với mọi véc tơ điều kiện ban đầu của hệ nằm trong hình cầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1.755)$ .

Bảng 1.3: So sánh cận trên  $\tau_2$  với  $\alpha^* = 0$  và các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ 

$\tau_1$	0	0.4	1
Lien C.H. cùng các cộng sự [39]	0.687	0.856	1.335
Zhang D., Yu L. [76]	1.253	1.368	1.708
Hệ quả 1.3	1.619	1.777	2.187

Bảng 1.4: So sánh cận trên  $\tau_2$  với  $\alpha^* = 0.3$  và các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ 

$\tau_1$	0	0.4	0.5
Lien C.H. cùng các cộng sự [39]	0.442	0.490	0.518
Zhang D., Yu L. [76]	0.832	0.869	0.878
Hệ quả 1.3	1.165	1.283	1.312

**Ví dụ 1.2.** Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên (1.1), trong đó  $\omega(t) \equiv 0$  với hai hệ con và các tham số được lấy trong các bài báo trong [35, 39, 76]:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mục đích của ví dụ này là để so sánh kết quả của chúng tôi với những kết quả đã có (xem [35, 39, 76]) khi nghiên cứu tính ổn định mũ của lớp hệ phương trình vi phân tuyến tính chuyển mạch có trễ.

Để so sánh với kết quả trong [39, 76], ta sử dụng Hệ quả 1.3. Bảng 1.3 và 1.4 cho ta so sánh về cận trên  $\tau_2$  của độ trễ với các giá trị  $\alpha^* = 0$  và  $\alpha^* = 0.3$ . Rõ ràng từ Bảng 1.3 và 1.4, tiêu chuẩn thu được trong kết quả chúng tôi là ít bảo thủ hơn các kết quả trong [39, 76].

Bây giờ, chúng tôi đi so sánh kết quả của chúng tôi với kết quả Li Z. cùng các cộng sự [35]. Trước hết, ta cho  $\tau_1 = 0$ . Bảng 1.5 cho ta sự so sánh về cận trên  $\tau_2$  với các giá trị khác nhau của  $\alpha^*$  giữa kết quả trong Hệ quả 1.3 và kết quả của Li Z. cùng các cộng sự [35]. Sau đó, cho  $\tau_1 = 0$ . Bảng 1.6 cho ta sự so sánh về tốc độ hội tụ mũ  $\alpha^*$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_2$  giữa kết quả trong Hệ quả 1.3 và kết quả của Li Z. cùng các cộng sự [35]. Từ Bảng 1.5 và 1.6, ta thấy kết quả thu được trong Hệ quả 1.3 ít bảo thủ hơn kết quả trong [35]

Bảng 1.5: So sánh cận trên  $\tau_2$  với  $\tau_1$  và các giá trị khác nhau của  $\alpha^*$ 

$\alpha^*$	0.1	0.14	0.2	0.24	0.3
Li Z. cùng các cộng sự [35]	0.842	0.804	0.752	0.720	0.674
Hệ quả 1.3	1.4414	1.3299	1.2930	1.2398	1.1656

Bảng 1.6: So sánh cận trên  $\alpha^*$  với  $\tau_1 = 0$  và các giá trị khác nhau của  $\tau_2$ 

$\tau_2$	0.7	0.65	0.6	0.55
Li Z. cùng các cộng sự [35]	0.133	0.167	0.240	0.244
Hệ quả 1.3	0.387	0.420	0.455	0.492

### 1.3. Bài toán tìm bao của tập đạt được của mạng nơ ron tổng quát có trễ

Xét mạng nơ ron tổng quát có trễ biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t) + Df(Wx(t)) + D_1f(Wx(t - \tau(t))) + B\omega(t), t \geq 0, \\ x(s) \equiv \varphi(s), \quad s \in [-\tau_2, 0], \end{cases} \quad (1.23)$$

ở đó  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  là véc tơ trạng thái của mạng nơ ron,  $f(\cdot) = [f_1(\cdot) \ f_2(\cdot) \ \dots \ f_n(\cdot)]^T \in \mathbb{R}^n$  là các hàm kích hoạt,  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $a_i > 0 (i = 1, \dots, n)$ ,  $D, D_1, W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là các ma trận trọng số liên kết các nơ ron của mạng và  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  là ma trận hằng số cho trước,  $\tau(t)$  là hàm trễ thỏa mãn điều kiện dưới đây

$$0 \leq \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2. \quad (1.24)$$

Hàm  $\varphi(s) \in C^1([-\tau_2, 0], \mathbb{R}^n)$  là điều kiện ban đầu thỏa mãn điều kiện dưới đây

$$\max_{s \in [-\tau_2, 0]} \dot{\varphi}^T(s) \dot{\varphi}(s) \leq \mu^2. \quad (1.25)$$

Véc tơ nhiễu  $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$ , là không biết nhưng thỏa mãn điều kiện sau

$$\omega^T(t) \omega(t) \leq \omega^2, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.26)$$

ở đó  $\tau_1, \tau_2, \mu, \omega$  là các hằng số không âm. Ngoài ra, các hàm kích hoạt  $f_i(\cdot)$  trong (1.23) thỏa mãn giả thiết dưới đây

**Giả thiết 1.1.** Các hàm  $f(\cdot)$  trong (1.23) liên tục, bị chặn và thỏa mãn điều kiện sau đây

$$l_i^- \leq \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq l_i^+, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.27)$$

ở đó  $f_i(0) = 0, x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, l_i^-$  và  $l_i^+$  là các số thực.

**Nhận xét 1.5.** Các hàm kích hoạt của mạng nơ ron thỏa mãn Giả thiết 1.1 được đưa ra đầu tiên trong [42]. Các hằng số  $l_i^-, l_i^+ (i = 1, 2, \dots, n)$  trong Giả thiết 1.1 có thể là số dương, số âm hoặc bằng 0. Do đó điều kiện này là ít bảo thủ hơn so với điều kiện Lipschitz.

**Định nghĩa 1.3.** (i) Cho trước  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$  là một tập lồi đóng, bị chặn chứa điểm gốc 0. Một tập  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là tập đạt được tiến (forwards reachable set) tương ứng với tập ban đầu cho trước  $\Omega_0$  của hệ (1.23) với các điều kiện (1.24), (1.25) và (1.26) nếu với mọi điều kiện ban đầu  $\varphi(s) \in \Omega_0, \forall s \in [-\tau_2, 0]$ , nghiệm của hệ thỏa mãn  $x(t, \varphi(t), \omega(t)) \in \Omega, \forall t \geq 0$ .

(ii) Cho trước  $\Lambda_0 \subset \mathbb{R}^n$  là một tập lồi đóng, bị chặn chứa điểm gốc 0. Tập  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là tập đạt được lùi (backwards reachable set) tương ứng với tập mục tiêu  $\Lambda_0$  của hệ (1.23) với các điều kiện (1.24), (1.25) và (1.26) nếu với mọi hàm điều kiện ban đầu  $\varphi(s) \in \Lambda, \forall s \in [-\tau_2, 0]$ , nghiệm của hệ thỏa mãn  $x(t, \varphi(t), \omega(t)) \in \Lambda_0, \forall t \geq 0$ .

Để thuận tiện cho việc trình bày các kết quả tiếp theo, ta ký hiệu

$$e_j = [0_{n \times (j-1)n} \quad I_n \quad 0_{n \times (15-j)n} \quad 0_{n \times m}]^T, j = 1, 2, \dots, 15,$$

$$e_{16} = [0_{m \times 15n} \quad I_m]^T, \quad \tau_{12} = \tau_2 - \tau_1,$$

các véc tơ  $\chi_0(t) = [\chi_{01}^T(t) \quad \chi_{02}^T(t) \quad \chi_{03}^T(t) \quad \chi_{04}^T(t)]^T$ , ở đó

$$\chi_{01}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \\ x(t - \tau(t)) \\ x(t - \tau_2) \end{bmatrix}, \quad \chi_{02}(t) = \begin{bmatrix} f(Wx(t)) \\ f(Wx(t - \tau(t))) \\ f(Wx(t - \tau_2)) \\ f(Wx(t - \tau_1)) \end{bmatrix},$$

$$\chi_{03}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} \int_{t-\tau_1}^t x(s) ds \\ \frac{1}{\tau(t)-\tau_1} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds \\ \frac{1}{\tau_2-\tau(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \\ \frac{2}{\tau_1^2} \int_{t-\tau_1}^t \int_s^t x(u) dud s \end{bmatrix},$$

$$\chi_{04}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(\tau(t)-\tau_1)^2} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \int_s^{t-\tau_1} x(u) dud s \\ \frac{2}{(\tau_2-\tau(t))^2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \int_s^{t-\tau(t)} x(u) dud s \\ \dot{x}(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix},$$

$$\bar{R}_1 = \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_1} R_1, 3e^{-\alpha\tau_1} R_1, 5e^{-\alpha\tau_1} R_1\},$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_2 &= \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_2}R_2, 3e^{-\alpha\tau_2}R_2, 5e^{-\alpha\tau_2}R_2\}, \\ \Sigma_1 &= \text{diag}\{l_1^-, l_2^-, \dots, l_n^-\}, \Sigma_2 = \text{diag}\{l_1^+, l_2^+, \dots, l_n^+\}, \\ \Sigma_3 &= \text{diag}\{l_1^+ - l_1^-, \dots, l_n^+ - l_n^-\},\end{aligned}$$

và các ma trận

$$\begin{aligned}G_1 &= [e_1^T \ e_2^T \ e_9^T \ e_{12}^T]^T, \quad G_2 = [e_2^T \ e_3^T \ e_{10}^T \ e_{13}^T]^T, \\ G_3 &= [e_3^T \ e_4^T \ e_{11}^T \ e_{14}^T]^T, \quad G_4 = [e_5^T - e_1^T W^T \Sigma_1]^T, \\ G_5 &= [e_1^T W^T \Sigma_2 - e_5^T]^T, \quad G_6 = [e_6^T - e_3^T W^T \Sigma_1]^T, \\ G_7 &= [e_3^T W^T \Sigma_2 - e_6^T]^T, \\ G_8 &= [e_5^T - e_6^T - e_1^T W^T \Sigma_1 + e_3^T W^T \Sigma_1]^T, \\ G_9 &= [e_1^T W^T \Sigma_2 - e_3^T W^T \Sigma_2 - e_5^T + e_6^T]^T, \\ G_{10} &= [e_5^T - e_8^T - e_1^T W^T \Sigma_1 + e_2^T W^T \Sigma_1]^T, \\ G_{11} &= [e_1^T W^T \Sigma_2 - e_2^T W^T \Sigma_2 - e_5^T + e_8^T]^T, \\ G_{12} &= [e_5^T - e_7^T - e_1^T W^T \Sigma_1 + e_4^T W^T \Sigma_1]^T, \\ G_{13} &= [e_1^T W^T \Sigma_2 - e_4^T W^T \Sigma_2 - e_5^T + e_7^T]^T, \\ G_{14} &= [e_7^T - e_8^T - e_4^T W^T \Sigma_1 + e_2^T W^T \Sigma_1]^T, \\ G_{15} &= [e_4^T W^T \Sigma_2 - e_2^T W^T \Sigma_2 - e_7^T + e_8^T]^T, \\ G_{16} &= [e_7^T - e_6^T - e_4^T W^T \Sigma_1 + e_3^T W^T \Sigma_1]^T, \\ G_{17} &= [e_4^T W^T \Sigma_2 - e_3^T W^T \Sigma_2 - e_7^T + e_6^T]^T, \\ G_{18} &= [e_6^T - e_8^T - e_3^T W^T \Sigma_1 + e_2^T W^T \Sigma_1]^T, \\ G_{19} &= [e_3^T W^T \Sigma_2 - e_2^T W^T \Sigma_2 - e_6^T + e_8^T]^T, \\ \Xi_1 &= e_1^T (-PA - A^T P + \alpha P + Q_1 - UA - A^T U^T) e_1 \\ &\quad + e_2^T (-e^{-\alpha\tau_1} Q_1 + e^{-\alpha\tau_1} Q_2) e_2 - e^{-\alpha\tau_2} e_4^T Q_2 e_4 \\ &\quad + e_{15}^T (\tau_1^2 R_1 + \tau_{12}^2 R_2 - S - S^T) e_{15} - \frac{\alpha}{\omega^2} e_{16}^T e_{16} \\ &\quad - e_1^T U e_{15} - e_{15}^T U^T e_1 + e_1^T U D e_5 + e_5^T D^T U^T e_1 \\ &\quad + e_1^T U D_1 e_6 + e_6^T D_1^T U^T e_1 + e_1^T U B e_{16} + e_{16}^T B^T U^T e_1 \\ &\quad - e_{15}^T S A e_1 - e_1^T A^T S^T e_{15} + e_{15}^T S D e_5 + e_5^T D^T S^T e_{15} \\ &\quad + e_{15}^T S D_1 e_6 + e_6^T D_1^T S^T e_{15} + e_{15}^T S B e_{16} + e_{16}^T B^T S^T e_{15} \\ &\quad + e_1^T P D e_5 + e_5^T D^T P e_1 + e_1^T P D_1 e_6 + e_6^T D_1^T P e_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e_1^T P B e_{16} + e_{16}^T B^T P e_1 - e_5^T (\Theta_2 - \Theta_1) W e_{15} \\
& - e_{15}^T W^T (\Theta_2 - \Theta_1) e_5 + e_1^T W^T (\Sigma_2 \Theta_2 - \Sigma_1 \Theta_1) W e_{15} \\
& + e_{15}^T W^T (\Sigma_2 \Theta_2 - \Sigma_1 \Theta_1) W e_1, \\
\Xi_2 & = G_4^T \Lambda_1 G_5 + G_5^T \Lambda_1 G_4, \quad \Xi_3 = G_6^T \Lambda_2 G_7 + G_7^T \Lambda_2 G_6, \\
\Xi_4 & = G_8^T \Lambda_3 G_9 + G_9^T \Lambda_3 G_8, \quad \Xi_5 = G_{10}^T \Lambda_4 G_{11} + G_{11}^T \Lambda_4 G_{10}, \\
\Xi_6 & = G_{12}^T \Lambda_5 G_{13} + G_{13}^T \Lambda_5 G_{12}, \quad \Xi_7 = G_{14}^T \Lambda_6 G_{15} + G_{15}^T \Lambda_6 G_{14}, \\
\Xi_8 & = G_{16}^T \Lambda_7 G_{17} + G_{17}^T \Lambda_7 G_{16}, \quad \Xi_9 = G_{18}^T \Lambda_8 G_{19} + G_{19}^T \Lambda_8 G_{18}, \\
F & = \begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0 & 0 \\ I_n & I_n & -2I_n & 0 \\ I_n & -I_n & 6I_n & -6I_n \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \text{col}\{FG_2, FG_3\}.
\end{aligned}$$

Định lý dưới đây đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại bao của tập đạt được tiên ứng với tập ellipsoid cho trước  $\Omega_0 = \{\varphi(s) \in C^1([- \tau_2, 0], \mathbb{R}^n) : \varphi^T(s) E \varphi(s) \leq 1, \forall s \in [- \tau_2, 0]\}$ , ở đó  $E$  là một ma trận đối xứng, xác định dương cho trước, đối với mạng nơ ron tổng quát (1.23).

**Định lý 1.3.** *Giả sử rằng Giả thiết 1.1 được thỏa mãn. Nếu tồn tại chín hằng số dương  $\alpha, \beta_0, \beta_1, q_1, q_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ , năm ma trận  $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ , mười ma trận  $\Theta_1, \Theta_2, \Lambda_j (j = 1, \dots, 8) \in \mathbb{D}_n^+$ , hai ma trận  $U, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  và một ma trận  $X \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  sao cho các điều kiện dưới đây thỏa mãn*

$$P \leq \beta_1 I_n, \quad Q_1 \leq q_1 I_n, \quad Q_2 \leq q_2 I_n, \quad R_1 \leq r_1 I_n, \quad R_2 \leq r_2 I_n, \quad (1.28a)$$

$$\Theta_1 \leq \theta_1 I_n, \quad \Theta_2 \leq \theta_2 I_n, \quad (1.28b)$$

$$P \geq \frac{1}{\beta_0^2} I_n, \quad (1.28c)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X \\ X^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.28d)$$

$$\Omega = \sum_{k=1}^9 \Xi_k - G_1^T F^T \bar{R}_1 F G_1 - \Gamma^T \Phi \Gamma < 0, \quad (1.28e)$$

$$\kappa_1 \mu_0 + \kappa_2 \mu^2 \leq 1, \quad (1.28f)$$

ở đó  $\mu_0 = \frac{1}{\lambda_{\min}(E)}$ , và

$$\begin{aligned}
\kappa_1 & = \beta_1 + \frac{q_1(1 - e^{-\alpha\tau_1}) + q_2(e^{-\alpha\tau_1} - e^{-\alpha\tau_2})}{\alpha} \\
& \quad + (\theta_1 + \theta_2) \lambda_{\max}(W^T \Sigma_3 W), \\
\kappa_2 & = r_1 \tau_1 \left( \frac{\tau_1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha\tau_1} - 1) \right)
\end{aligned}$$

$$+ r_2 \tau_{12} \left( \frac{\tau_{12}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha \tau_2} - e^{-\alpha \tau_1}) \right),$$

thì tập đạt được tiến của hệ (1.23) được bao bởi hình cầu  $\mathcal{B}(0, \beta_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \beta_0\}$ .

*Chứng minh.* Xét hàm Lyapunov–Krasovskii sau đây

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t),$$

ở đó

$$\begin{aligned} V_1(x_t) &= x^T(t) P x(t) + 2e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^n \theta_{1i} \int_0^{W^i x(t)} (f_i(s) - l_i^- s) ds \\ &\quad + 2e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^n \theta_{2i} \int_0^{W^i x(t)} (l_i^+ s - f_i(s)) ds \\ V_2(x_t) &= \int_{t-\tau_1}^t e^{\alpha(s-t)} x^T(s) Q_1 x(s) ds \\ &\quad + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{\alpha(s-t)} x^T(s) Q_2 x(s) ds, \\ V_3(x_t) &= \tau_1 \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+s}^t e^{\alpha(u-t)} \dot{x}^T(u) R_1 \dot{x}(u) du ds \\ &\quad + \tau_{12} \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+s}^t e^{\alpha(u-t)} \dot{x}^T(u) R_2 \dot{x}(u) du ds, \end{aligned}$$

ở đó  $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ ,  $\Theta_1 = \text{diag}\{\theta_{11}, \dots, \theta_{1n}\}$ ,  $\Theta_2 = \text{diag}\{\theta_{21}, \dots, \theta_{2n}\} \in \mathbb{D}_n^+$ ,  $\Lambda_j = \text{diag}\{\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jn}\} \in \mathbb{D}_n^+$  ( $j = 1, \dots, 8$ ) và  $W^i$  ký hiệu là hàng thứ  $i$  của ma trận  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Từ điều kiện (1.28c), ta có bất đẳng thức dưới đây đúng

$$V(x_t) \geq \frac{\|x(t)\|^2}{\beta_0^2}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.29)$$

Từ ràng buộc

$$-\dot{x}(t) - Ax(t) + Df(Wx(t)) + D_1 f(Wx(t - \tau(t))) + B\omega(t) = 0,$$

ta có

$$\begin{aligned} [2x^T(t)U + 2\dot{x}^T(t)S] &\left[ -\dot{x}(t) - Ax(t) + Df(Wx(t)) \right. \\ &\quad \left. + D_1 f(Wx(t - \tau(t))) + B\omega(t) \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Lấy đạo hàm của  $V(x_t)$  theo  $t$  dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ (1.23) và sử dụng điều kiện (1.30), ta thu được ước lượng dưới đây

$$\begin{aligned}
& \dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) - \frac{\alpha}{\omega^2} \omega^T(t) \omega(t) \\
& \leq \chi_0^T(t) \Xi_1 \chi_0(t) - \tau_1 e^{-\alpha \tau_1} \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \\
& \quad - \tau_{12} e^{-\alpha \tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Áp dụng Bổ đề 1.1, ta thu được đánh giá dưới đây

$$-\tau_1 e^{-\alpha \tau_1} \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \leq -\chi_0^T(t) G_1^T F^T \bar{R}_1 F G_1 \chi_0(t). \tag{1.32}$$

Tách tích phân sau thành tổng của hai tích phân

$$\begin{aligned}
& -\tau_{12} e^{-\alpha \tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\
& = -\tau_{12} e^{-\alpha \tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\
& \quad - \tau_{12} e^{-\alpha \tau_2} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds
\end{aligned}$$

và sử dụng các Bổ đề 1.1 và 1.2, tích phân thứ hai trong biểu thức (1.31) có thể ước lượng như sau

$$\begin{aligned}
& -\tau_{12} e^{-\alpha \tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\
& \leq -\frac{\tau_{12}}{\tau(t) - \tau_1} \chi_0^T(t) G_2^T F^T \bar{R}_2 F G_2 \chi_0(t) \\
& \quad - \frac{\tau_{12}}{\tau_2 - \tau(t)} \chi_0^T(t) G_3^T F^T \bar{R}_2 F G_3 \chi_0(t) \\
& = -\chi_0^T(t) \Gamma^T \begin{bmatrix} \frac{\tau_{12}}{\tau(t) - \tau_1} \bar{R}_2 & 0 \\ 0 & \frac{\tau_{12}}{\tau_2 - \tau(t)} \bar{R}_2 \end{bmatrix} \Gamma \chi_0(t) \\
& \leq -\chi_0^T(t) \Gamma^T \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X \\ X^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \Gamma \chi_0(t) \\
& = -\chi_0^T(t) \Gamma^T \Phi \Gamma \chi_0(t).
\end{aligned} \tag{1.33}$$



Từ điều kiện (1.27), với bất kỳ  $\lambda_{ji} \geq 0, j = 1, \dots, 8, i = 1, \dots, n$ , ta có

$$\begin{aligned}
& 2 [f_i(W^i x(t)) - l_i^- W^i x(t)] \lambda_{1i} [l_i^+ W^i x(t) - f_i(W^i x(t))] \geq 0; \\
& 2 [f_i(W^i x(t - \tau(t))) - l_i^- W^i x(t - \tau(t))] \lambda_{2i} \\
& \quad \times [l_i^+ W^i x(t - \tau(t)) - f_i(W^i x(t - \tau(t)))] \geq 0; \\
& 2 [f_i(W^i x(t)) - f_i(W^i x(t - \tau(t))) \\
& \quad - l_i^- W^i (x(t) - x(t - \tau(t)))] \lambda_{3i} [l_i^+ W^i (x(t) - x(t - \tau(t))) \\
& \quad - f_i(W^i x(t)) + f_i(W^i x(t - \tau(t)))] \geq 0; \\
& 2 [f_i(W^i x(t)) - f_i(W^i x(t - \tau_1)) - l_i^- W^i (x(t) - x(t - \tau_1))] \\
& \quad \times \lambda_{4i} [l_i^+ W^i (x(t) - x(t - \tau_1))] \geq 0; \\
& 2 [f_i(W^i x(t)) - f_i(W^i x(t - \tau_2)) - l_i^- W^i (x(t) - x(t - \tau_2))] \\
& \quad \times \lambda_{5i} [l_i^+ W^i (x(t) - x(t - \tau_2)) - f_i(W^i x(t)) \\
& \quad + f_i(W^i x(t - \tau_2))] \geq 0; \\
& 2 [f_i(W^i x(t - \tau_2)) - f_i(W^i x(t - \tau_1)) \\
& \quad - l_i^- W^i (x(t - \tau_2) - x(t - \tau_1))] \lambda_{6i} \\
& \quad \times [l_i^+ W^i (x(t - \tau_2) - x(t - \tau_1)) - f_i(W^i x(t - \tau_2)) \\
& \quad + f_i(W^i x(t - \tau_1))] \geq 0; \\
& 2 [f_i(W^i x(t - \tau_2)) - f_i(W^i x(t - \tau(t))) \\
& \quad - l_i^- W^i (x(t - \tau_2) - x(t - \tau(t)))] \lambda_{7i} \\
& \quad \times [l_i^+ W^i (x(t - \tau_2) - x(t - \tau(t))) - f_i(W^i x(t - \tau_2)) \\
& \quad + f_i(W^i x(t - \tau(t)))] \geq 0; \\
& 2 [f_i(W^i x(t - \tau(t))) - f_i(W^i x(t - \tau_1)) \\
& \quad - l_i^- W^i (x(t - \tau(t)) - x(t - \tau_1))] \lambda_{8i} \\
& \quad \times [l_i^+ W^i (x(t - \tau(t)) - x(t - \tau_1)) - f_i(W^i x(t - \tau(t)))] \\
& \quad + f_i(W^i x(t - \tau_1))] \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.34}
\end{aligned}$$

điều này suy ra

$$\begin{aligned}
& 2\chi_0^T(t)G_4^T\Lambda_1G_5\chi_0(t) \geq 0; \\
& 2\chi_0^T(t)G_6^T\Lambda_2G_7\chi_0(t) \geq 0; \\
& 2\chi_0^T(t)G_8^T\Lambda_3G_9\chi_0(t) \geq 0; \\
& 2\chi_0^T(t)G_{10}^T\Lambda_4G_{11}\chi_0(t) \geq 0; \\
& 2\chi_0^T(t)G_{12}^T\Lambda_5G_{13}\chi_0(t) \geq 0; \\
& 2\chi_0^T(t)G_{14}^T\Lambda_6G_{15}\chi_0(t) \geq 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\chi_0^T(t)G_{16}^T\Lambda_7G_{17}\chi_0(t) &\geq 0; \\ 2\chi_0^T(t)G_{18}^T\Lambda_8G_{19}\chi_0(t) &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Do đó, từ (1.31) tới (1.35), ta thu được đánh giá dưới đây

$$\dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) - \frac{\alpha}{\omega^2} \omega^T(t) \omega(t) \leq \chi_0^T(t) \Omega \chi_0(t). \quad (1.36)$$

Từ (1.28d), (1.28e) và (1.36), ta có

$$\dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) - \frac{\alpha}{\omega^2} \omega^T(t) \omega(t) \leq 0. \quad (1.37)$$

Sử dụng (1.28a), (1.28b), (1.28f) và bằng một số tính toán trực tiếp, ta có

$$V(x_0) \leq \kappa_1 \|\varphi(0)\|^2 + \kappa_2 \mu^2 \leq \kappa_1 \mu_0 + \kappa_2 \mu^2 \leq 1.$$

Điều này suy ra  $V(x_t) \leq 1$  theo như Bổ đề 1.3. Sử dụng bất đẳng thức (1.29), ta thu được đánh giá sau

$$\|x(t)\| \leq \beta_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn.  $\square$

**Nhận xét 1.6.** Chú ý rằng khi ta cố định các số  $\alpha$  và  $\beta_0$  thì các bất đẳng thức ma trận (1.28a)-(1.28e) trở thành bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs). Do đó, ta có thể kết hợp phương pháp tìm kiếm hai chiều kết hợp với thuật toán tối ưu lồi trong MATLABs LMI Control Toolbox (xem [14]) để giải các bất đẳng thức ma trận này. Tương tự như trong bài báo [67], để tìm bao nhỏ nhất của tập đạt được tiến của hệ (1.23) ứng với tập ban đầu cho trước  $\Omega_0 = \{\varphi(s) \in C_1([-\tau_2, 0], \mathbb{R}^n) : \varphi^T(s) E \varphi(s) \leq 1, \forall s \in [-\tau_2, 0]\}$ , tức là tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của  $\beta_0$ , ta đi giải bài toán tối ưu lồi sau đây:

$$\begin{aligned} \text{(OP3)} : \quad & \min \beta_0. \\ & (1.28a) - (1.28e). \end{aligned}$$

**Nhận xét 1.7.** Trong [81], các tác giả nghiên cứu bài toán tìm bao của tập đạt được cho một lớp mạng nơ ron bằng cách sử tiếp cận sử dụng định lý Razumikhin và xét trường hợp độ trễ là hàm liên tục có cận dưới là 0. Trong khi đó, Định lý 1.3 giải bài toán tìm bao của tập đạt được tiến trong trường hợp độ trễ biến thiên trên một khoảng  $[\tau_1, \tau_2]$  với  $\tau_1 \geq 0$  bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii. Ngoài ra, chúng tôi còn xét lớp hệ tổng quát hơn và bài toán tổng quát hơn so với kết quả nghiên cứu trong [81].

Ngoài ra, khi  $\omega(t) = 0, \forall t \geq 0$ , Định lý 1.3 quy về một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của mạng nơ ron tổng quát (1.23).

**Hệ quả 1.4.** *Giả sử rằng Giả thiết 1.1 được thỏa mãn. Hệ (1.23) với  $\omega(t) \equiv 0$ , ổn định mũ với tốc độ hội tụ mũ  $\alpha^* = \frac{\alpha}{2} > 0$  nếu tồn tại năm ma trận  $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ , mười ma trận  $\Theta_1, \Theta_2, \Lambda_j (j = 1, \dots, 8) \in \mathbb{D}_n^+$ , hai ma trận  $U, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  và một ma trận  $X \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  sao cho các điều kiện dưới đây được thỏa mãn:*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X \\ X^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.38a)$$

$$\Sigma = \Psi_1 + \sum_{k=2}^9 \Xi_k - G_1^T F^T \bar{R}_1 F G_1 - \Gamma^T \Phi \Gamma < 0, \quad (1.38b)$$

ở đó

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & e_1^T (-PA - A^T P + \alpha P + Q_1 - UA - A^T U^T) e_1 \\ & + e_2^T (-e^{-\alpha\tau_1} Q_1 + e^{-\alpha\tau_1} Q_2) e_2 - e^{-\alpha\tau_2} e_4^T Q_2 e_4 \\ & + e_{15}^T (\tau_1^2 R_1 + \tau_{12}^2 R_2 - S - S^T) e_{15} \\ & - e_1^T U e_{15} - e_{15}^T U^T e_1 + e_1^T U D e_5 + e_5^T D^T U^T e_1 \\ & + e_1^T U D_1 e_6 + e_6^T D_1^T U^T e_1 \\ & - e_{15}^T S A e_1 - e_1^T A^T S^T e_{15} + e_{15}^T S D e_5 + e_5^T D^T S^T e_{15} \\ & + e_{15}^T S D_1 e_6 + e_6^T D_1^T S^T e_{15} + e_{15}^T S B e_{16} + e_{16}^T B^T S^T e_{15} \\ & + e_1^T P D e_5 + e_5^T D^T P e_1 + e_1^T P D_1 e_6 + e_6^T D_1^T P e_1 \\ & - e_5^T (\Theta_2 - \Theta_1) W e_{15} - e_{15}^T W^T (\Theta_2 - \Theta_1) e_5 \\ & + e_1^T W^T (\Sigma_2 \Theta_2 - \Sigma_1 \Theta_1) W e_{15} \\ & + e_{15}^T W^T (\Sigma_2 \Theta_2 - \Sigma_1 \Theta_1) W e_1. \end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu bài toán tìm bao của tập đạt được lồi cho hệ (1.23). Cụ thể hơn, chúng tôi sẽ đưa ra một điều kiện đủ cho việc tồn tại một hình cầu  $\mathcal{B}(0, \mu_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \mu_0\}$  chứa tập đạt được lồi của hệ (1.23)-(1.26) tương ứng với một tập mục tiêu cho trước  $\Lambda_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T F x \leq 1\}$ , ở đó  $F$  là một ma trận đối xứng, xác định dương cho trước. Bằng các kỹ thuật tương tự như Định lý 1.3, chúng tôi thu được kết quả sau đây:

**Định lý 1.4.** *Giả sử Giả thiết 1.1 được thỏa mãn. Nếu tồn tại chín hằng số dương  $\alpha, \mu_0, \beta_1, q_1, q_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ , năm ma trận  $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ , mười*

ma trận  $\Theta_1, \Theta_2, \Lambda_j (j = 1, \dots, 8) \in \mathbb{D}_n^+$ , hai ma trận  $U, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  và một ma trận  $X \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  sao cho các điều kiện dưới đây được thỏa mãn

$$P \leq \beta_1 I_n, \quad Q_1 \leq q_1 I_n, \quad Q_2 \leq q_2 I_n, \quad R_1 \leq r_1 I_n, \quad R_2 \leq r_2 I_n, \quad (1.39a)$$

$$\Theta_1 \leq \theta_1 I_n, \quad \Theta_2 \leq \theta_2 I_n, \quad (1.39b)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X \\ X^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.39c)$$

$$P - F > 0, \quad (1.39d)$$

$$\Omega = \sum_{k=1}^9 \Xi_k - G_1^T F^T \bar{R}_1 F G_1 - \Gamma^T \Phi \Gamma < 0, \quad (1.39e)$$

$$\kappa_1 \mu_0^2 + \kappa_2 \mu^2 \leq 1, \quad (1.39f)$$

ở đó

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \beta_1 + \frac{q_1(1 - e^{-\alpha\tau_1}) + q_2(e^{-\alpha\tau_1} - e^{-\alpha\tau_2})}{\alpha} \\ &\quad + (\theta_1 + \theta_2) \lambda_{\max}(W^T \Sigma_3 W), \\ \kappa_2 &= r_1 \tau_1 \left( \frac{\tau_1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha\tau_1} - 1) \right) \\ &\quad + r_2 \tau_{12} \left( \frac{\tau_{12}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha\tau_2} - e^{-\alpha\tau_1}) \right), \end{aligned}$$

thì tập đạt được lồi của hệ (1.23) được bao bởi hình cầu  $\mathcal{B}(0, \mu_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \mu_0\}$ .

**Nhận xét 1.8.** Tương tự như Nhận xét 1.6, bài toán tối ưu sau được đưa ra để tìm giá trị lớn nhất có thể có của  $\mu_0$ :

$$\begin{aligned} \text{(OP4)} : \quad & \max \mu_0. \\ & (1.39a) - (1.39f). \end{aligned}$$

Tiếp theo chúng tôi đưa ra một vài ví dụ số để minh chứng cho các kết quả lý thuyết.

**Ví dụ 1.3.** Xét mạng nơ ron tổng quát có trễ biến thiên (1.23) với các tham số

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.1 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix}, \\ W &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Bảng 1.7: Giá trị nhỏ nhất có thể có của  $\beta_0$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ 

$\tau_1$	0	0.2	0.4	0.6
Định lý 1.3	1.105	1.092	1.091	1.090

và  $\|\omega(t)\| \leq 1$ . Hàm kích hoạt của mạng nơ ron (1.23) cho bởi

$$g_i(x_i) = 0.5 (|x_i + 1| - |x_i - 1|) \quad (i = 1, 2).$$

Để dàng kiểm tra được rằng điều kiện (1.27) được thỏa mãn với  $\Sigma_1 = \text{diag}\{0, 0\}$  và  $\Sigma_2 = \text{diag}\{1, 1\}$ . Độ trễ  $\tau(t)$  thỏa mãn  $\tau(t) \in [\tau_1, 0.9]$ . Trong ví dụ này, chúng tôi xét hai trường hợp sau:

- (a) Cho trước  $\mu = 0.5$ . Tìm bao nhỏ nhất có thể có chứa tập đạt được tiến tương ứng với tập ban đầu cho trước  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$ .
- (b) Cho trước  $\mu = 0.5$ . Tìm bao lớn nhất có thể có của tập đạt được lùi tương ứng với tập mục tiêu cho trước  $\Lambda \equiv \mathcal{B}(0, 1.8)$ .

*Lời giải:* (a) Sử dụng Định lý 1.3 và Nhận xét 1.6, hình cầu nhỏ nhất có thể có  $\mathcal{B}(0, \beta_0)$ , chứa tập đạt được tiến của hệ ứng với tập điều kiện ban đầu cho trước  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$  được cho trong Bảng 1.7 với các giá trị nhỏ nhất có thể có của  $\beta_0$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ . Để minh họa bằng hình vẽ, ta chọn độ trễ là hàm  $\tau(t)$  như sau  $\tau(t) = 0.6 + 0.3 \sin^2\left(\frac{10t}{4}\right)$ , véc tơ nhiễu  $\omega(t) \in \{a \sin(t), a = -1, -0.9, \dots, 1\} \cup \{-1, -0.9, \dots, 1\}$ , điều kiện ban đầu  $(x_1(t), x_2(t))^T \in \{(b \sin(t/2), \pm\sqrt{1-b^2} \cos(t/2)), b = -1, -0.9, \dots, 1\} \cup \{(b, \pm\sqrt{1-b^2}), b = -1, -0.9, \dots, 0.9, 1\}$ . Ta có các điều kiện trong Định lý 1.3 và Nhận xét 1.7 được thỏa mãn với  $\alpha = 0.3, \beta_0 = 1.090, \beta_1 = 0.8449, q_1 = 0.1439, q_2 = 0.1626, r_1 = 0.4919, r_2 = 1.0238, \theta_1 = 0.0045, \theta_2 = 0.0037$ , và

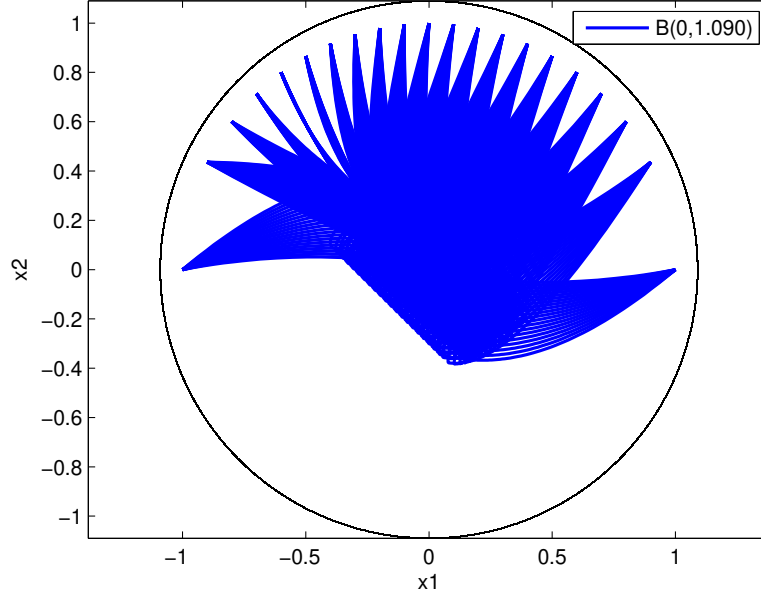
$$P = \begin{bmatrix} 0.8435 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.8427 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0.0963 & 0.0408 \\ 0.0408 & 0.1060 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.1266 & 0.0363 \\ 0.0363 & 0.1185 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 0.4574 & -0.0126 \\ -0.0126 & 0.1271 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.9609 & -0.0702 \\ -0.0702 & 0.2949 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0.0140 & 0.0511 \\ -0.0182 & -0.2376 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.2589 & -0.0119 \\ -0.0100 & 0.1192 \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} 0.0026 & 0 \\ 0 & 0.0022 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} 0.0018 & 0 \\ 0 & 0.0011 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} 2.8748 & 0 \\ 0 & 1.8989 \end{bmatrix},$$



Hình 1.5: Hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.090)$  chứa tập đạt được tiến của hệ ứng với tập điều kiện ban đầu cho trước  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$  của Ví dụ 1.3

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0.1019 & 0 \\ 0 & 0.1726 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{bmatrix} 0.0745 & 0 \\ 0 & 0.0023 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_4 = \begin{bmatrix} 0.2061 & 0 \\ 0 & 0.0052 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_5 = \begin{bmatrix} 0.0339 & 0 \\ 0 & 0.0032 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_6 = \begin{bmatrix} 0.0759 & 0 \\ 0 & 0.0300 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_7 = \begin{bmatrix} 0.6309 & 0 \\ 0 & 0.0820 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_8 = \begin{bmatrix} 0.3717 & 0 \\ 0 & 0.0271 \end{bmatrix},$$

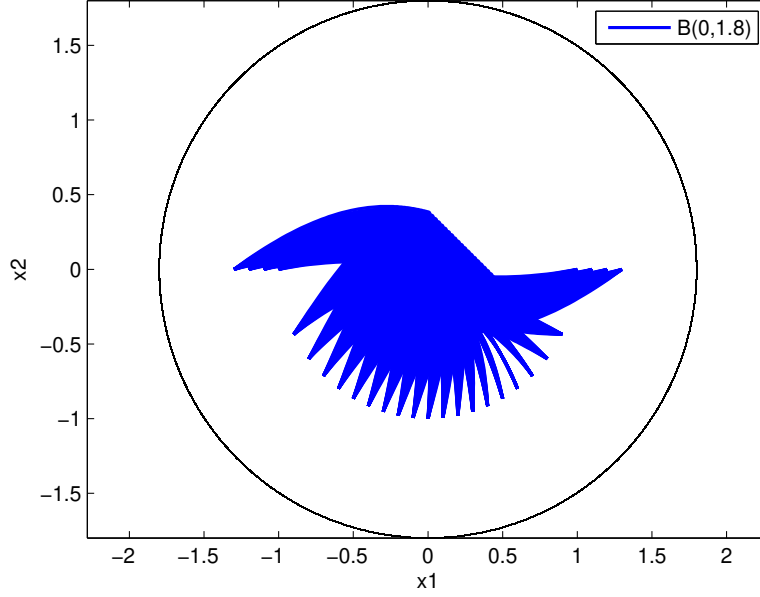
$$X = \begin{bmatrix} -17.25 & -8.19 & 0.01 & -0.04 & -0.00 & -0.01 \\ -11.05 & -16.78 & -0.07 & -0.00 & -0.02 & -0.00 \\ -0.10 & 0.04 & -0.02 & 0.00 & -0.01 & 0.00 \\ -0.03 & -0.02 & -0.01 & -0.00 & -0.00 & -0.00 \\ -0.01 & 0.01 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 \\ -0.01 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 \end{bmatrix} \times 10^{-2}.$$

Bằng cách sử dụng Định lý 1.3, mọi quỹ đạo của hệ bắt đầu từ trong hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1)$  đều được bao bởi hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.090)$ . Hình 1.5 chỉ ra rằng hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.090)$  chứa tập đạt được tiến của hệ ứng với tập điều kiện ban đầu cho trước  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$ .

(b) Sử dụng Định lý 1.4 và Nhận xét 1.8, chúng tôi tìm hình cầu lớn nhất

Bảng 1.8: Giá trị lớn nhất có thể có của  $\mu_0$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ 

$\tau_1$	0	0.2	0.4	0.6
Định lý 1.4	1.727	1.744	1.753	1.756

Hình 1.6: Hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.8)$  chứa tất các véc tơ trạng thái của hệ xuất phát từ hình cầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1.756)$  trong Ví dụ 1.3

có thể có  $\mathcal{B}(0, \mu_0)$ , chứa tập đạt được lồi của hệ tương ứng với tập mục tiêu cho trước  $\Lambda \equiv \mathcal{B}(0, 1.8)$ . Bảng 1.8 liệt kê các giá trị lớn nhất có thể có của  $\mu_0$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ .

Để minh họa bằng hình vẽ, chúng tôi chọn độ trễ  $\tau(t)$  là hàm  $\tau(t) = 0.6 + 0.3 \sin^2\left(\frac{10t}{4}\right)$ , véc tơ nhiễu  $\omega(t) \in \{-1, -0.9, \dots, 1\}$  và điều kiện ban đầu  $(x_1(t), x_2(t))^T \in \{(b, \pm\sqrt{1-b^2}), b = -1.3, \dots, 1.3\}$ .

Quan sát thấy rằng, các điều kiện trong Định lý 1.4 và Nhận xét 1.8 được thỏa mãn với  $\alpha = 0.2, \mu_0 = 1.756, \beta_1 = 0.3087, q_1 = 2.3328 \times 10^{-4}, q_2 = 0.0497, r_1 = 0.1597, r_2 = 0.2336, \theta_1 = 5.5070 \times 10^{-5}, \theta_2 = 4.8713 \times 10^{-5}$  và

$$P = \begin{bmatrix} 0.3087 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.3087 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0.1790 & 0.0459 \\ 0.0459 & 0.1397 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.0398 & 0.0159 \\ 0.0159 & 0.0242 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 0.1585 & -0.0010 \\ -0.0010 & 0.0597 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.2248 & -0.0318 \\ -0.0318 & 0.0876 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -0.0262 & 0.0376 \\ -0.0593 & -0.0465 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
S &= \begin{bmatrix} 0.0872 & -0.0070 \\ -0.0068 & 0.0433 \end{bmatrix}, \Theta_1 = \begin{bmatrix} 0.3096 & 0 \\ 0 & 0.2753 \end{bmatrix} \times 10^{-4}, \\
\Theta_2 &= \begin{bmatrix} 0.2435 & 0 \\ 0 & 0.2002 \end{bmatrix} \times 10^{-4}, \Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1.1567 & 0 \\ 0 & 1.0543 \end{bmatrix}, \\
\Lambda_2 &= \begin{bmatrix} 0.0674 & 0 \\ 0 & 0.0521 \end{bmatrix}, \Lambda_3 = \begin{bmatrix} 0.0171 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}, \\
\Lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0.0176 & 0 \\ 0 & 0.0003 \end{bmatrix}, \Lambda_5 = \begin{bmatrix} 0.0024 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}, \\
\Lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0.0042 & 0 \\ 0 & 0.0023 \end{bmatrix}, \Lambda_7 = \begin{bmatrix} 0.0653 & 0 \\ 0 & 0.0074 \end{bmatrix}, \\
\Lambda_8 &= \begin{bmatrix} 0.0346 & 0 \\ 0 & 0.0009 \end{bmatrix}, \\
X &= \begin{bmatrix} -10.33 & -5.57 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 \\ -1.69 & -2.22 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 \\ -0.01 & 0.01 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 \\ -0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 \\ -0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.01 & -0.01 \\ -0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 \end{bmatrix} \times 10^{-2}.
\end{aligned}$$

Theo Định lý 1.4, mọi quỹ đạo của véc tơ trạng thái của hệ bắt đầu từ trong hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.756)$  đều nằm trong hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.8)$ . Hình 1.6 chỉ ra rằng hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.8)$  chứa tất cả các véc tơ trạng thái của hệ xuất phát từ hình cầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1.756)$ .

**Ví dụ 1.4.** Xét mạng nơ ron (1.23) với các tham số như trong Ví dụ 1 trong [43]

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 3.5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mục đích của ví dụ này là để so sánh kết quả của chúng tôi với các kết quả đã có.

(a) Khi hàm kích hoạt thỏa mãn điều kiện (1.27) với  $l_1^- = l_2^- = 0.998$ ,  $l_1^+ = l_2^+ = 1$  và độ trễ là hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi và cho trước  $\alpha^* = 0.4$ . Bảng 1.9 cho ta sự so sánh về giá trị lớn nhất của  $\tau_2$  với các giá trị khác nhau của cận dưới  $\tau_1$  giữa Hệ quả 1.4 và kết quả trong [43].

(b) Khi hàm kích hoạt thỏa mãn điều kiện (1.27) với  $l_1^- = l_2^- = 0$ ,  $l_1^+ = l_2^+ = 1$  và độ trễ là hàm liên tục nhưng không nhất thiết khả vi. Bảng 1.10 cho ta sự



Bảng 1.9: So sánh giá trị của  $\tau_2$  với  $\alpha^* = 0.4$  và các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ 

$\tau_1$	0	2	4	6
Liu Y. cùng các cộng sự [43]	0.9526	2.5712	4.3200	6.1321
Hệ quả 1.4	1.9073	3.3465	4.9058	6.5221

Bảng 1.10: Giá trị lớn nhất có thể có của  $\alpha^*$ 

Phương pháp	Giá trị lớn nhất có thể có của tốc độ hội tụ mũ $\alpha^*$
Wu M cùng các cộng sự [71]	0.8169
Ji M.D. cùng các cộng sự [18]	0.8217
Hệ quả 1.4	0.9530

so sánh về giá trị lớn nhất có thể có của tốc độ hội tụ mũ  $\alpha^*$  với  $\tau_1 = 0, \tau_2 = 1$  giữa Hệ quả 1.4 và kết quả trong [18, 71].

Từ các Bảng 1.9 và 1.10, ta thấy tiêu chuẩn về tính ổn định mũ trong Hệ quả 1.4 là ít bảo thủ hơn so với các kết quả trong [18, 43, 71].

#### 1.4. Bài toán tìm bao của tập đạt được của mạng nơ ron chuyển mạch có trễ hỗn hợp

Xét mạng nơ ron chuyển mạch có trễ hỗn hợp biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -A_{\sigma(t)}x(t) + W_{\sigma(t)}g(x(t)) + D_{\sigma(t)}g(x(t - \tau(t))) \\ \quad + E_{\sigma(t)} \int_{t-\tau(t)}^t g(x(s))ds + B_{\sigma(t)}\omega(t), \\ x(s) \equiv \varphi(s), \quad s \in [-\tau_2, 0], \end{cases} \quad (1.40)$$

ở đó  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  là véc tơ trạng thái của mạng nơ ron,  $g(x(t)) = [g_1(x_1(t)) \ \dots \ g_n(x_n(t))]^T$ ,  $g(x(t - \tau(t))) = [g_1(x_1(t - \tau(t))) \ g_2(x_2(t - \tau(t))) \ \dots \ g_n(x_n(t - \tau(t)))]^T \in \mathbb{R}^n$  là các hàm kích hoạt của mạng nơ ron.  $\sigma(\cdot)$  là quy tắc chuyển mạch giữa các hệ con của hệ (1.40), hàm  $\sigma(\cdot)$  phụ thuộc vào véc tơ trạng thái  $x(t)$ ,  $\sigma(\cdot)$  lấy giá trị trong tập hữu hạn  $\mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}$ ;  $A_i = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là ma trận đường chéo chính, xác định dương,  $W_i, D_i, E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , là các ma trận trọng số liên kết các nơ ron của mạng,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , là ma trận thực, hằng số cho trước. Độ trễ  $\tau(t)$  là hàm liên tục thỏa mãn

$$0 \leq \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2. \quad (1.41)$$

Hàm  $\varphi(s) \in C^1([-\tau_2, 0], \mathbb{R}^n)$  là điều kiện ban đầu thỏa mãn điều kiện dưới đây

$$\max_{s \in [-\tau_2, 0]} \dot{\varphi}^T(s) \dot{\varphi}(s) \leq \mu^2. \quad (1.42)$$

Véc tơ nhiễu  $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$ , không biết nhưng thỏa mãn điều kiện dưới đây

$$\omega^T(t) \omega(t) \leq \omega^2, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.43)$$

ở đó  $\tau_1, \tau_2, \mu, \omega$  là các hằng số không âm.

Giả sử rằng các hàm kích hoạt  $g_i(\cdot)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) liên tục,  $g_i(0) = 0$ , và tồn tại các hằng số  $l_i^-, l_i^+$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sao cho

$$l_i^- \leq \frac{g_i(x) - g_i(y)}{x - y} \leq l_i^+, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y. \quad (1.44)$$

**Định nghĩa 1.4.** (i) Cho trước  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$  là một tập lồi đóng, bị chặn chứa điểm gốc 0. Một tập  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là tập đạt được tiến (forwards reachable set) tương ứng với tập ban đầu cho trước  $\Omega_0$  của hệ (1.40) với các điều kiện (1.41), (1.42) và (1.43) dưới quy tắc chuyển mạch  $\sigma(\cdot)$  nếu với mọi điều kiện ban đầu  $\varphi(s) \in \Omega_0, \forall s \in [-\tau_2, 0]$ , nghiệm của hệ thỏa mãn  $x(t, \varphi(t), \omega(t)) \in \Omega, \forall t \geq 0$ .

(ii) Cho trước  $\Lambda_0 \subset \mathbb{R}^n$  là một tập lồi đóng, bị chặn chứa điểm gốc 0. Tập  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là tập đạt được lùi (backwards reachable set) tương ứng với tập mục tiêu  $\Lambda_0$  của hệ (1.40) với các điều kiện (1.41), (1.42) và (1.43) dưới quy tắc chuyển mạch  $\sigma(\cdot)$  nếu với mọi hàm điều kiện ban đầu  $\varphi(s) \in \Lambda, \forall s \in [-\tau_2, 0]$ , nghiệm của hệ thỏa mãn  $x(t, \varphi(t), \omega(t)) \in \Lambda_0, \forall t \geq 0$ .

Để thuận tiện cho việc trình bày các kết quả tiếp theo, ta ký hiệu

$$\begin{aligned} e_j &= [0_{n \times (j-1)n} \quad I_n \quad 0_{n \times (18-j)n} \quad 0_{n \times m}]^T, \quad j = 1, 2, \dots, 18, \\ e_{19} &= [0_{m \times 18n} \quad I_m]^T, \quad \tau_{12} = \tau_2 - \tau_1, \end{aligned}$$

các véc tơ

$$\eta(t) = [x^T(t) \quad g^T(x(t))]^T, \quad \chi_0(t) = [\chi_{01}^T(t) \quad \chi_{02}^T(t) \quad \chi_{03}^T(t) \quad \chi_{04}^T(t) \quad \chi_{05}^T(t)]^T,$$

ở đó

$$\chi_{01}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \\ x(t - \tau(t)) \\ x(t - \tau_2) \end{bmatrix}, \quad \chi_{02}(t) = \begin{bmatrix} g(x(t)) \\ g(x(t - \tau(t))) \\ g(x(t - \tau_2)) \\ g(x(t - \tau_1)) \end{bmatrix},$$

$$\chi_{03}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} \int_{t-\tau_1}^t x(s) ds \\ \frac{1}{\tau(t)-\tau_1} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds \\ \frac{1}{\tau_2-\tau(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \end{bmatrix},$$

$$\chi_{04}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\tau_1^2} \int_{t-\tau_1}^t \int_s^t x(u) duds \\ \frac{2}{(\tau(t)-\tau_1)^2} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \int_s^{t-\tau_1} x(u) duds \\ \frac{2}{(\tau_2-\tau(t))^2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \int_s^{t-\tau(t)} x(u) duds \end{bmatrix}, \quad \chi_{05}(t) = \begin{bmatrix} \int_{t-\tau_1}^t g(x(s)) ds \\ \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} g(x(s)) ds \\ \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} g(x(s)) ds \\ \dot{x}(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

và các ma trận

$$L_i(U_i) = -U_i A_i - A_i^T U_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T L_i(U_i) x < 0\},$$

$$\bar{S}_1 = S_1, \bar{S}_2 = S_2 \setminus (S_2 \cap \bar{S}_1), \dots, \bar{S}_p = S_p \setminus \left( S_p \cap \left( \bigcup_{j=1}^{p-1} \bar{S}_j \right) \right), \dots,$$

$$\bar{S}_N = S_N \setminus \left( S_N \cap \left( \bigcup_{k=1}^{N-1} \bar{S}_k \right) \right),$$

$$\bar{R}_1 = \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_1} R_1, 3e^{-\alpha\tau_1} R_1, 5e^{-\alpha\tau_1} R_1\},$$

$$\bar{R}_2 = \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_2} R_2, 3e^{-\alpha\tau_2} R_2, 5e^{-\alpha\tau_2} R_2\},$$

$$F = \begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0 & 0 \\ I_n & I_n & -2I_n & 0 \\ I_n & -I_n & 6I_n & -6I_n \end{bmatrix}, \quad \Sigma_1 = \text{diag}\{l_1^-, l_2^-, \dots, l_n^-\},$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}\{l_1^+, l_2^+, \dots, l_n^+\},$$

$$k = \max_{1 \leq i \leq n} \{\theta_1(l_i^+ - l_i^-)\}, \quad \delta = \max_{1 \leq i \leq n} \{\theta_2(l_i^+ - l_i^-)\}, \quad \rho = \max_{1 \leq i \leq n} \{|l_i^-|, |l_i^+|\}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_5 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_8 \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_7 \end{bmatrix}, \quad G_4 = \begin{bmatrix} \tau_1 e_9 \\ e_{15} \end{bmatrix},$$

$$G_5 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_9 \\ e_{12} \end{bmatrix}, \quad G_6 = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_{10} \\ e_{13} \end{bmatrix}, \quad G_7 = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \\ e_{11} \\ e_{14} \end{bmatrix},$$

$$G_8 = e_5 - \Sigma_1 e_1, \quad G_9 = \Sigma_2 e_1 - e_5, \quad G_{10} = e_6 - \Sigma_1 e_3, \quad G_{11} = \Sigma_2 e_3 - e_6,$$

$$G_{12} = e_5 - e_6 - \Sigma_1(e_1 - e_3), \quad G_{13} = \Sigma_2(e_1 - e_3) - e_5 + e_6,$$

$$G_{14} = e_5 - e_8 - \Sigma_1(e_1 - e_2), \quad G_{15} = \Sigma_2(e_1 - e_2) - e_5 + e_8,$$

$$G_{16} = e_5 - e_7 - \Sigma_1(e_1 - e_4), \quad G_{17} = \Sigma_2(e_1 - e_4) - e_5 + e_7,$$

$$G_{18} = e_7 - e_8 - \Sigma_1(e_4 - e_2), \quad G_{19} = \Sigma_2(e_4 - e_2) - e_7 + e_8,$$

$$G_{20} = e_7 - e_6 - \Sigma_1(e_4 - e_3), \quad G_{21} = \Sigma_2(e_4 - e_3) - e_7 + e_6,$$

$$G_{22} = e_6 - e_8 - \Sigma_1(e_3 - e_2), G_{23} = \Sigma_2(e_3 - e_2) - e_6 + e_8,$$

$$\Gamma_1(\tau) = [(\tau - \tau_1)e_{10}^T \quad e_{16}^T \quad (\tau_2 - \tau)e_{11}^T \quad e_{17}^T]^T, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} FG_6 \\ FG_7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Pi = & G_8^T \Lambda_1 G_9 + G_9^T \Lambda_1 G_8 + G_{10}^T \Lambda_2 G_{11} + G_{11}^T \Lambda_2 G_{10} + G_{12}^T \Lambda_3 G_{13} + G_{13}^T \Lambda_3 G_{12} \\ & + G_{14}^T \Lambda_4 G_{15} + G_{15}^T \Lambda_4 G_{14} + G_{16}^T \Lambda_5 G_{17} + G_{17}^T \Lambda_5 G_{16} + G_{18}^T \Lambda_6 G_{19} \\ & + G_{19}^T \Lambda_6 G_{18} + G_{20}^T \Lambda_7 G_{21} + G_{21}^T \Lambda_7 G_{20} + G_{22}^T \Lambda_8 G_{23} + G_{23}^T \Lambda_8 G_{22}. \end{aligned}$$

Định lý dưới đây đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại bao của tập đạt được tiên ứng với tập ellipsoid cho trước  $\Omega_0 = \{\varphi(s) \in C^1([-\tau_2, 0], \mathbb{R}^n) : \varphi^T(s)E\varphi(s) \leq 1, \forall s \in [-\tau_2, 0]\}$ , ở đó  $E$  là một ma trận đối xứng, xác định dương cho trước.

**Định lý 1.5.** *Giả sử rằng Giả thiết (1.44) được thỏa mãn. Nếu tồn tại 11 hằng số dương  $\alpha, \beta_0, \beta_1, q_1, q_2, r_1, r_2, s_1, s_2, \theta_1, \theta_2$ , các ma trận  $P, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ ,  $Q_a, Q_b, S_a, S_b \in \mathbb{S}_{2n}^+$ , tám ma trận  $\Lambda_j \in \mathbb{D}_n^+(j = 1, \dots, 8)$ , các ma trận  $U_i, H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}(i = 1, \dots, N)$ , và các ma trận  $X_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, X_2 \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  sao cho các điều kiện dưới đây thỏa mãn:*

(i) Hệ thống các ma trận  $\{L_i(U_i)\}, (i = 1, 2, \dots, N)$  là đầy đủ chặt, tức là tồn tại các số  $\epsilon_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N, \sum_{i=1}^N \epsilon_i > 0$  sao cho

$$\sum_{i=1}^N \epsilon_i L_i(U_i) < 0, \quad (1.45)$$

(ii) Với  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$P \leq \beta_1 I_n, Q_a \leq q_1 I_{2n}, Q_b \leq q_2 I_{2n}, S_a \leq s_1 I_{2n}, S_b \leq s_2 I_{2n}, R_1 \leq r_1 I_n, R_2 \leq r_2 I_n, \quad (1.46a)$$

$$P \geq \frac{1}{\beta_0^2} I_n, \quad (1.46b)$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} e^{-\alpha\tau_2} S_b & X_1 \\ X_1^T & e^{-\alpha\tau_2} S_b \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.46c)$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X_2 \\ X_2^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.46d)$$

$$\Omega_i(\tau) = \Xi_i + \Pi - G_5^T F^T \bar{R}_1 F G_5 - \Gamma_1^T(\tau) \Phi_1 \Gamma_1(\tau) - \Gamma_2^T \Phi_2 \Gamma_2 < 0, \forall \tau \in \{\tau_1, \tau_2\}, \quad (1.46e)$$

$$\kappa_1 \mu_0 + \kappa_2 \mu^2 \leq 1, \quad (1.46f)$$

ở đó  $\mu_0 = \frac{1}{\lambda_{\min}(E)}$ , và

$$\begin{aligned} \Xi_i = & e_1^T (-PA_i - A_i^T P + \alpha P) e_1 + e_1^T P W_i e_5 + e_5^T W_i^T P e_1 + e_1^T P D_i e_6 + e_6^T D_i^T P e_1 \\ & + e_1^T P E_i (e_{15} + e_{16}) + (e_{15} + e_{16})^T E_i^T P e_1 + e_1^T P B_i e_{19} + e_{19}^T B_i^T P e_1 \\ & + e_5^T (\theta_1 - \theta_2) I_n e_{18} + e_{18}^T (\theta_1 - \theta_2) I_n e_5 + e_1^T (\theta_2 \Sigma_2 - \theta_1 \Sigma_1) e_{18} \\ & + e_{18}^T (\theta_2 \Sigma_2 - \theta_1 \Sigma_1) e_1 - e_1^T U_i e_{18} - e_{18}^T U_i^T e_1 + e_1^T U_i W_i e_5 + e_5^T W_i^T U_i^T e_1 \\ & + e_1^T U_i D_i e_6 + e_6^T D_i^T U_i^T e_1 + e_1^T U_i E_i (e_{15} + e_{16}) + (e_{15} + e_{16})^T E_i^T U_i^T e_1 \\ & + e_1^T U_i B_i e_{19} + e_{19}^T B_i^T U_i^T e_1 - e_{18}^T H_i A_i e_1 - e_1^T A_i^T H_i^T e_{18} \\ & + e_{18}^T H_i W_i e_5 + e_5^T W_i^T H_i^T e_{18} + e_{18}^T H_i D_i e_6 + e_6^T D_i^T H_i^T e_{18} + e_{18}^T H_i E_i (e_{15} + e_{16}) \\ & + (e_{15} + e_{16})^T E_i^T H_i^T e_{18} + e_{18}^T H_i B_i e_{19} + e_{19}^T B_i^T H_i^T e_{18} \\ & + e_{18}^T (\tau_1^2 R_1 + \tau_{12}^2 R_2 - H_i - H_i^T) e_{18} - \frac{\alpha}{\omega^2} e_{19}^T e_{19} \\ & + G_1^T (Q_a + \tau_1^2 S_a + \tau_{12}^2 S_b) G_1 + G_2^T (e^{-\alpha \tau_1} Q_b - e^{-\alpha \tau_1} Q_a) G_2 - e^{-\alpha \tau_2} G_3^T Q_b G_3 \\ & - e^{-\alpha \tau_1} G_4^T S_a G_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 = & \beta_1 + k + \delta + \frac{q_1 (1 + \rho^2)}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \tau_1}) + \frac{q_2 (1 + \rho^2)}{\alpha} (e^{-\alpha \tau_1} - e^{-\alpha \tau_2}) \\ & + \frac{s_1 \tau_1 (1 + \rho^2)}{\alpha} \left( \tau_1 + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha \tau_1} - 1) \right) \\ & + \frac{\tau_{12} s_2 (1 + \rho^2)}{\alpha} \left( \tau_{12} + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha \tau_2} - e^{-\alpha \tau_1}) \right), \end{aligned}$$

$$\kappa_2 = r_1 \tau_1 \left( \frac{\tau_1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha \tau_1} - 1) \right) + r_2 \tau_{12} \left( \frac{\tau_{12}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha \tau_2} - e^{-\alpha \tau_1}) \right),$$

thì tập đạt được tiến (forwards reachable sets) của hệ (1.40) được bao bởi hình cầu  $\mathcal{B}(0, \beta_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \beta_0\}$  dưới luật chuyển mạch được chọn bởi  $\sigma(x(t)) = i \in \mathcal{N}$  khi mà  $x(t) \in \bar{S}_i$ .

*Chứng minh.* Cho  $\Lambda_k = \text{diag}\{\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn}\} (k = 1, \dots, 8)$  thỏa mãn (1.46e). Xét hàm Lyapunov–Krasovskii sau

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t) + V_4(x_t) + V_5(x_t),$$

ở đó

$$V_1(x_t) = x^T(t) P x(t),$$

$$V_2(x_t) = 2e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^n \theta_1 \int_0^{x_i(t)} (g_i(s) - l_i^- s) ds + 2e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^n \theta_2 \int_0^{x_i(t)} (l_i^+ s - g_i(s)) ds,$$

$$\begin{aligned}
V_3(x_t) &= \int_{t-\tau_1}^t e^{\alpha(s-t)} \eta^T(s) Q_a \eta(s) ds + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{\alpha(s-t)} \eta^T(s) Q_b \eta(s) ds, \\
V_4(x_t) &= \tau_1 \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+s}^t e^{\alpha(u-t)} \eta^T(u) S_a \eta(u) duds \\
&\quad + \tau_{12} \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+s}^t e^{\alpha(u-t)} \eta^T(u) S_b \eta(u) duds, \\
V_5(x_t) &= \tau_1 \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+s}^t e^{\alpha(u-t)} \dot{x}^T(u) R_1 \dot{x}(u) duds \\
&\quad + \tau_{12} \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+s}^t e^{\alpha(u-t)} \dot{x}^T(u) R_2 \dot{x}(u) duds.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức dưới đây được suy ra trực tiếp từ (1.46b)

$$V(x_t) \geq \frac{\|x(t)\|^2}{\beta_0^2}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.47)$$

Từ đồng nhất thức dưới đây

$$\begin{aligned}
& -\dot{x}(t) - A_i x(t) + W_i g(x(t)) + D_i g(x(t - \tau(t))) + E_i \int_{t-\tau(t)}^t g(x(s)) ds + B_i \omega(t) = 0, \\
& i = 1, 2, \dots, N,
\end{aligned}$$

ta có

$$\begin{aligned}
& [2x^T(t)U_i + 2\dot{x}^T(t)H_i] \\
& \times \left[ -\dot{x}(t) - A_i x(t) + W_i g(x(t)) + D_i g(x(t - \tau(t))) + E_i \int_{t-\tau(t)}^t g(x(s)) ds \right. \\
& \quad \left. + B_i \omega(t) \right] = 0, \\
& i = 1, \dots, N.
\end{aligned} \quad (1.48)$$

Lấy đạo hàm của  $V(x_t)$  theo  $t$  và sử dụng điều kiện (1.48), ta có ước lượng dưới đây

$$\begin{aligned}
& \dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) - \frac{\alpha}{\omega^2} \omega^T(t) \omega(t) \\
& \leq x^T(t) L_i(U_i) x(t) + \chi_0^T(t) \Xi_i \chi_0(t) - \tau_1 e^{-\alpha \tau_1} \int_{t-\tau_1}^t \eta^T(s) S_a \eta(s) ds \\
& \quad - \tau_{12} e^{-\alpha \tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \eta^T(s) S_b \eta(s) ds - \tau_1 e^{-\alpha \tau_1} \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds
\end{aligned}$$

$$- \tau_{12} e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds. \quad (1.49)$$

Bằng cách áp dụng Bổ đề 1.4, ta thu được

$$\begin{aligned} -\tau_1 e^{-\alpha\tau_1} \int_{t-\tau_1}^t \eta^T(s) S_a \eta(s) ds &\leq - \left( \int_{t-\tau_1}^t \eta(s) ds \right)^T e^{-\alpha\tau_1} S_a \left( \int_{t-\tau_1}^t \eta(s) ds \right) \\ &= - \begin{bmatrix} \int_{t-\tau_1}^t x(s) ds \\ \int_{t-\tau_1}^t g(x(s)) ds \end{bmatrix}^T e^{-\alpha\tau_1} S_a \begin{bmatrix} \int_{t-\tau_1}^t x(s) ds \\ \int_{t-\tau_1}^t g(x(s)) ds \end{bmatrix} \\ &= -e^{-\alpha\tau_1} \chi_0^T(t) G_4^T S_a G_4 \chi_0(t). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Sử dụng Bổ đề 1.1, Bổ đề 1.2 và Bổ đề 1.4, ta thu được

$$\begin{aligned} & -\tau_{12} e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \eta^T(s) S_b \eta(s) ds \\ &= -\tau_{12} e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \eta^T(s) S_b \eta(s) ds - \tau_{12} e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \eta^T(s) S_b \eta(s) ds \\ &\leq -\frac{\tau_{12}}{\tau(t) - \tau_1} \left( \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \eta(s) ds \right)^T e^{-\alpha\tau_2} S_b \left( \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \eta(s) ds \right) \\ &\quad - \frac{\tau_{12}}{\tau_2 - \tau(t)} \left( \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \eta(s) ds \right)^T e^{-\alpha\tau_2} S_b \left( \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \eta(s) ds \right) \\ &= -\frac{\tau_{12}}{\tau(t) - \tau_1} \begin{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds \\ \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} g(x(s)) ds \end{bmatrix}^T e^{-\alpha\tau_2} S_b \begin{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds \\ \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} g(x(s)) ds \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{\tau_{12}}{\tau_2 - \tau(t)} \begin{bmatrix} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \\ \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} g(x(s)) ds \end{bmatrix}^T e^{-\alpha\tau_2} S_b \begin{bmatrix} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \\ \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} g(x(s)) ds \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds \\ \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} g(x(s)) ds \\ \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \\ \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} g(x(s)) ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\tau_{12}}{\tau(t) - \tau_1} e^{-\alpha\tau_2} S_b & 0 \\ 0 & \frac{\tau_{12}}{\tau_2 - \tau(t)} e^{-\alpha\tau_2} S_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds \\ \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} g(x(s)) ds \\ \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \\ \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} g(x(s)) ds \end{bmatrix} \\ &\leq - \begin{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds \\ \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} g(x(s)) ds \\ \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \\ \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} g(x(s)) ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e^{-\alpha\tau_2} S_b & X_1 \\ X_1^T & e^{-\alpha\tau_2} S_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds \\ \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} g(x(s)) ds \\ \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \\ \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} g(x(s)) ds \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= -\chi_0^T(t)\Gamma_1^T(\tau)\Phi_1\Gamma_1(\tau)\chi_0(t). \quad (1.51)$$

Bằng cách áp dụng Bổ đề 1.1, ta thu được

$$- \tau_1 e^{-\alpha\tau_1} \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds \leq -\chi_0^T(t)G_5^T F^T \bar{R}_1 F G_5 \chi_0(t). \quad (1.52)$$

Sử dụng Bổ đề 1.1, 1.2, ta có

$$\begin{aligned} & - \tau_{12} e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds \\ &= -\tau_{12} e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds - \tau_{12} e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds \\ &\leq -\frac{\tau_{12}}{\tau(t)-\tau_1} \chi_0^T(t)G_6^T F^T \bar{R}_2 F G_6 \chi_0(t) - \frac{\tau_{12}}{\tau_2-\tau(t)} \chi_0^T(t)G_7^T F^T \bar{R}_2 F G_7 \chi_0(t) \\ &= -\chi_0^T(t)\Gamma_2^T \begin{bmatrix} \frac{\tau_{12}}{\tau(t)-\tau_1} \bar{R}_2 & 0 \\ 0 & \frac{\tau_{12}}{\tau_2-\tau(t)} \bar{R}_2 \end{bmatrix} \Gamma_2 \chi_0(t) \leq -\chi_0^T(t)\Gamma_2^T \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X_2 \\ X_2^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \Gamma_2 \chi_0(t) \\ &= -\chi_0^T(t)\Gamma_2^T \Phi_2 \Gamma_2 \chi_0(t). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Các bất đẳng thức dưới đây được suy ra từ điều kiện (1.44) với bất kỳ  $\lambda_{ji} \geq 0$ , ( $j = 1, \dots, 8, i = 1, \dots, n$ ),

$$\begin{aligned} & 2 [g_i(x_i(t)) - l_i^- x_i(t)] \lambda_{1i} [l_i^+ x_i(t) - g_i(x_i(t))] \geq 0; \\ & 2 [g_i(x_i(t-\tau(t))) - l_i^- x_i(t-\tau(t))] \lambda_{2i} [l_i^+ x_i(t-\tau(t)) - g_i(x_i(t-\tau(t)))] \geq 0; \\ & 2 [g_i(x_i(t)) - g_i(x_i(t-\tau(t))) - l_i^- (x_i(t) - x_i(t-\tau(t)))] \lambda_{3i} \\ & \quad \times [l_i^+ (x_i(t) - x_i(t-\tau(t))) - g_i(x_i(t)) + g_i(x_i(t-\tau(t)))] \geq 0; \\ & 2 [g_i(x_i(t)) - g_i(x_i(t-\tau_1)) - l_i^- (x_i(t) - x_i(t-\tau_1))] \lambda_{4i} \\ & \quad \times [l_i^+ (x_i(t) - x_i(t-\tau_1)) - g_i(x_i(t)) + g_i(x_i(t-\tau_1))] \geq 0; \\ & 2 [g_i(x_i(t)) - g_i(x_i(t-\tau_2)) - l_i^- (x_i(t) - x_i(t-\tau_2))] \lambda_{5i} \\ & \quad \times [l_i^+ (x_i(t) - x_i(t-\tau_2)) - g_i(x_i(t)) + g_i(x_i(t-\tau_2))] \geq 0; \\ & 2 [g_i(x_i(t-\tau_2)) - g_i(x_i(t-\tau_1)) - l_i^- (x_i(t-\tau_2) - x_i(t-\tau_1))] \lambda_{6i} \\ & \quad \times [l_i^+ (x_i(t-\tau_2) - x_i(t-\tau_1)) - g_i(x_i(t-\tau_2)) + g_i(x_i(t-\tau_1))] \geq 0; \\ & 2 [g_i(x_i(t-\tau_2)) - g_i(x_i(t-\tau(t))) - l_i^- (x_i(t-\tau_2) - x_i(t-\tau(t)))] \lambda_{7i} \\ & \quad \times [l_i^+ (x_i(t-\tau_2) - x_i(t-\tau(t))) - g_i(x_i(t-\tau_2)) + g_i(x_i(t-\tau(t)))] \geq 0; \\ & 2 [g_i(x_i(t-\tau(t))) - g_i(x_i(t-\tau_1)) - l_i^- (x_i(t-\tau(t)) - x_i(t-\tau_1))] \lambda_{8i} \\ & \quad \times [l_i^+ (x_i(t-\tau(t)) - x_i(t-\tau_1)) - g_i(x_i(t-\tau(t))) + g_i(x_i(t-\tau_1))] \geq 0, \end{aligned}$$



điều này suy ra

$$\begin{aligned}
2\chi_0^T(t)G_8^T\Lambda_1G_9\chi_0(t) &\geq 0; \\
2\chi_0^T(t)G_{10}^T\Lambda_2G_{11}\chi_0(t) &\geq 0; \\
2\chi_0^T(t)G_{12}^T\Lambda_3G_{13}\chi_0(t) &\geq 0; \\
2\chi_0^T(t)G_{14}^T\Lambda_4G_{15}\chi_0(t) &\geq 0; \\
2\chi_0^T(t)G_{16}^T\Lambda_5G_{17}\chi_0(t) &\geq 0; \\
2\chi_0^T(t)G_{18}^T\Lambda_6G_{19}\chi_0(t) &\geq 0; \\
2\chi_0^T(t)G_{20}^T\Lambda_7G_{21}\chi_0(t) &\geq 0; \\
2\chi_0^T(t)G_{22}^T\Lambda_8G_{23}\chi_0(t) &\geq 0.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Vậy, ta có

$$\dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) - \frac{\alpha}{\omega^2}\omega^T(t)\omega(t) \leq x^T(t)L_i(U_i)x(t) + \chi_0^T(t)\Omega_i(\tau)\chi_0(t). \tag{1.55}$$

Vì  $\Omega_i(\tau)$  là hàm affine theo  $\tau$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$  nên  $\Omega_i(\tau) < 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ , với mọi  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$  nếu và chỉ nếu  $\Omega(\tau_1) < 0$  và  $\Omega(\tau_2) < 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ . Do đó nếu (1.46e) đúng với  $\tau = \tau_1$  và  $\tau = \tau_2$  thì

$$\dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) - \frac{\alpha}{\omega^2}\omega^T(t)\omega(t) \leq x^T(t)L_i(U_i)x(t). \tag{1.56}$$

Theo giả thiết, hệ thống các ma trận  $L_i(U_i)$  là đầy đủ chặt nên ta có

$$\bigcup_{i=1}^N S_i = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{1.57}$$

Dựa vào các tập  $S_i$ , ta xây dựng các tập  $\bar{S}_i$  xác định như ở bên trên. Ta dễ dàng kiểm tra được rằng

$$\bar{S}_i \cap \bar{S}_j = \{0\}, i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^N \bar{S}_i = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{1.58}$$

Ta xây dựng quy tắc chuyển mạch giữa các hệ con như sau:  $\sigma(x(t)) = i \in \mathcal{N}$ , khi mà  $x(t) \in \bar{S}_i$ . Vậy, ta có

$$\dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) - \frac{\alpha}{\omega^2}\omega^T(t)\omega(t) \leq 0.$$

Sử dụng (1.46a), (1.46b), (1.46f) và sau một vài tính toán trực tiếp, ta thu được

$$V(x_0) \leq \kappa_1 \|\varphi(0)\|^2 + \kappa_2 \mu^2 \leq \kappa_1 \mu_0 + \kappa_2 \mu^2 \leq 1.$$

Theo Bổ đề 1.3, ta có  $V(x_t) \leq 1$ . Từ điều kiện (1.47), ta thu được

$$\|x(t)\| \leq \beta_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn.  $\square$

**Nhận xét 1.9.** Chú ý rằng khi ta cố định các số  $\alpha$  và  $\beta_0$  thì các bất đẳng thức ma trận (1.46a)-(1.46e) trở thành bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs). Do đó, ta có thể kết hợp phương pháp tìm kiếm hai chiều kết hợp với thuật toán tối ưu lồi trong MATLABs LMI Control Toolbox (xem [14]) để giải các bất đẳng thức ma trận này. Tương tự như trong bài báo [67], để tìm bao nhỏ nhất của tập đạt được tiến của hệ (1.40) ứng với tập ban đầu cho trước  $\Omega_0 = \{\varphi(s) \in C_1([-\tau_2, 0], \mathbb{R}^n) : \varphi^T(s)E\varphi(s) \leq 1, \forall s \in [-\tau_2, 0]\}$ , tức là tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của  $\beta_0$ , ta đi giải bài toán tối ưu lồi sau đây:

$$\begin{aligned} \text{(OP5)} : \quad & \min \beta_0. \\ & (i), (1.46a) - (1.46e). \end{aligned}$$

**Nhận xét 1.10.** Bài toán nghiên cứu bao của tập đạt được cho mạng nơ ron có trễ biến thiên đã được nghiên cứu trong [65, 81] trong những năm gần đây. Tuy nhiên, theo như sự hiểu biết của chúng tôi, bài toán nghiên cứu bao của tập đạt được cho mạng nơ ron chuyển mạch có trễ hỗn hợp biến thiên vẫn chưa được nghiên cứu một cách đầy đủ. Những khó khăn gặp phải khi giải bài toán này là làm cách nào xây dựng được một hàm Lyapunov–Krasovskii thích hợp và hiệu quả cũng như làm cách nào để thiết kế được luật chuyển mạch thích hợp giữa các hệ con của hệ (1.40). Để vượt qua những khó khăn trên, trong chứng minh Định lý 1.5, chúng tôi xây dựng một hàm Lyapunov–Krasovskii mở rộng và sử dụng một số bổ đề kỹ thuật để ước lượng đạo hàm của hàm Lyapunov–Krasovskii này. Ngoài ra, luật chuyển mạch giữa các hệ con được chúng tôi xây dựng bằng cách phân hoạch không gian trạng thái thành những nón lồi rời nhau và hợp với nhau thành cả không gian trạng thái. Khi đó nếu véc tơ trạng thái nằm trong một nón lồi thứ  $i$  nào đó thì hệ con thứ  $i$  trong hệ (1.40) sẽ được kích hoạt.

Khi  $\omega(t) \equiv 0, \forall t \geq 0$ , Định lý 1.5 quy về một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của mạng nơ ron chuyển mạch có trễ biến thiên. Chú ý rằng, bài toán nghiên cứu tính ổn định mũ của mạng nơ ron chuyển mạch có trễ biến thiên đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trong những năm gần đây (xem [20, 36, 44, 45, 57, 72]).

**Hệ quả 1.5.** *Giả sử rằng điều kiện (1.44) được thỏa mãn. Hệ (1.40), với  $\omega(t) \equiv 0$ , là ổn định mũ với tốc độ mũ  $\alpha^* = \frac{\alpha}{2} > 0$  nếu tồn tại hai hằng số dương*

$\theta_1, \theta_2$ , các ma trận  $P, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ ,  $Q_a, Q_b, S_a, S_b \in \mathbb{S}_{2n}^+$ , tám ma trận  $\Lambda_j \in \mathbb{D}_n^+$  ( $j = 1, \dots, 8$ ), các ma trận  $U_i, H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) và hai ma trận  $X_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  sao cho các điều kiện dưới đây thỏa mãn:

(i) Hệ thống các ma trận  $\{L_i(U_i)\}$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) đầy đủ chặt, tức là tồn tại các số  $\epsilon_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\sum_{i=1}^N \epsilon_i > 0$  sao cho

$$\sum_{i=1}^N \epsilon_i L_i(U_i) < 0, \quad (1.59)$$

(ii) Với  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} e^{-\alpha\tau_2} S_b & X_1 \\ X_1^T & e^{-\alpha\tau_2} S_b \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.60a)$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X_2 \\ X_2^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.60b)$$

$$\hat{\Omega}_i(\tau) = \hat{\Xi}_i + \Pi - G_5^T F^T \bar{R}_1 F G_5 - \Gamma_1^T(\tau) \Phi_1 \Gamma_1(\tau) - \Gamma_2^T \Phi_2 \Gamma_2 < 0, \forall \tau \in \{\tau_1, \tau_2\}, \quad (1.60c)$$

ở đó

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_i = & e_1^T (-PA_i - A_i^T P + \alpha P) e_1 + e_1^T P W_i e_5 + e_5^T W_i^T P e_1 + e_1^T P D_i e_6 \\ & + e_6^T D_i^T P e_1 + e_1^T P E_i (e_{15} + e_{16}) + (e_{15} + e_{16})^T E_i^T P e_1 \\ & + e_5^T (\theta_1 - \theta_2) I_n e_{18} + e_{18}^T (\theta_1 - \theta_2) I_n e_5 \\ & + e_1^T (\theta_2 \Sigma_2 - \theta_1 \Sigma_1) e_{18} + e_{18}^T (\theta_2 \Sigma_2 - \theta_1 \Sigma_1) e_1 - e_1^T U_i e_{18} - e_{18}^T U_i^T e_1 \\ & + e_1^T U_i W_i e_5 + e_5^T W_i^T U_i^T e_1 + e_i^T U_i D_i e_6 + e_6^T D_i^T U_i^T e_1 + e_1^T U_i E_i (e_{15} + e_{16}) \\ & + (e_{15} + e_{16})^T E_i^T U_i^T e_1 - e_{18}^T H_i A_i e_1 - e_1^T A_i^T H_i^T e_{18} \\ & + e_{18}^T H_i W_i e_5 + e_5^T W_i^T H_i^T e_{18} + e_{18}^T H_i D_i e_6 + e_6^T D_i^T H_i^T e_{18} \\ & + e_{18}^T H_i E_i (e_{15} + e_{16}) + (e_{15} + e_{16})^T E_i^T H_i^T e_{18} \\ & + e_{18}^T (\tau_1^2 R_1 + \tau_{12}^2 R_2 - H_i - H_i^T) e_{18} + G_1^T (Q_a + \tau_1^2 S_a + \tau_{12}^2 S_b) G_1 \\ & + G_2^T (e^{-\alpha\tau_1} Q_b - e^{-\alpha\tau_1} Q_a) G_2 - e^{-\alpha\tau_2} G_3^T Q_b G_3 - e^{-\alpha\tau_1} G_4^T S_a G_4. \end{aligned}$$

Ngoài ra, luật chuyển mạch giữa các hệ con xác định bởi  $\sigma(x(t)) = i \in \mathcal{N}$  khi mà  $x(t) \in \bar{S}_i$ .

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu bài toán tìm bao của tập đạt được lồi cho hệ phương trình vi phân tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên (1.40). Cụ thể hơn, chúng tôi sẽ đưa ra một điều kiện đủ cho việc tồn tại một hình cầu

$\mathcal{B}(0, \mu_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \mu_0\}$  chứa tập đạt được lồi của hệ (1.40)-(1.43) tương ứng với một tập mục tiêu cho trước  $\Lambda_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T F x \leq 1\}$ , ở đó  $F$  là một ma trận đối xứng, xác định dương cho trước dưới luật chuyển mạch thích hợp  $\sigma(\cdot)$ . Bằng các kỹ thuật tương tự như Định lý 1.5, chúng tôi thu được kết quả sau đây:

**Định lý 1.6.** *Giả sử rằng điều kiện (1.44) được thỏa mãn. Nếu tồn tại mười một số dương  $\alpha, \mu_0, \beta_1, q_1, q_2, r_1, r_2, s_1, s_2, \theta_1, \theta_2$ , các ma trận  $P, R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$ ,  $Q_a, Q_b, S_a, S_b \in \mathbb{S}_{2n}^+$ , tám ma trận  $\Lambda_j \in \mathbb{D}_n^+(j = 1, \dots, 8)$ , các ma trận  $U_i, H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}(i = 1, \dots, N)$ , các ma trận  $X_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, X_2 \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  sao cho các điều kiện dưới đây thỏa mãn:*

(i) Hệ thống các ma trận  $\{L_i(U_i)\}, (i = 1, 2, \dots, N)$  đầy đủ chặt, tức là tồn tại các số  $\epsilon_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N, \sum_{i=1}^N \epsilon_i > 0$  sao cho

$$\sum_{i=1}^N \epsilon_i L_i(U_i) < 0, \quad (1.61)$$

(ii) Với  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$P \leq \beta_1 I_n, Q_a \leq q_1 I_{2n}, Q_b \leq q_2 I_{2n}, S_a \leq s_1 I_{2n}, S_b \leq s_2 I_{2n}, R_1 \leq r_1 I_n, R_2 \leq r_2 I_n, \quad (1.62a)$$

$$P - F > 0, \quad (1.62b)$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} e^{-\alpha\tau_2} S_b & X_1 \\ X_1^T & e^{-\alpha\tau_2} S_b \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.62c)$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} \bar{R}_2 & X_2 \\ X_2^T & \bar{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.62d)$$

$$\Omega_i(\tau) = \Xi_i + \Pi - G_5^T F^T \bar{R}_1 F G_5 - \Gamma_1^T(\tau) \Phi_1 \Gamma_1(\tau) - \Gamma_2^T \Phi_2 \Gamma_2 < 0, \forall \tau \in \{\tau_1, \tau_2\}, \quad (1.62e)$$

$$\kappa_1 \mu_0^2 + \kappa_2 \mu^2 \leq 1, \quad (1.62f)$$

ở đó

$$\begin{aligned} \Xi_i = & e_1^T (-PA_i - A_i^T P + \alpha P) e_1 + e_1^T P W_i e_5 + e_5^T W_i^T P e_1 + e_1^T P D_i e_6 \\ & + e_6^T D_i^T P e_1 + e_1^T P E_i (e_{15} + e_{16}) + (e_{15} + e_{16})^T E_i^T P e_1 \\ & + e_1^T P B_i e_{19} + e_{19}^T B_i^T P e_1 + e_5^T (\theta_1 - \theta_2) I_n e_{18} + e_{18}^T (\theta_1 - \theta_2) I_n e_5 \\ & + e_1^T (\theta_2 \Sigma_2 - \theta_1 \Sigma_1) e_{18} + e_{18}^T (\theta_2 \Sigma_2 - \theta_1 \Sigma_1) e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - e_1^T U_i e_{18} - e_{18}^T U_i^T e_1 + e_1^T U_i W_i e_5 + e_5^T W_i^T U_i^T e_1 \\
& + e_1^T U_i D_i e_6 + e_6^T D_i^T U_i^T e_1 + e_1^T U_i E_i (e_{15} + e_{16}) + (e_{15} + e_{16})^T E_i^T U_i^T e_1 \\
& + e_1^T U_i B_i e_{19} + e_{19}^T B_i^T U_i^T e_1 - e_{18}^T H_i A_i e_1 - e_1^T A_i^T H_i^T e_{18} \\
& + e_{18}^T H_i W_i e_5 + e_5^T W_i^T H_i^T e_{18} + e_{18}^T H_i D_i e_6 + e_6^T D_i^T H_i^T e_{18} \\
& + e_{18}^T H_i E_i (e_{15} + e_{16}) + (e_{15} + e_{16})^T E_i^T H_i^T e_{18} \\
& + e_{18}^T H_i B_i e_{19} + e_{19}^T B_i^T H_i^T e_{18} \\
& + e_{18}^T (\tau_1^2 R_1 + \tau_{12}^2 R_2 - H_i - H_i^T) e_{18} - \frac{\alpha}{\omega^2} e_{19}^T e_{19} \\
& + G_1^T (Q_a + \tau_1^2 S_a + \tau_{12}^2 S_b) G_1 + G_2^T (e^{-\alpha\tau_1} Q_b - e^{-\alpha\tau_1} Q_a) G_2 \\
& - e^{-\alpha\tau_2} G_3^T Q_b G_3 - e^{-\alpha\tau_1} G_4^T S_a G_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \beta_1 + k + \delta + \frac{q_1 (1 + \rho^2)}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\tau_1}) + \frac{q_2 (1 + \rho^2)}{\alpha} (e^{-\alpha\tau_1} - e^{-\alpha\tau_2}) \\
& + \frac{s_1 \tau_1 (1 + \rho^2)}{\alpha} \left( \tau_1 + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha\tau_1} - 1) \right) \\
& + \frac{\tau_{12} s_2 (1 + \rho^2)}{\alpha} \left( \tau_{12} + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha\tau_2} - e^{-\alpha\tau_1}) \right), \\
\kappa_2 &= r_1 \tau_1 \left( \frac{\tau_1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha\tau_1} - 1) \right) + r_2 \tau_{12} \left( \frac{\tau_{12}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha\tau_2} - e^{-\alpha\tau_1}) \right),
\end{aligned}$$

thì tập đạt được lồi của hệ (1.40) được bao bởi hình cầu  $\mathcal{B}(0, \mu_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \mu_0\}$  dưới luật chuyển mạch được chọn như sau  $\sigma(x(t)) = i \in \mathcal{N}$  khi mà  $x(t) \in \bar{S}_i$ .

**Nhận xét 1.11.** Tương tự như Nhận xét 1.9, bài toán tối ưu sau được đưa ra để tìm giá trị lớn nhất có thể có của  $\mu_0$  :

$$\begin{aligned}
(\text{OP6}) : \quad & \max \mu_0 \\
& (i), (1.62a) - (1.62f).
\end{aligned}$$

Sau đây, chúng tôi đưa ra một ví dụ số để minh họa cho tính hiệu quả của các tiêu chuẩn do chúng tôi đề xuất.

**Ví dụ 1.5.** Xét mạng nơ ron chuyển mạch có trễ hỗn hợp biến thiên (1.40) với hai hệ con và các tham số sau

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.1 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix}, E_1 = 0, B_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.2 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.3 \\ -0.9 & -0.7 \end{bmatrix}, E_2 = 0, B_2 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

và  $\|\omega(t)\| \leq 1$ . Độ trễ  $\tau(t)$  là hàm liên tục nhưng không khả vi thỏa mãn  $\tau(t) \in [\tau_1, 0.8]$ . Trong ví dụ này, chúng tôi xét hai trường hợp sau đây:

(a) Cho trước  $\mu = 0.5$ . Tìm luật chuyển mạch phù hợp và bao nhỏ nhất có thể có chứa tập đạt được tiến của hệ tương ứng với tập điều kiện cho trước  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$ .

(b) Cho trước  $\mu = 0.5$ . Tìm luật chuyển mạch phù hợp và bao lớn nhất có thể có của tập đạt được lùi của hệ tương ứng với tập mục tiêu cho trước  $\Lambda_0 \equiv \mathcal{B}(0, 2)$ .

*Lời giải:* (a) Sử dụng Định lý 1.5 kết hợp với Nhận xét 1.9, hình cầu nhỏ nhất có thể có  $\mathcal{B}(0, \beta_0)$  chứa tập đạt được tiến của hệ tương ứng với tập điều kiện ban đầu cho trước  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$  được cho trong Bảng 1.11 với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ .

Để minh họa bằng hình ảnh, ta chọn độ trễ  $\tau(t)$  là hàm  $\tau(t) = 0.3 + 0.5 \cos^2\left(\frac{10t}{4}\right)$ , véc tơ nhiễu  $\omega(t) \in \{a \sin(t), a = -1, \dots, 1\} \cup \{-1, -0.9, \dots, 0.9, 1\}$ , điều kiện ban đầu  $(x_1(t), x_2(t))^T \in \{(b \sin(t/2), \pm\sqrt{1-b^2} \cos(t/2)), b = -1, \dots, 1\} \cup \{(b, \pm\sqrt{1-b^2}), b = -1, -0.9, \dots, 0.9, 1\}$ . Ta thấy, các điều kiện trong Định lý 1.5 và Nhận xét 1.9 được thỏa mãn với  $\alpha = 0.3, \epsilon_1 = 0.5, \epsilon_2 = 0.5, \beta_0 = 1.021, \beta_1 = 0.9594, q_1 = 3.5370 \times 10^{-4}, q_2 = 0.0274, r_1 = 0.8298, r_2 = 0.4300, s_1 = 0.0080, s_2 = 0.0024, \theta_1 = 3.7668 \times 10^{-5}, \theta_2 = 3.4648 \times 10^{-5}$  và

$$P = \begin{bmatrix} 0.9593 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9593 \end{bmatrix},$$

$$Q_a = \begin{bmatrix} 0.2021 & 0.0181 & 0.0253 & 0.0251 \\ 0.0181 & 0.1798 & 0.0183 & 0.0154 \\ 0.0253 & 0.0183 & 0.2022 & 0.0252 \\ 0.0251 & 0.0154 & 0.0252 & 0.2028 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$Q_b = \begin{bmatrix} 0.0210 & -0.0015 & 0.0066 & 0.0015 \\ -0.0015 & 0.0187 & 0.0000 & 0.0112 \\ 0.0066 & 0.0000 & 0.0199 & 0.0008 \\ 0.0015 & 0.0112 & 0.0008 & 0.0125 \end{bmatrix},$$

$$S_a = \begin{bmatrix} 0.0047 & 0.0004 & -0.0002 & 0.0000 \\ 0.0004 & 0.0036 & 0.0003 & -0.0000 \\ -0.0002 & 0.0003 & 0.0059 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0060 \end{bmatrix},$$

$$S_b = \begin{bmatrix} 0.0020 & 0.0002 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0002 & 0.0021 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0021 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0021 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.8145 & 0.0741 \\ 0.0741 & 0.2995 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 0.4182 & 0.0553 \\ 0.0553 & 0.1601 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 2.6162 & 0 \\ 0 & 1.1976 \end{bmatrix}, \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0.2134 & 0 \\ 0 & 0.1396 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 0.0076 & 0 \\ 0 & 0.0002 \end{bmatrix}, \Lambda_4 = \begin{bmatrix} 0.1097 & 0 \\ 0 & 0.0200 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_5 = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}, \Lambda_6 = \begin{bmatrix} 0.0017 & 0 \\ 0 & 0.0002 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_7 = \begin{bmatrix} 0.5049 & 0 \\ 0 & 0.2292 \end{bmatrix}, \Lambda_8 = \begin{bmatrix} 0.0353 & 0 \\ 0 & 0.0003 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = 0, X_2 = \begin{bmatrix} -0.0472 & -0.0021 & 0.0001 & 0.0002 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0053 & -0.0410 & -0.0002 & -0.0004 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} -0.1662 & 0.0370 \\ -0.2275 & -0.0135 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0.1964 & 0.1696 \\ 0.0610 & 0.0566 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.1889 & 0.0146 \\ 0.0301 & 0.0738 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.2057 & 0.0142 \\ 0.0056 & 0.0824 \end{bmatrix}.$$

Các tập  $\bar{S}_1, \bar{S}_2$  trong Định lý 1.5 được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0.9973x_1^2 + 0.9956x_1x_2 + 0.1350x_2^2 < 0\}, \\ \bar{S}_2 &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0.9973x_1^2 + 0.9956x_1x_2 + 0.1350x_2^2 > 0\}. \end{aligned}$$

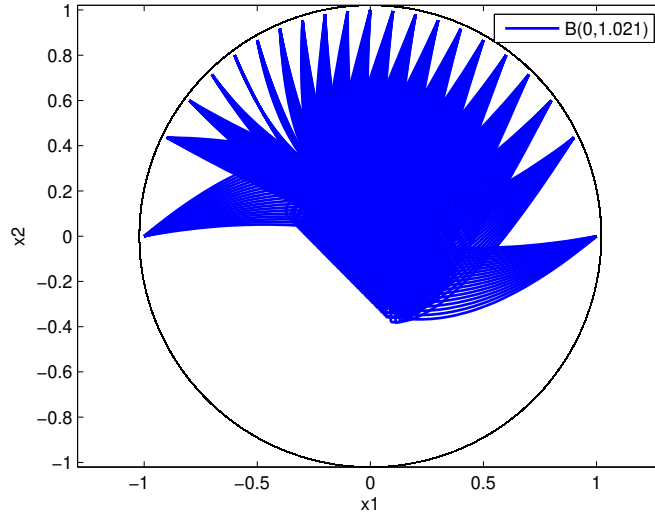
Bảng 1.11: Giá trị nhỏ nhất có thể có của  $\beta_0$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ 

$\tau_1$	0	0.1	0.2	0.3
Định lý 1.5	1.032	1.026	1.023	1.021

Luật chuyển mạch giữa hai hệ con được cho bởi

$$\sigma(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x(t) \in \bar{S}_1, \\ 2 & \text{nếu } x(t) \in \bar{S}_2. \end{cases}$$

Theo Định lý 1.5, mọi véc tơ trạng thái của hệ xuất phát từ hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1)$  đều chứa trong hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.046)$ .

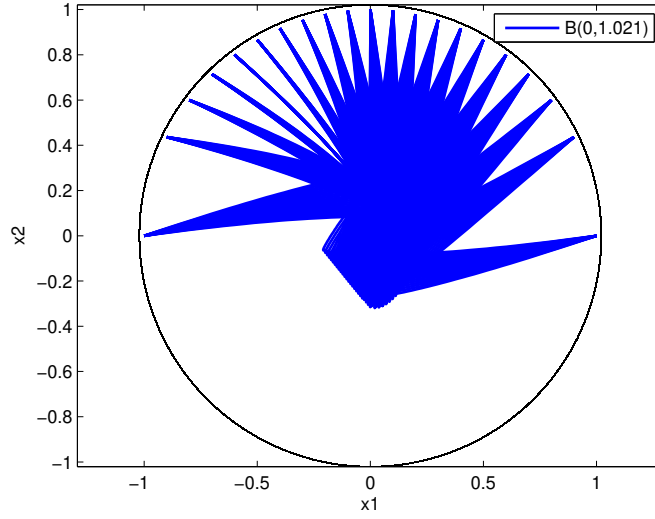


Hình 1.7: Hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.021)$  bao tập đạt được tiên của hệ con 1 tương ứng với tập điều kiện ban đầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$

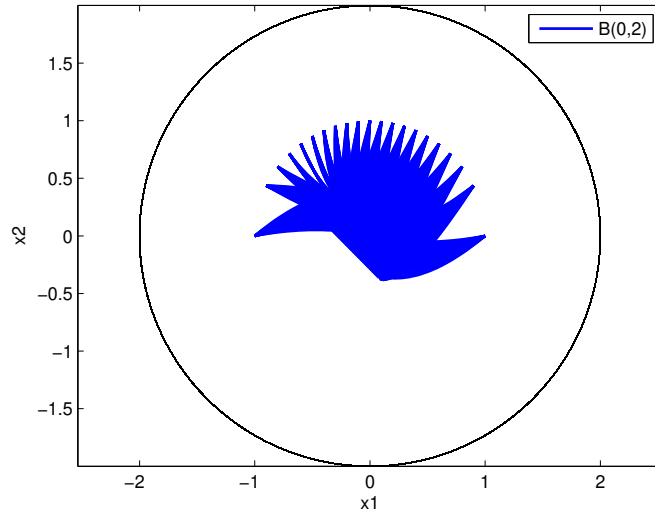
(b) Sử dụng Định lý 1.6 kết hợp với Nhận xét 1.11, chúng tôi tìm được hình cầu lớn nhất có thể có  $\mathcal{B}(0, \mu_0)$  chứa tập đạt được lùi của hệ tương ứng với tập mục tiêu cho trước  $\Lambda_0 \equiv \mathcal{B}(0, 2)$ . Bảng 1.12 liệt kê các giá trị lớn nhất có thể có của  $\mu_0$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ .

Để minh họa bằng hình ảnh, chúng tôi chọn độ trễ  $\tau(t)$  là hàm  $\tau(t) = 0.3 + 0.5 \sin^2\left(\frac{10t}{4}\right)$ , véc tơ nhiễu  $\omega(t) \in \{-1, \dots, 1\}$ ,  $(x_1(t), x_2(t))^T \in \{(b, \pm\sqrt{1-b^2}), b = -1.3, \dots, 1.3\}$  là điều kiện ban đầu. Ta thấy, các điều kiện trong Định lý 1.6 và Nhận xét 1.11 được thỏa mãn với  $\alpha = 0.2, \epsilon_1 = 0.05, \epsilon_2 = 0.95, \mu_0 = 1.986, \beta_1 =$





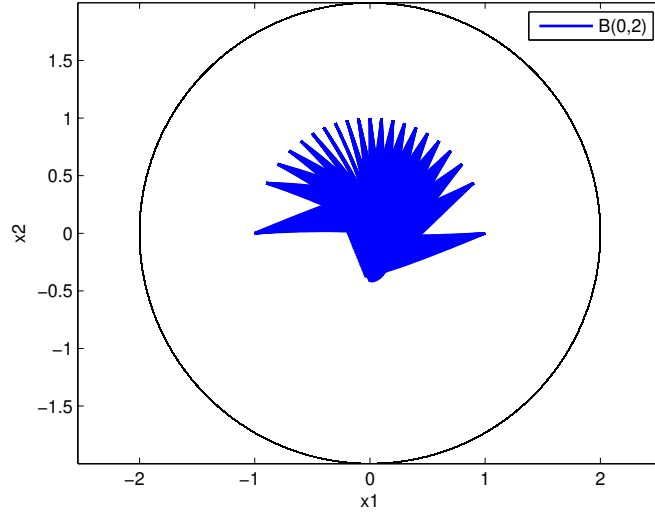
Hình 1.8: Hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.021)$  bao tập đạt được tiên của hệ con 2 tương ứng với tập điều kiện ban đầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1)$



Hình 1.9: Hình cầu  $\mathcal{B}(0, 2)$  bao mọi véc tơ trạng thái của hệ con 1 xuất phát từ hình cầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1.986)$

Bảng 1.12: Giá trị lớn nhất có thể có của  $\mu_0$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$

$\tau_1$	0	0.1	0.2	0.3
Định lý 1.6	1.972	1.982	1.984	1.986



Hình 1.10: Hình cầu  $\mathcal{B}(0, 2)$  bao mọi véc tơ trạng thái của hệ con 2 xuất phát từ hình cầu  $\Omega_0 \equiv \mathcal{B}(0, 1.986)$

$0.2500, q_1 = 8.3479 \times 10^{-5}, q_2 = 0.0023, r_1 = 0.2208, r_2 = 0.1243, s_1 = 0.0019, s_2 = 4.7141 \times 10^{-4}, \theta_1 = 7.7817 \times 10^{-6}, \theta_2 = 7.0511 \times 10^{-6}$  và

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} 0.2500 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.2500 \end{bmatrix}, \\
 Q_a &= \begin{bmatrix} 0.5021 & 0.0452 & 0.0847 & 0.0601 \\ 0.0452 & 0.4170 & 0.0452 & 0.0223 \\ 0.0847 & 0.0452 & 0.5021 & 0.0601 \\ 0.0601 & 0.0223 & 0.0601 & 0.4589 \end{bmatrix} \times 10^{-4}, \\
 Q_b &= \begin{bmatrix} 0.0016 & 0.0003 & 0.0004 & 0.0002 \\ 0.0003 & 0.0010 & 0.0004 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0004 & 0.0015 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0004 & 0.0002 & 0.0012 \end{bmatrix}, \\
 S_a &= \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0001 & 0.0009 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0014 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0014 \end{bmatrix}, \\
 S_b &= \begin{bmatrix} 0.4054 & 0.0368 & -0.0017 & 0.0000 \\ 0.0368 & 0.3679 & 0.0025 & -0.0000 \\ -0.0017 & 0.0025 & 0.4088 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.4098 \end{bmatrix} \times 10^{-3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= \begin{bmatrix} 0.2169 & 0.0046 \\ 0.0046 & 0.0940 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 0.1224 & 0.0120 \\ 0.0120 & 0.0469 \end{bmatrix}, \\
\Lambda_1 &= \begin{bmatrix} 1.1983 & 0 \\ 0 & 0.3962 \end{bmatrix}, \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0.0150 & 0 \\ 0 & 0.0405 \end{bmatrix}, \\
\Lambda_3 &= \begin{bmatrix} 0.0144 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}, \Lambda_4 = \begin{bmatrix} 0.1236 & 0 \\ 0 & 0.0023 \end{bmatrix}, \\
\Lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0.4990 & 0 \\ 0 & 0.0494 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \Lambda_6 = \begin{bmatrix} 0.7868 & 0 \\ 0 & 0.0899 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \\
\Lambda_7 &= \begin{bmatrix} 0.1473 & 0 \\ 0 & 0.0532 \end{bmatrix}, \Lambda_8 = \begin{bmatrix} 0.0667 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}, \\
X_1 = 0, X_2 &= \begin{bmatrix} -0.0031 & -0.0015 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0013 & -0.0023 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, \\
U_1 &= \begin{bmatrix} -0.1193 & -0.0471 \\ -0.2196 & -0.0132 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0.0246 & 0.0319 \\ 0.0126 & 0.0144 \end{bmatrix}, \\
H_1 &= \begin{bmatrix} 0.0780 & -0.0167 \\ -0.0127 & 0.0418 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.0580 & -0.0005 \\ -0.0040 & 0.0259 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Các tập  $\bar{S}_1, \bar{S}_2$  trong Định lý 1.6 xác định bởi

$$\begin{aligned}
\bar{S}_1 &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0.7158x_1^2 + 1.7884x_1x_2 + 0.1325x_2^2 < 0\}, \\
\bar{S}_2 &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0.7158x_1^2 + 1.7884x_1x_2 + 0.1325x_2^2 > 0\}.
\end{aligned}$$

Luật chuyển mạch giữa hai hệ con được cho bởi

$$\sigma(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x(t) \in \bar{S}_1, \\ 2 & \text{nếu } x(t) \in \bar{S}_2. \end{cases}$$

Theo Định lý 1.6, quỹ đạo của mọi véc tơ trạng thái của hệ xuất phát từ hình cầu  $\mathcal{B}(0, 1.986)$  đều chứa trong hình cầu  $\mathcal{B}(0, 2)$ .

## Chương 2

### Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của lớp hệ tuyến tính dương đa trễ

#### 2.1. Phát biểu bài toán và một số kiến thức chuẩn bị

Xét hệ điều khiển đa trễ hỗn hợp

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^N D_i x(t - \tau_i) + W\omega(t) + Bu(t), & t \in [0, T_f], \\ x(s) = \phi(s), & s \in [-\tau, 0], \tau = \max_{1 \leq i \leq N} \{\tau_i\}, \end{cases} \quad (2.1)$$

ở đó  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  là véc tơ trạng thái,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  là véc tơ điều khiển,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^p$  là véc tơ nhiễu;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  là các ma trận thực cho trước;  $\tau_i > 0 (i = 1, \dots, N)$  là độ trễ thời gian. Hàm  $\phi(s) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  là hàm điều kiện ban đầu với chuẩn xác định bởi  $\|\phi\| = \sup_{t \in [-\tau, 0]} \|\phi(t)\|$ . Véc tơ nhiễu  $\omega(t)$  là hàm liên tục và thỏa mãn điều kiện sau

$$\exists d > 0 : \int_0^{T_f} \omega^T(t)\omega(t)dt \leq d. \quad (2.2)$$

Khi không có tác động của véc tơ điều khiển, hệ (2.1) trở thành

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^N D_i x(t - \tau_i) + W\omega(t), & t \in [0, T_f], \\ x(s) = \phi(s), & s \in [-\tau, 0], \tau = \max_{1 \leq i \leq N} \{\tau_i\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Tương ứng với hệ (2.1), ta xét hàm chi phí toàn phương

$$J = \int_0^{T_f} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt, \quad (2.4)$$

ở đó  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  là các ma trận thực, đối xứng, xác định dương cho trước.

**Định nghĩa 2.1.** Hệ (2.3) được gọi là một hệ dương nếu với bất kỳ điều kiện ban đầu  $\phi(t) \in \mathbb{R}_+^n$  và  $\omega(t) \in \mathbb{R}_+^p$ , ta có véc tơ trạng thái  $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$  với mọi  $t \geq 0$ .

**Định nghĩa 2.2.** ([56]) Cho trước các số  $T_f > 0, c_2 > c_1 > 0$ . Hệ (2.3) được gọi là ổn định hữu hạn thời gian tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T)$  nếu các điều kiện sau được thỏa mãn với mọi véc tơ nhiễu  $\omega(t)$  thỏa mãn điều kiện (2.2):

$$\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \phi^T(s)\phi(s) \leq c_1 \Rightarrow x^T(t)x(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T_f].$$

**Định nghĩa 2.3.** Cho các số  $T_f > 0, c_2 > c_1 > 0$ . Nếu tồn tại một luật điều khiển ngược  $u^*(t) = Kx(t)$  và một số dương  $J^*$  sao cho hệ đóng sau

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + \sum_{i=1}^N D_i x(t - \tau_i) + W\omega(t), & t \in [0, T_f], \\ x(s) = \phi(s), & s \in [-\tau, 0], \tau = \max_{1 \leq i \leq N} \{\tau_i\}, \end{cases} \quad (2.5)$$

là hệ dương và ổn định hữu hạn thời gian tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f)$  và giá trị của hàm chi phí toàn phương (2.4) thỏa mãn  $J \leq J^*$  thì giá trị  $J^*$  được gọi là giá trị đảm bảo chi phí điều khiển và điều khiển  $u^*(t)$  là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (2.1) trong thời gian hữu hạn.

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại một số kết quả bổ trợ được dùng để chứng minh các kết quả trong mục sau. Nhắc lại rằng một ma trận thực  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là ma trận Metzler nếu tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính của ma trận  $A$  đều không âm.

**Bổ đề 2.1.** ([22]) Hệ (2.3) là hệ dương khi và chỉ khi  $A$  là ma trận Metzler,  $D_i \in \mathbb{R}_+^{n \times n} (i = 1, \dots, N), W \in \mathbb{R}_+^{n \times p}$ .

**Bổ đề 2.2.** ([2]) Cho các ma trận hằng số  $X, Y, Z$  có số chiều thích hợp thỏa mãn  $Y = Y^T > 0, X = X^T$ . Khi đó  $X + Z^T Y^{-1} Z < 0$  khi và chỉ khi

$$\begin{bmatrix} X & Z^T \\ Z & -Y \end{bmatrix} < 0.$$

## 2.2. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của lớp hệ tuyến tính dương đa trễ

Trong mục này, chúng tôi trình bày bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của lớp hệ tuyến tính dương đa trễ (2.1). Chúng tôi

sẽ thiết kế một luật điều khiển ngược  $u(t) = Kx(t)$  và tìm một số dương  $J^*$  sao cho hệ đóng (2.5) là hệ dương và ổn định hữu hạn thời gian tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f)$ . Ngoài ra, giá trị của hàm chi phí toàn phương (2.4) thỏa mãn  $J \leq J^*$ .

**Định lý 2.1.** Cho trước các số dương  $T_f, c_1, c_2$ . Giả sử rằng  $W \succeq 0, D_i \succeq 0, (i = 1, \dots, N)$  và tồn tại một ma trận đường chéo chính xác định dương  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , một ma trận  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  và một số dương  $\alpha$  sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} \Xi & PD_1^T & PD_2^T & \dots & PD_N^T & PQ & Y^T R \\ * & -P & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -P & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \dots & -Q & 0 \\ * & * & * & * & * & \dots & -R \end{bmatrix} < 0, \quad (2.6a)$$

$$\frac{d + \lambda_2 c_1}{\lambda_1} < c_2 e^{-\alpha T_f}, \quad (2.6b)$$

$$[A + BYP^{-1}]_{ij} \geq 0, \quad \forall i \neq j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, \quad (2.6c)$$

ở đó

$$\Xi = AP + PA^T + BY + Y^T B^T + NP + WW^T,$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\min}(P^{-1}),$$

$$\lambda_2 = \lambda_{\max}(P^{-1}) + \sum_{i=1}^N \tau_i \lambda_{\max}(D_i^T P^{-1} D_i).$$

Khi đó

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \in [0, T_f]$$

là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (2.1) trong thời gian hữu hạn và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển được cho bởi

$$J^* = d + \lambda_2 \|\phi\|^2.$$

*Chứng minh.* Từ điều kiện (2.6c) ta suy ra  $A + BK = A + BYP^{-1}$  là một ma trận Metzler. Điều này kết hợp với việc  $W \succeq 0, D_i \succeq 0, (i = 1, \dots, N)$ , ta suy ra hệ đóng (2.5) là một hệ dương với mọi điều kiện ban đầu  $\phi(t) \in \mathbb{R}_+^n$  và véc

tơ nhiễu  $\omega(t) \in \mathbb{R}_+^p$  thỏa mãn điều kiện (2.2) theo như kết quả của Bổ đề 2.1. Tiếp theo, ta xét hàm Lyapunov–Krasovskii sau:

$$V(t, x_t) = e^{\alpha t} x^T(t) P^{-1} x(t) + \sum_{i=1}^N e^{\alpha t} \int_{t-\tau_i}^t x^T(s) D_i^T P^{-1} D_i x(s) ds.$$

Lấy đạo hàm của hàm  $V(t, x_t)$  theo thời gian  $t$  dọc theo quỹ đạo của nghiệm của hệ đóng (2.5), ta thu được đánh giá sau

$$\begin{aligned} & \dot{V}(t, x_t) - \alpha V(t, x_t) \\ & \leq e^{\alpha t} x^T(t) [P^{-1} A + A^T P^{-1} + P^{-1} B K + K^T B^T P^{-1}] x(t) \\ & \quad + e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N 2x^T(t) P^{-1} D_i x(t - \tau_i) + 2e^{\alpha t} x^T(t) P^{-1} W \omega(t) \\ & \quad + e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N x^T(t) D_i^T P^{-1} D_i x(t) - e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N x^T(t - \tau_i) D_i^T P^{-1} D_i x(t - \tau_i). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ma trận, ta thu được các đánh giá sau:

$$2e^{\alpha t} x^T(t) P^{-1} W \omega(t) \leq e^{\alpha t} x^T(t) P^{-1} W W^T P^{-1} x(t) + e^{\alpha t} \omega^T(t) \omega(t). \quad (2.8)$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} & e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N 2x^T(t) P^{-1} D_i x(t - \tau_i) \\ & = e^{\alpha t} 2x^T(t) P^{-1} D_1 x(t - \tau_1) + \dots + e^{\alpha t} 2x^T(t) P^{-1} D_N x(t - \tau_N). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Với  $i = 1, \dots, N$ , bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ma trận, ta có

$$e^{\alpha t} 2x^T(t) P^{-1} D_i x(t - \tau_i) \leq e^{\alpha t} x^T(t) P^{-1} x(t) + e^{\alpha t} x^T(t - \tau_i) D_i^T P^{-1} D_i x(t - \tau_i). \quad (2.10)$$

Kết hợp các điều kiện (2.9) và (2.10), ta có

$$\begin{aligned} & e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N 2x^T(t) P^{-1} D_i x(t - \tau_i) \\ & \leq e^{\alpha t} N x^T(t) P^{-1} x(t) + e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N x^T(t - \tau_i) D_i^T P^{-1} D_i x(t - \tau_i). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Từ các điều kiện (2.7), (2.8) và (2.11), ta thu được:

$$\begin{aligned} & \dot{V}(t, x_t) - \alpha V(t, x_t) \\ & \leq e^{\alpha t} x^T(t) \Omega x(t) + e^{\alpha t} \omega^T(t) \omega(t) - e^{\alpha t} x^T(t) [Q + K^T R K] x(t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

ở đó

$$\begin{aligned} \Omega = & P^{-1}A + A^T P^{-1} + P^{-1}BK + K^T B^T P^{-1} + NP^{-1} + \sum_{i=1}^N D_i^T P^{-1} D_i \\ & + P^{-1}WW^T P^{-1} + Q + K^T R K. \end{aligned}$$

Bằng cách áp dụng Bổ đề Schur (Bổ đề 2.2), ta có điều kiện  $\Omega < 0$  tương đương với điều kiện sau

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Psi & D_1^T P^{-1} & D_2^T P^{-1} & \dots & D_N^T P^{-1} \\ * & -P^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ * & * & -P^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.13)$$

ở đó

$$\begin{aligned} \Psi = & P^{-1}A + A^T P^{-1} + P^{-1}BK + K^T B^T P^{-1} + P^{-1}WW^T P^{-1} \\ & + NP^{-1} + Q + K^T R K. \end{aligned}$$

Bây giờ, nhân bên trái và bên phải của ma trận  $\Phi$  bởi ma trận

$$\text{diag}\{P, \underbrace{\dots}_{(N-1)}, P\}$$

và ma trận chuyển vị của nó và đặt  $K = YP^{-1}$ , ta thu được điều kiện  $\Phi < 0$  tương đương với điều kiện (2.6a). Từ điều kiện (2.6a) và việc  $Q > 0, R > 0$ , ta thu được

$$\dot{V}(s, x_s) - \alpha V(s, x_s) < e^{\alpha s} \omega^T(s) \omega(s), \quad \forall s \in [0, T_f]. \quad (2.14)$$

Nhân hai vế của (2.14) với  $e^{-\alpha s}$ , ta có

$$e^{-\alpha s} \dot{V}(s, x_s) - \alpha e^{-\alpha s} V(s, x_s) < \omega^T(s) \omega(s), \quad \forall s \in [0, T_f]. \quad (2.15)$$

Lấy tích phân hai vế của (2.15) từ 0 tới  $t$ , ta thu được đánh giá sau

$$e^{-\alpha t} V(t, x_t) < V(0, x_0) + \int_0^t \omega^T(s) \omega(s) ds < V(0, x_0) + d. \quad (2.16)$$



Trước hết, ta đi tìm cận trên của  $V(0, x_0)$  như sau

$$\begin{aligned}
V(0, x_0) &= x^T(0)P^{-1}x(0) + \sum_{i=1}^N \int_{-\tau_i}^0 x^T(s)D_i^T P^{-1}D_i x(s) ds \\
&\leq \lambda_{\max}(P^{-1})x^T(0)x(0) + \left( \sum_{i=1}^N \tau_i \lambda_{\max}(D_i^T P^{-1}D_i) \right) \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \phi^T(s)\phi(s) \\
&\leq \left[ \lambda_{\max}(P^{-1}) + \sum_{i=1}^N \tau_i \lambda_{\max}(D_i^T P^{-1}D_i) \right] \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \phi^T(s)\phi(s) \\
&= \lambda_2 \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \phi^T(s)\phi(s) < \lambda_2 c_1.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Kết hợp các điều kiện (2.16) và (2.17), ta được

$$e^{-\alpha t}V(t, x_t) < \lambda_2 c_1 + d. \tag{2.18}$$

Mặt khác, dễ dàng tính toán được

$$e^{-\alpha t}V(t, x_t) \geq \lambda_1 e^{-\alpha t} x^T(t)x(t), \quad \forall t \in [0, T_f]. \tag{2.19}$$

Kết hợp điều kiện (2.18) với điều kiện (2.6c), ta có

$$x^T(t)x(t) < \frac{\lambda_2 c_1 + d}{\lambda_1} e^{\alpha t} < \frac{\lambda_2 c_1 + d}{\lambda_1} e^{\alpha T_f} \leq c_2, \quad \forall t \in [0, T_f],$$

điều này chứng tỏ rằng hệ đóng (2.5) là ổn định hữu hạn thời gian tương ứng với bộ  $(c_1, c_2, T_f)$ . Bây giờ, ta đi tìm giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (2.1) trong thời gian hữu hạn. Từ điều kiện (2.12) và (2.6a), ta có

$$\dot{V}(t, x_t) - \alpha V(t, x_t) \leq e^{\alpha t} \omega^T(t)\omega(t) - e^{\alpha t} x^T(t) [Q + K^T R K] x(t), \tag{2.20}$$

Nhân hai vế của (2.20) với  $e^{-\alpha t}$ , ta thu được

$$e^{-\alpha t} \dot{V}(t, x_t) - \alpha V(t, x_t) e^{-\alpha t} \leq \omega^T(t)\omega(t) - x^T(t) [Q + K^T R K] x(t). \tag{2.21}$$

Lấy tích phân hai vế của (2.21) từ 0 tới  $T_f$ , ta thu được

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{T_f} x^T(t) [Q + K^T R K] x(t) dt \\
&\leq \int_0^{T_f} \omega^T(t)\omega(t) dt + V(0, x_0) - e^{-\alpha T_f} V(T_f, x_{T_f}) \\
&\leq d + V(0, x_0) \leq d + \lambda_2 \|\phi\|^2 = J^*.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Định lí được chứng minh hoàn toàn.  $\square$

**Nhận xét 2.1.** Vì điều kiện (2.6a) là một bất đẳng thức ma trận tuyến tính nên ta có thể giải điều kiện này bằng cách sử dụng hộp công cụ LMI Control Toolbox trong MATLAB (xem [2]). Do đó, từ Định lý 2.1, chúng ta có các bước sau để giải bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn của lớp hệ tuyến tính dương đa trễ (2.1):

**Bước 1.** Giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính (2.6a), ta thu được ma trận đường chéo chính xác định dương  $P$  và ma trận  $Y$ .

**Bước 2.** Tính ma trận nghịch đảo  $P^{-1}$  và  $\lambda_{\min}(P^{-1}), \lambda_{\max}(P^{-1})$ .

**Bước 3.** Kiểm tra các điều kiện (2.6b), (2.6c) trong Định lý 2.1. Nếu các điều kiện này thỏa mãn, chuyển sang Bước 4. Nếu trái lại, quay trở lại Bước 1.

**Bước 4.** Ma trận điều khiển ngược  $K$  xác định bởi  $K = YP^{-1}$ .

Kết quả của Định lý 2.1 có thể mở rộng cho lớp hệ điều khiển đa trễ biến thiên. Xét hệ điều khiển đa trễ biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^N D_i x(t - \tau_i(t)) + W\omega(t) + Bu(t), & t \in [0, T_f], \\ x(s) = \phi(s), & s \in [-\tau, 0], \tau = \max_{1 \leq i \leq N} \{\tau_i\}, \end{cases} \quad (2.23)$$

ở đó  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  là véc tơ trạng thái,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  là véc tơ điều khiển,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^p$  là véc tơ nhiễu;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, W \in \mathbb{R}^{n \times p}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  là các ma trận thực, hằng số cho trước. Hàm  $\phi(s) \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$  là điều kiện ban đầu với chuẩn cho bởi  $\|\phi\| = \sup_{t \in [-\tau, 0]} \|\phi(t)\|$ . Véc tơ nhiễu  $\omega(t)$  thỏa mãn điều kiện (2.2). Hàm trễ  $\tau_i(t) (i = 1, \dots, N)$  là hàm khả vi, liên tục thỏa mãn các điều kiện

$$0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.24a)$$

$$\dot{\tau}_i(t) \leq \delta_i < 1, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.24b)$$

ở đó  $\tau_i, \delta_i (i = 1, \dots, N)$  là các hằng số. Hệ quả sau đưa ra một điều kiện đủ cho việc thiết kế một luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho hệ điều khiển đa trễ biến thiên (2.23).

**Hệ quả 2.1.** Cho trước các hằng số dương  $T_f, c_1, c_2$ . Giả sử rằng  $W \succeq 0, D_i \succeq 0, (i = 1, \dots, N)$  và tồn tại một ma trận đường chéo chính xác định dương  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , một ma trận  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  và một số dương  $\alpha$  sao cho các điều kiện

sau đây được thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi} & PD_1^T & PD_2^T & \dots & PD_N^T & PQ & Y^T R \\ * & -P & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -P & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \dots & -Q & 0 \\ * & * & * & * & * & \dots & -R \end{bmatrix} < 0, \quad (2.25a)$$

$$\frac{d + \lambda_2 c_1}{\lambda_1} < c_2 e^{-\alpha T_f}, \quad (2.25b)$$

$$[A + BYP^{-1}]_{ij} \geq 0, \quad \forall i \neq j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, \quad (2.25c)$$

ở đó

$$\hat{\Xi} = AP + PA^T + BY + Y^T B^T + WW^T + \sum_{i=1}^N \frac{P}{1 - \delta_i},$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\min}(P^{-1}),$$

$$\lambda_2 = \lambda_{\max}(P^{-1}) + \sum_{i=1}^N \tau_i \lambda_{\max}(D_i^T P^{-1} D_i).$$

Khi đó

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \in [0, T_f]$$

là luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (2.23) trong thời gian hữu hạn và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển được cho bởi

$$J^* = d + \lambda_2 \|\phi\|^2.$$

*Chứng minh.* Xét hàm Lyapunov-Krasovskii như sau:

$$V(x_t) = e^{\alpha t} x^T(t) P^{-1} x(t) + \sum_{i=1}^N e^{\alpha t} \int_{t-\tau_i(t)}^t x^T(s) D_i^T P^{-1} D_i x(s) ds.$$

Khi đó bằng kỹ thuật tương tự như chứng minh Định lý 2.1, ta dễ dàng chứng minh được Hệ quả 2.1.  $\square$

**Nhận xét 2.2.** Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn đã được nghiên cứu cho một vài lớp hệ phương trình vi phân trong những năm gần đây. Trong [73], các tác giả nghiên cứu bài toán đảm bảo chi phí điều khiển

trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ tuyến tính ngẫu nhiên Itô bằng cách sử dụng công thức Itô, bất đẳng thức Gronwall và biến đổi ma trận. Bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp ngẫu nhiên Markovian jump được nghiên cứu trong [74]. Chú ý rằng, độ trễ thời gian không được đề cập đến trong công trình của các tác giả trong [73, 74]. Gần đây, bằng cách đưa ra một định nghĩa về tính ổn định hữu hạn thời gian cho lớp hệ tuyến tính dương chuyển mạch, các tác giả trong [3] đưa ra một số tiêu chuẩn cho bài toán đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ dương tuyến tính chuyển mạch. Khái niệm này khác so với khái niệm ổn định hữu hạn thời gian được đưa ra bởi Dorato P., Weiss L. và Infante E.F. (xem [8, 70]). Chú rằng khái niệm ổn định hữu hạn thời gian được đưa ra bởi Dorato P., Weiss L. và Infante E.F. đã được nhiều nhà khoa học sử dụng và đã có hàng ngàn công trình sử dụng khái niệm này được đăng trên các tạp chí quốc tế ISI uy tín. Theo như hiểu biết của chúng tôi, đây là lần đầu tiên bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ tuyến tính dương đa trễ được nghiên cứu trong các Định lý 2.1 và Hệ quả 2.1 bằng cách sử dụng định nghĩa ổn định hữu hạn thời gian được đưa ra bởi Dorato P., Weiss L. và Infante E.F.

Sau đây, chúng tôi đưa ra hai ví dụ số để minh họa cho kết quả lý thuyết.

**Ví dụ 2.1.** Xét hệ điều khiển có trễ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + D_1x(t - 0.5) + W\omega(t) + Bu(t), & t \in [0, T_f], \\ x(s) = \phi(s) \succeq 0, & s \in [-0.5, 0], \end{cases} \quad (2.26)$$

ở đó  $x(t) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ . Nhiễu  $\omega(t) \in \mathbb{R}_+$  thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^{T_f} \omega^T(t)\omega(t)dt \leq 1,$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -0.1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.08 \end{bmatrix}.$$

Chú ý rằng ma trận  $A$  không là ma trận Metzler. Do đó, khi điều khiển  $u(t) \equiv 0$  hệ (2.26) không là hệ dương. Xét hàm chi phí toàn phương (2.2) với  $R = [0.02]$  và

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Ta thấy các điều kiện trong Định lý 2.1 được thỏa mãn với  $c_1 = 1, c_2 = 1.8, T_f = 5, \alpha = 0.001, d = 1$  và

$$P = \begin{bmatrix} 0.1274 & 0 \\ 0 & 0.0957 \end{bmatrix}, \quad Y = [4.9413 \quad -14.8297].$$

Vậy, theo Định lý 2.1, hệ đóng tương ứng là một hệ dương và ổn định hữu hạn thời gian tương ứng với bộ  $(1, 1.8, 5)$ . Ngoài ra, luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (2.26) trong thời gian hữu hạn xác định bởi

$$u(t) = [38.7739 \quad -154.9365] x(t), \quad \forall t \in [0, 5]$$

và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ là

$$J^* = 12.5139 \|\phi\|^2 + 1.$$

**Ví dụ 2.2.** Xét hệ điều khiển đa trễ biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^3 D_i x(t - \tau_i(t)) + W\omega(t) + Bu(t), & t \in [0, T_f], \\ x(s) = \phi(s) \succeq 0, & s \in [-1.5, 0], \end{cases} \quad (2.27)$$

ở đó  $x(t) \in \mathbb{R}_+^2, u(t) \in \mathbb{R}, \tau_1(t) = \sin^2 0.2t, \tau_2(t) = 1.2 \sin^2 0.25t, \tau_3(t) = 1.5 \sin^2 \frac{t}{3}$ . Nhiều  $\omega(t) \in \mathbb{R}_+$  thỏa mãn

$$\int_0^{T_f} \omega^T(t)\omega(t)dt \leq 1,$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \\ D_3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}.$$

Dễ dàng kiểm tra được các hàm trễ  $\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t)$  thỏa mãn điều kiện (2.24) với  $\tau_1 = 1, \delta_1 = 0.2, \tau_2 = 1.2, \delta_2 = 0.3, \tau_3 = 1.5, \delta_3 = 0.5$ . Chú ý rằng ma trận  $A$  không là ma trận Metzler. Do đó, khi điều khiển  $u(t) \equiv 0$  hệ (2.27) không là hệ dương. Xét hàm chi phí toàn phương (2.2) với  $R = [0.01]$  và

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Rõ ràng, các điều kiện trong Hệ quả 2.1 được thỏa mãn với  $c_1 = 0.1$ ,  $c_2 = 1$ ,  $T_f = 20$ ,  $\alpha = 0.0005$ ,  $d = 1$  và

$$P = \begin{bmatrix} 0.5969 & 0 \\ 0 & 0.3703 \end{bmatrix}, \quad Y = [-2.6634 \quad 1.1774].$$

Vậy, theo Hệ quả 2.1, hệ đóng tương ứng là một hệ dương và ổn định hữu hạn thời gian tương ứng với bộ  $(0.1, 1, 20)$ . Ngoài ra, luật điều khiển ngược đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ (2.26) trong thời gian hữu hạn xác định bởi

$$u(t) = [-4.4623 \quad 3.1793] x(t), \quad \forall t \in [0, 20],$$

và giá trị đảm bảo chi phí điều khiển cho hệ là

$$J^* = 5.1344 \|\phi\|^2 + 1.$$

## Chương 3

### Tính ổn định mũ và tính thụ động của lớp hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên

Chương này trình bày tính ổn định mũ và tính thụ động của một lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên. Các kết quả chính của chương này được viết dựa trên bài báo [62] của chủ nhiệm đề tài.

#### 3.1. Phát biểu bài toán

Xét hệ phương trình vi phân phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}x(t - \tau(t)) + E_{\sigma(t)}\omega(t) + f_{\sigma(t)}(t, x(t), x(t - \tau(t)), \omega(t)), \\ x_{t_0}(s) = x(t_0 + s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau_2, 0], \\ z(t) = M_{\sigma(t)}x(t) + U_{\sigma(t)}x(t - \tau(t)) + W_{\sigma(t)}\omega(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

ở đó  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  là véc tơ trạng thái,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$  là véc tơ nhiễu,  $z(t) \in \mathbb{R}^m$  là véc tơ quan sát của hệ;  $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}$  là luật chuyển mạch;  $A_i, D_i, E_i, M_i, U_i, W_i, i = 1, \dots, N$ , là các ma trận hằng số cho trước;  $\phi(s)$  là điều kiện ban đầu. Nhiễu phi tuyến  $f_i(\cdot), i = 1, \dots, N$ , thỏa mãn  $f_i(t, 0, 0, 0) = 0$ , và

$$\begin{aligned} & f_i^T(t, x(t), x(t - \tau(t)), \omega(t))f_i(t, x(t), x(t - \tau(t)), \omega(t)) \\ & \leq x^T(t)L_i^T L_i x(t) + x^T(t - \tau(t))G_i^T G_i x(t - \tau(t)) + \omega^T(t)H_i^T H_i \omega(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

ở đó  $L_i, G_i, H_i, i = 1, \dots, N$ , là các ma trận hằng số cho trước. Chú ý rằng giả thiết (3.2) đặt lên nhiễu phi tuyến  $f_i(\cdot), i = 1, \dots, N$ , được áp dụng rộng rãi trong thực tế và được nhiều nhà nghiên cứu xem xét (xem [7, 26, 39, 40, 41, 76]).

Độ trễ  $\tau(t)$  là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện dưới đây

$$0 \leq \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2, \quad (3.3)$$

ở đó  $\tau_1, \tau_2$  là các hằng số không âm cho trước.

Tương ứng với tín hiệu chuyển mạch  $\sigma(t)$ , ta có trình tự chuyển mạch sau đây

$$\{x_{t_0}; (i_0, t_0), \dots, (i_k, t_k) : i_k \in \mathcal{N}, k = 0, 1, \dots\},$$

điều này có nghĩa rằng hệ con thứ  $i_k$  được kích hoạt khi  $t \in [t_k, t_{k+1})$ .

**Định nghĩa 3.1.** Cho bất kỳ hai số  $T_2 > T_1 \geq 0$ , ký hiệu  $N_\sigma(T_1, T_2)$  là số lần chuyển đổi của luật chuyển mạch  $\sigma(t)$  trên khoảng  $(T_1, T_2)$ . Nếu  $N_\sigma(T_1, T_2) \leq N_0 + \frac{T_2 - T_1}{T_a}$  đúng với  $T_a > 0, N_0 \geq 0$ , thì  $T_a$  được gọi là thời gian dừng trung bình (the average dwell time). Như thường lệ, ta chọn  $N_0 = 0$ .

**Định nghĩa 3.2.** Hệ (3.1), với  $\omega(t) \equiv 0$ , được gọi là ổn định mũ dưới luật chuyển mạch  $\sigma(t)$  nếu nghiệm  $x(t, \phi)$  của hệ (3.1) thỏa mãn

$$\|x(t, \phi)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_{t_0}\|, \quad \forall t \geq t_0$$

với hằng số  $\beta \geq 1, \alpha > 0$ .

**Định nghĩa 3.3.** Hệ phương trình vi phân phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên (3.1) được gọi là thụ động nếu tồn tại một hằng số  $\gamma \geq 0$  sao cho với điều kiện ban đầu bằng không, bất đẳng thức dưới đây đúng với mọi  $t_f \geq t_0$

$$2 \int_{t_0}^{t_f} z^T(s) \omega(s) ds \geq -\gamma \int_{t_0}^{t_f} \omega^T(s) \omega(s) ds. \quad (3.4)$$

## 3.2. Tính ổn định mũ của lớp hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên

Để thuận tiện cho việc trình bày các kết quả tiếp theo, ta ký hiệu  $e_i (i = 1, \dots, 11) \in \mathbb{R}^{n \times 11n}$  là ma trận khối mà tại vị trí thứ  $i$  là ma trận đơn vị  $I$  còn các vị trí khác là ma trận không. Chẳng hạn,  $e_4 = [0 \ 0 \ 0 \ I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ,  $\mathcal{A} = Ae_1 + De_3 + e_{11}$ , các véc tơ  $\chi_0(t) = [\chi_{01}^T(t) \ \chi_{02}^T(t) \ \chi_{03}^T(t)]^T$ , ở đó

$$\chi_{01}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_1) \\ x(t - \tau(t)) \\ x(t - \tau_2) \end{bmatrix}, \quad \chi_{02}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} \int_{t-\tau_1}^t x(s) ds \\ \frac{1}{\tau(t) - \tau_1} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} x(s) ds \\ \frac{1}{\tau_2 - \tau(t)} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} x(s) ds \end{bmatrix},$$

$$\chi_{03}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\tau_1^2} \int_{t-\tau_1}^t \int_s^t x(u) dud s \\ \frac{2}{(\tau(t) - \tau_1)^2} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \int_s^{t-\tau_1} x(u) dud s \\ \frac{2}{(\tau_2 - \tau(t))^2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \int_s^{t-\tau(t)} x(u) dud s \\ f(\cdot) \end{bmatrix},$$



các ma trận

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1(\tau) &= [e_1^T \quad \tau_1 e_5^T \quad (\tau - \tau_1)e_6^T + (\tau_2 - \tau)e_7^T \quad 0.5\tau_1^2 e_8^T]^T, \\ \mathcal{G}_2 &= [\mathcal{A}^T \quad (e_1 - e_2)^T \quad (e_2 - e_4)^T \quad \tau_1(e_1 - e_5)^T]^T, \\ \mathcal{G}_3 &= [e_1^T \quad e_2^T \quad e_5^T \quad e_8^T]^T, \quad \mathcal{G}_4 = [e_2^T \quad e_3^T \quad e_6^T \quad e_9^T]^T, \quad \mathcal{G}_5 = [e_3^T \quad e_4^T \quad e_7^T \quad e_{10}^T]^T,\end{aligned}$$

và

$$F = \begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0 & 0 \\ I_n & I_n & -2I_n & 0 \\ I_n & -I_n & 6I_n & -6I_n \end{bmatrix},$$

$$\bar{S} = \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_1}S, 3e^{-\alpha\tau_1}S, 5e^{-\alpha\tau_1}S\}, \quad \bar{Z} = \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_2}Z, 3e^{-\alpha\tau_2}Z, 5e^{-\alpha\tau_2}Z\}.$$

Trước hết, ta xét hệ phương trình vi phân phi tuyến có trễ biến thiên dưới đây

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t - \tau(t)) + f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \\ x_{t_0}(s) &= x(t_0 + s), \quad s \in [-\tau_2, 0],\end{aligned}\tag{3.5}$$

ở đó nhiễu phi tuyến  $f(t, x(t), x(t - \tau(t)))$  thỏa mãn điều kiện dưới đây:

$$\begin{aligned}& f^T(t, x(t), x(t - \tau(t)))f(t, x(t), x(t - \tau(t))) \\ & \leq x^T(t)L^T Lx(t) + x^T(t - \tau(t))G^T Gx(t - \tau(t)),\end{aligned}\tag{3.6}$$

với  $L, G$  là các ma trận thực, hằng số cho trước.

Chọn hàm Lyapunov–Krasovskii cho hệ (3.5) có dạng sau

$$\begin{aligned}V(x_t) &= \eta^T(t)P\eta(t) + \int_{t-\tau_1}^t e^{\alpha(s-t)}x^T(s)Qx(s)ds + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{\alpha(s-t)}x^T(s)Rx(s)ds \\ &+ \tau_1 \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+s}^t e^{\alpha(s-t)}\dot{x}^T(u)S\dot{x}(u)duds \\ &+ \tau_{12} \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+s}^t e^{\alpha(s-t)}\dot{x}^T(u)Z\dot{x}(u)duds,\end{aligned}\tag{3.7}$$

ở đó  $P \in \mathbb{S}_{4n}^+$ ,  $Q, R, S, Z \in \mathbb{S}_n^+$ , và

$$\tau_{12} = \tau_2 - \tau_1, \quad \eta(t) = \left[ x^T(t) \quad \int_{t-\tau_1}^t x^T(s)ds \quad \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} x^T(s)ds \quad \int_{t-\tau_1}^t \int_s^t x^T(u)duds \right]^T.$$

Khi đó, ta có bổ đề sau đây.

**Bổ đề 3.1.** Cho trước số  $\alpha > 0$ . Giả sử rằng tồn tại các ma trận  $P \in \mathbb{S}_{4n}^+$ ,  $Q, R, S, Z \in \mathbb{S}_n^+$ ,  $X \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ , và một hằng số  $\epsilon > 0$  sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs) sau đây thỏa mãn với  $\tau \in \{\tau_1, \tau_2\}$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \bar{Z} & X \\ X^T & \bar{Z} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.8a)$$

$$\Omega(\tau) = \Xi_1(\tau) - \Xi_2 - \Gamma^T \Phi \Gamma < 0. \quad (3.8b)$$

Khi đó dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ (3.5), ta thu được đánh giá dưới đây

$$V(x_t) \leq e^{-\alpha(t-t_0)} V(x_{t_0}), \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.9)$$

ở đó

$$\begin{aligned} \Xi_1(\tau) &= \mathcal{G}_1^T(\tau) P \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_2^T P \mathcal{G}_1(\tau) + \alpha \mathcal{G}_1^T(\tau) P \mathcal{G}_1(\tau) + e_1^T (Q + \epsilon L^T L) e_1 \\ &\quad + e_2^T (e^{-\alpha\tau_1} R - e^{-\alpha\tau_1} Q) e_2 - e^{-\alpha\tau_2} e_4^T R e_4 + \epsilon e_3^T G^T G e_3 \\ &\quad - \epsilon e_{11}^T e_{11} + \mathcal{A}^T (\tau_1^2 S + \tau_{12}^2 Z) \mathcal{A}, \\ \Xi_2 &= \mathcal{G}_3^T F^T \bar{S} F \mathcal{G}_3, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} F \mathcal{G}_4 \\ F \mathcal{G}_5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*Chứng minh.* Với  $\epsilon > 0$ , từ (3.6) ta có

$$-\epsilon f^T(\cdot) f(\cdot) + \epsilon x^T(t) L^T L x(t) + \epsilon x^T(t - \tau(t)) G^T G x(t - \tau(t)) \geq 0. \quad (3.10)$$

Lấy đạo hàm của  $V(x_t)$  theo  $t$  và sử dụng (3.10), ta thu được

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) &\leq \chi_0^T(t) \Xi_1(\tau) \chi_0(t) - \tau_1 e^{-\alpha\tau_1} \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) S \dot{x}(s) ds \\ &\quad - \tau_{12} e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Bằng cách áp dụng Bổ đề 1.1, ta thu được ước lượng dưới đây

$$-\tau_1 e^{-\alpha\tau_1} \int_{t-\tau_1}^t \dot{x}^T(s) S \dot{x}(s) ds \leq -\chi_0^T(t) \mathcal{G}_3^T F^T \bar{S} F \mathcal{G}_3 \chi_0(t) = -\chi_0^T(t) \Xi_2 \chi_0(t). \quad (3.12)$$

Bằng cách tích phân dưới đây thành tổng của hai tích phân

$$\begin{aligned} & -\tau_{12} e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds \\ &= -\tau_{12} e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds - \tau_{12} e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds \end{aligned}$$

và sử dụng Bổ đề 1.1 và 1.2, tích phân thứ hai trong (3.11) được ước lượng thành

$$\begin{aligned}
& -\tau_{12}e^{-\alpha\tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds \\
& \leq -\frac{\tau_{12}}{\tau(t)-\tau_1}\chi_0^T(t)\mathcal{G}_4^T F^T \bar{Z} F \mathcal{G}_4 \chi_0(t) - \frac{\tau_{12}}{\tau_2-\tau(t)}\chi_0^T(t)\mathcal{G}_5^T F^T \bar{Z} F \mathcal{G}_5 \chi_0(t) \\
& = -\chi_0^T(t)\Gamma^T \begin{bmatrix} \frac{\tau_{12}}{\tau(t)-\tau_1}\bar{Z} & 0 \\ 0 & \frac{\tau_{12}}{\tau_2-\tau(t)}\bar{Z} \end{bmatrix} \Gamma \chi_0(t) \\
& \leq -\chi_0^T(t)\Gamma^T \begin{bmatrix} \bar{Z} & X \\ X^T & \bar{Z} \end{bmatrix} \Gamma \chi_0(t) \\
& = -\chi_0^T(t)\Gamma^T \Phi \Gamma \chi_0(t). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Do đó, từ (3.11) tới (3.13), ta có

$$\dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) \leq \chi_0^T(t)\Omega(\tau)\chi_0(t). \tag{3.14}$$

Vì  $\Omega(\tau)$  là một hàm affine theo  $\tau$  nên  $\Omega(\tau) < 0$  với mọi  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$  khi và chỉ khi  $\Omega(\tau_1) < 0$  và  $\Omega(\tau_2) < 0$ . Do đó nếu (3.8b) đúng với  $\tau = \tau_1$  và  $\tau = \tau_2$  thì

$$\dot{V}(x_t) + \alpha V(x_t) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0. \tag{3.15}$$

Tích phân hai vế của bất đẳng thức trên ta thu được (3.9).  $\square$

Bây giờ, ta xét hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}x(t - \tau(t)) + f_{\sigma(t)}(t, x(t), x(t - \tau(t))), \\ x_{t_0} = x(t_0 + s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau_2, 0]. \end{cases} \tag{3.16}$$

Định lý dưới đây đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định mũ của hệ trong trường hợp đạo hàm của độ trễ không biết hoặc độ trễ là hàm không khả vi.

**Định lý 3.1.** Cho trước số  $\alpha > 0$ . Giả sử rằng tồn tại các ma trận  $P_i =$

$$\begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i & P_{13}^i & P_{14}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i & P_{23}^i & P_{24}^i \\ P_{31}^i & P_{32}^i & P_{33}^i & P_{34}^i \\ P_{41}^i & P_{42}^i & P_{43}^i & P_{44}^i \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_{4n}^+, \quad Q_i, R_i, S_i, Z_i \in \mathbb{S}_n^+, \quad X_i \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}, \quad (i = 1, \dots, N), \text{ và}$$

các hằng số  $\epsilon_i > 0, (i = 1, \dots, N)$  sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau đây đúng với  $\tau \in \{\tau_1, \tau_2\}$

$$\Phi^i = \begin{bmatrix} \bar{Z}_i & X_i \\ X_i^T & \bar{Z}_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{3.17a}$$

$$\Omega^i(\tau) = \Xi_1^i(\tau) - \Xi_2^i - \Gamma^T \Phi^i \Gamma < 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.17b)$$

Khi đó hệ (3.16) ổn định mũ với bất kỳ luật chuyển mạch mà thời gian dừng trung bình (average dwell time) thỏa mãn

$$T_a > T_a^* = \frac{\ln \mu}{\alpha}. \quad (3.18)$$

Ngoài ra, nghiệm của hệ thỏa mãn đánh giá dưới đây

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{b}{a}} e^{-\lambda(t-t_0)} \|x_{t_0}\|, \quad (3.19)$$

ở đó  $\mu \geq 1$  thỏa mãn

$$P_i \leq \mu P_j, \quad Q_i \leq \mu Q_j, \quad R_i \leq \mu R_j, \quad S_i \leq \mu S_j, \quad Z_i \leq \mu Z_j, \quad \forall i, j \in \mathcal{N}, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{A}_i = A_i e_1 + D_i e_3 + e_{11}, \quad \bar{S}_i = \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_1} S_i, 3e^{-\alpha\tau_1} S_i, 5e^{-\alpha\tau_1} S_i\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\bar{Z}_i = \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_2} Z_i, 3e^{-\alpha\tau_2} Z_i, 5e^{-\alpha\tau_2} Z_i\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\begin{aligned} \Xi_1^i(\tau) &= \mathcal{G}_1^T(\tau) P_i \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_2^T P_i \mathcal{G}_1(\tau) + \alpha \mathcal{G}_1^T(\tau) P_i \mathcal{G}_1(\tau) + e_1^T (Q_i + \epsilon_i L_i^T L_i) e_1 \\ &\quad + e_2^T (e^{-\alpha\tau_1} R_i - e^{-\alpha\tau_1} Q_i) e_2 - e^{-\alpha\tau_2} e_4^T R_i e_4 + \epsilon_i e_3^T G_i^T G_i e_3 \\ &\quad - \epsilon_i e_{11}^T e_{11} + \mathcal{A}_i^T (\tau_1^2 S_i + \tau_{12}^2 Z_i) \mathcal{A}_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

$$\Xi_2^i = \mathcal{G}_3^T F^T \bar{S}_i F \mathcal{G}_3, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( \alpha - \frac{\ln \mu}{T_a} \right), \quad a = \min_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\min}(P_{11}^i),$$

$$\begin{aligned} b &= \max_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\max}(P_i) + \tau_1 \max_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\max}(Q_i) + \tau_{12} \max_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\max}(R_i) + \frac{1}{2} \max_{i \in \mathcal{N}} \tau_1^3 \lambda_{\max}(S_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \tau_{12}^2 (\tau_1 + \tau_2) \max_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\max}(Z_i). \end{aligned}$$

*Chứng minh.* Xây dựng hàm Lyapunov–Krasovskii cho hệ (3.16) như sau

$$\begin{aligned} V(x_t) &= V_{\sigma(t)}(x_t) = \eta^T(t) P_{\sigma(t)} \eta(t) + \int_{t-\tau_1}^t e^{\alpha(s-t)} x^T(s) Q_{\sigma(t)} x(s) ds \\ &\quad + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} e^{\alpha(s-t)} x^T(s) R_{\sigma(t)} x(s) ds \\ &\quad + \tau_1 \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+s}^t e^{\alpha(s-t)} \dot{x}^T(u) S_{\sigma(t)} \dot{x}(u) duds \\ &\quad + \tau_{12} \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+s}^t e^{\alpha(s-t)} \dot{x}^T(u) Z_{\sigma(t)} \dot{x}(u) duds. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Khi mà  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , các điều kiện (3.17a), (3.17b) và Bổ đề 3.1 cho ta ước lượng sau

$$V(x_t) = V_{\sigma(t)}(x_t) \leq e^{-\alpha(t-t_k)} V_{\sigma(t_k)}(x_{t_k}). \quad (3.22)$$

Sử dụng (3.20) và (3.22), tại thời điểm chuyển mạch  $t_i$ , ta có

$$V_{\sigma(t_i)}(x_{t_i}) \leq \mu V_{\sigma(t_i^-)}(x_{t_i^-}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

Từ (3.22), (3.23) và quan hệ  $k = N_{\sigma}(t_0, t) \leq \frac{t-t_0}{T_a}$ , ta thu được

$$\begin{aligned} V(x_t) &\leq e^{-\alpha(t-t_k)} \mu V_{\sigma(t_k^-)}(x_{t_k^-}) \leq \dots \leq e^{-\alpha(t-t_0)} \mu^k V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}) \\ &\leq e^{-(\alpha - \frac{\ln \mu}{T_a})(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sử dụng một vài tính toán trực tiếp, ta thu được

$$a \|x(t, \phi)\|^2 \leq V(x_t), \quad V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}) \leq b \|x_{t_0}\|^2. \quad (3.25)$$

Kết hợp (3.24) và (3.25), ta được

$$\|x(t, \phi)\|^2 \leq \frac{1}{a} V(x_t) \leq \frac{b}{a} e^{-(\alpha - \frac{\ln \mu}{T_a})(t-t_0)} \|x_{t_0}\|^2. \quad (3.26)$$

Từ đó ta thu được (3.19). Định lý được chứng minh.  $\square$

**Nhận xét 3.1.** Chú ý rằng bài toán nghiên cứu tính ổn định tiệm cận và ổn định mũ của lớp hệ phương trình vi phân chuyển mạch phi tuyến đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trong những năm gần đây (xem [26, 39, 40, 41, 54, 76] và các tài liệu tham khảo trong đó). Tuy nhiên, trong các công trình đã công bố vẫn còn một số hạn chế đó là độ trễ thường được giả thiết là hàm khả vi và đạo hàm của nó là bị chặn. Mặc dù đã có một số chứng minh lý thuyết và ví dụ số cho thấy các bất đẳng thức tích phân mới được đề xuất trong [53] đưa ra ước lượng tốt hơn so với bất đẳng thức Jensen và các biến thể của nó [17, 59], thách thức cụ thể vẫn là làm cách nào xây dựng được một hàm Lyapunov-Krasovskii phù hợp và hiệu quả cho hệ phương trình vi phân chuyển mạch phi tuyến. Bằng cách sử dụng một vài bất đẳng thức tích phân mới được đề xuất trong [53], kết hợp kỹ thuật tổ hợp lỗi trong [52] khi ước lượng đạo hàm của hàm Lyapunov-Krasovskii và sử dụng cách tiếp cận thời gian dừng trung bình (the average dwell time), Định lý 3.1 giải bài toán nghiên cứu tính ổn định mũ của lớp hệ phương trình vi phân chuyển mạch phi tuyến trong trường hợp độ trễ là hàm liên tục nhưng không khả vi. Do đó, kết quả của chúng tôi ít bảo thủ hơn các kết quả trong [26, 39, 40, 41, 54, 76].

Khi độ trễ là một hàm khả vi và  $\dot{\tau}(t) \leq \delta < 1$ , ở đó  $\delta$  là một hằng số đã biết, hệ quả dưới đây cho ta một điều kiện cải tiến cho tính ổn định mũ của lớp hệ phương trình vi phân chuyển mạch phi tuyến trong trường hợp này.

**Hệ quả 3.1.** Cho trước số  $\alpha > 0$ . Giả sử rằng tồn tại các ma trận  $P_i = \begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i & P_{13}^i & P_{14}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i & P_{23}^i & P_{24}^i \\ P_{31}^i & P_{32}^i & P_{33}^i & P_{34}^i \\ P_{41}^i & P_{42}^i & P_{43}^i & P_{44}^i \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_{4n}^+$ ,  $Q_i, R_i, S_i, Z_i, Q_i^d, W_i^d, M_i^d \in \mathbb{S}_n^+$ ,  $X_i \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ , ( $i = 1, \dots, N$ ), và các số  $\epsilon_i > 0$ , ( $i = 1, \dots, N$ ) sao cho bất đẳng thức ma trận dưới đây đúng với  $\tau \in \{\tau_1, \tau_2\}$

$$\Phi^i = \begin{bmatrix} \bar{Z}_i & X_i \\ X_i^T & \bar{Z}_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.27a)$$

$$\hat{\Omega}^i(\tau) = \hat{\Xi}_1^i(\tau) - \Xi_2^i - \Gamma^T \Phi^i \Gamma < 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.27b)$$

Khi đó hệ (3.16) ổn định mũ với bất kỳ luật chuyển mạch mà thời gian dừng trung bình thỏa mãn

$$T_a > T_a^* = \frac{\ln \mu}{\alpha}. \quad (3.28)$$

Ngoài ra, nghiệm của hệ thỏa mãn đánh giá dưới đây

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{\mathbf{b}}{a}} e^{-\lambda(t-t_0)} \|x_{t_0}\|, \quad (3.29)$$

ở đó  $\mu \geq 1$  thỏa mãn

$$\begin{aligned} P_i &\leq \mu P_j, Q_i \leq \mu Q_j, R_i \leq \mu R_j, S_i \leq \mu S_j, Z_i \leq \mu Z_j, Q_i^d \leq \mu Q_j^d, \\ W_i^d &\leq \mu W_j^d, M_i^d \leq \mu M_j^d, \forall i, j \in \mathcal{N}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\mathcal{A}_i = A_i e_1 + D_i e_3 + e_{11}, \quad \bar{S}_i = \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_1} S_i, 3e^{-\alpha\tau_1} S_i, 5e^{-\alpha\tau_1} S_i\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\bar{Z}_i = \text{diag}\{e^{-\alpha\tau_2} Z_i, 3e^{-\alpha\tau_2} Z_i, 5e^{-\alpha\tau_2} Z_i\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_1^i(\tau) &= \mathcal{G}_1^T(\tau) P_i \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_2^T P_i \mathcal{G}_1(\tau) + \alpha \mathcal{G}_1^T(\tau) P_i \mathcal{G}_1(\tau) + e_1^T (Q_i + Q_i^d + \epsilon_i L_i^T L_i) e_1 \\ &\quad + e_2^T (e^{-\alpha\tau_1} R_i - e^{-\alpha\tau_1} Q_i) e_2 - e^{-\alpha\tau_2} e_4^T R_i e_4 \\ &\quad + e_3^T (\epsilon_i G_i^T G_i - (1 - \delta) e^{-\alpha\tau_2} Q_i^d) e_3 \\ &\quad - \epsilon_i e_{11}^T e_{11} + e^{-\alpha\tau_1} e_2^T W_i^d e_2 - e^{-\alpha\tau_2} e_4^T M_i^d e_4 \\ &\quad + (1 - \delta) e_3^T (e^{-\alpha\tau_1} M_i^d - e^{-\alpha\tau_2} W_i^d) e_3 \\ &\quad + \mathcal{A}_i^T (\tau_1^2 S_i + \tau_{12}^2 Z_i) \mathcal{A}_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

$$\Xi_2^i = \mathcal{G}_3^T F^T \bar{S}_i F \mathcal{G}_3, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( \alpha - \frac{\ln \mu}{T_a} \right), \quad a = \min_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\min}(P_{11}^i),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = & \max_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\max}(P_i) + \tau_1 \max_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\max}(Q_i) + \tau_{12} \max_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\max}(R_i) + \frac{1}{2} \max_{i \in \mathcal{N}} \tau_1^3 \lambda_{\max}(S_i) \\ & + \frac{1}{2} \tau_{12}^2 (\tau_1 + \tau_2) \max_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\max}(Z_i) + \tau_{12} \max_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\max}(W_i^d) + \tau_{12} \max_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\max}(M_i^d) \\ & + \tau_2 \max_{i \in \mathcal{N}} \lambda_{\max}(Q_i^d). \end{aligned}$$

*Chứng minh.* Xét hàm Lyapunov–Krasovskii sau

$$\begin{aligned} \hat{V}(x_t) = & V(x_t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{\alpha(s-t)} x^T(s) Q_{\sigma(t)}^d x(s) ds + \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_1} e^{\alpha(s-t)} x^T(s) W_{\sigma(t)}^d x(s) ds \\ & + \int_{t-\tau_2}^{t-\tau(t)} e^{\alpha(s-t)} x^T(s) M_{\sigma(t)}^d x(s) ds, \end{aligned}$$

ở đó  $V(x_t)$  được định nghĩa như trong chứng minh của Định lý 3.1. Bằng cách sử dụng các kỹ thuật tương tự như chứng minh Định lý 3.1, ta dễ dàng chứng minh được hệ quả này.  $\square$

Sau đây, chúng tôi đưa ra một vài ví dụ số để minh họa cho các kết quả trên.

Bảng 3.1: So sánh cận trên  $\tau_2$  của độ trễ

Phương pháp	Giá trị lớn nhất có thể có của $\tau_2$
[54]	0.0833
[40]	1.23
[41]	1.3924
Hệ quả 3.1 với $\mu = 1.1$	1.4161

**Ví dụ 3.1.** Xét hệ (3.16) với các tham số sau đây

$$\begin{aligned} A_1 = & \begin{bmatrix} 0.1 & -0.001 \\ -0.001 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.001 \\ 0.001 & -0.7 \end{bmatrix}, \\ A_2 = & \begin{bmatrix} 0.15 & -0.001 \\ -0.001 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.001 \\ 0.001 & -0.6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

và nhiều phi tuyến  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2$ , thỏa mãn điều kiện dưới đây

$$\|f_i(t, x(t), x(t - \tau(t)))\| \leq 0.1 \|x(t)\| + 0.0667 \|x(t - \tau(t))\|, \quad (i = 1, 2).$$

Bằng tính toán trực tiếp, ta có

$$f_i^T(\cdot)f_i(\cdot) \leq x^T(t)(2 * 0.1^2)x(t) + x^T(t - \tau(t))(2 * 0.0667^2)x(t - \tau(t)), i = 1, 2.$$

Bảng 3.1 cho ta sự so sánh về cận trên  $\tau_2$  với  $\tau_1 = 0$  và  $\alpha = 0.05, \delta = 0.5$ . Từ bảng này, ta thấy Hệ quả 3.1 ít bảo thủ hơn so với các kết quả trong [40, 41, 54].

Ngoài ra, khi độ trễ  $\tau(t)$  là hàm không khả vi hoặc khi tham số  $\delta$  không biết, các tiêu chuẩn ổn định trong [26, 39, 40, 41, 54] không thể áp dụng được cho ví dụ này. Tuy nhiên, ta thấy các điều kiện trong Định lý 3.1 được thỏa mãn  $\alpha = 0.2, \mu = 1.01, \tau_1 = 0, \tau_2 = 1, \epsilon_1 = 0.1155, \epsilon_2 = 0.0997$ , và

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0178 & 0.0000 & -0.0844 & -0.0001 & -0.0087 & -0.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0.0184 & -0.0001 & -0.0859 & -0.0000 & -0.0090 & 0 & 0 \\ -0.0844 & -0.0001 & 1.0941 & -0.0002 & 0.0148 & 0.0000 & 0 & 0 \\ -0.0001 & -0.0859 & -0.0002 & 1.0873 & 0.0000 & 0.0158 & 0 & 0 \\ -0.0087 & -0.0000 & 0.0148 & 0.0000 & 0.0078 & 0.0000 & 0 & 0 \\ -0.0000 & -0.0090 & 0.0000 & 0.0158 & 0.0000 & 0.0081 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6786 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6786 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.0178 & 0.0000 & -0.0844 & -0.0001 & -0.0087 & -0.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0.0183 & -0.0001 & -0.0859 & -0.0000 & -0.0090 & 0 & 0 \\ -0.0844 & -0.0001 & 1.0942 & -0.0002 & 0.0149 & 0.0000 & 0 & 0 \\ -0.0001 & -0.0859 & -0.0002 & 1.0873 & 0.0000 & 0.0158 & 0 & 0 \\ -0.0087 & -0.0000 & 0.0149 & 0.0000 & 0.0078 & 0.0000 & 0 & 0 \\ -0.0000 & -0.0090 & 0.0000 & 0.0158 & 0.0000 & 0.0081 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6786 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6786 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 0.0717 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0737 \end{bmatrix}, \quad S_1 = S_2 = \begin{bmatrix} 0.0015 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0015 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = R_2 = \begin{bmatrix} 0.0018 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0022 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = \begin{bmatrix} 0.0051 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0056 \end{bmatrix},$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 0.0049 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0045 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} -0.0036 & 0.0000 & 0.0009 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0039 & -0.0000 & 0.0006 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0008 & -0.0000 & -0.0007 & -0.0000 & -0.0006 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0008 & -0.0000 & -0.0004 & 0.0000 & -0.0007 \\ 0.0002 & -0.0000 & 0.0007 & -0.0000 & 0.0012 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0002 & -0.0000 & 0.0008 & -0.0000 & 0.0015 \end{bmatrix},$$

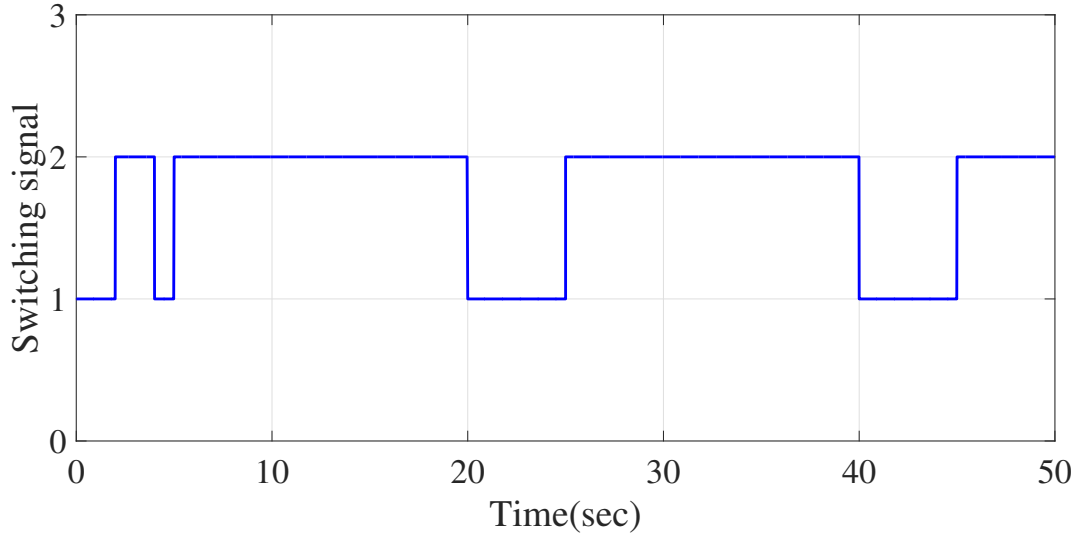


$$X_2 = \begin{bmatrix} -0.0032 & 0.0000 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0029 & 0.0000 & 0.0007 & 0.0000 & 0.0001 \\ -0.0009 & -0.0000 & -0.0004 & -0.0000 & -0.0005 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0010 & -0.0000 & -0.0005 & 0.0000 & -0.0005 \\ 0.0001 & -0.0000 & 0.0007 & -0.0000 & 0.0011 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0005 & -0.0000 & 0.0010 \end{bmatrix}.$$

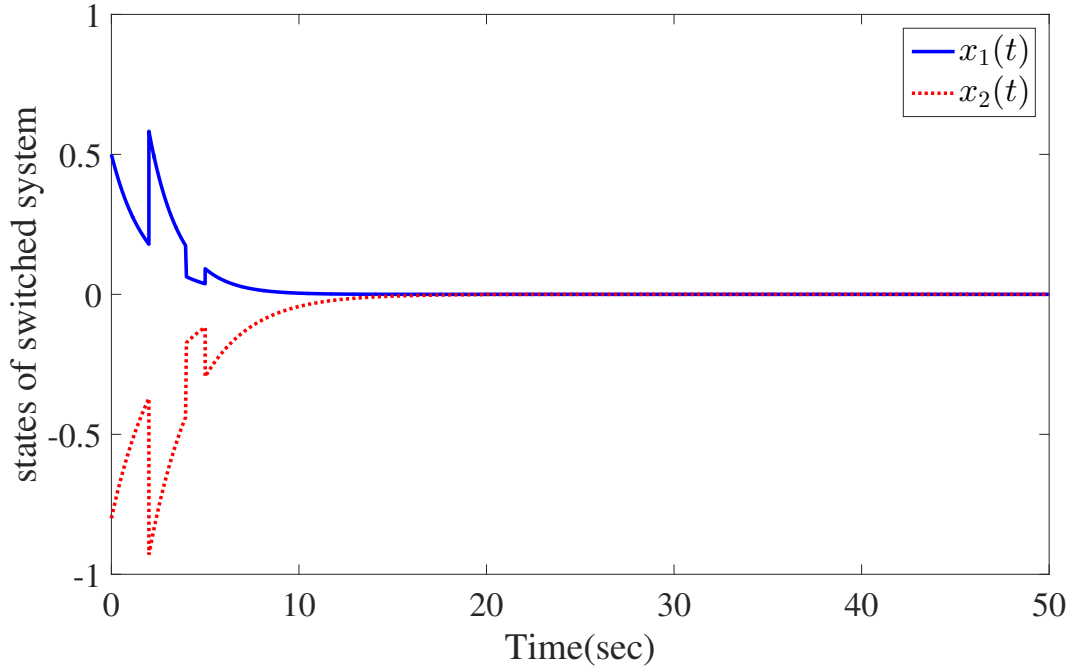
Do đó hệ ổn định mũ với bất kỳ luật chuyển mạch mà thời gian dừng trung bình (average dwell time)  $T_a > T_a^* = 0.0498$ . Ngoài ra, nghiệm  $x(t, \phi)$  của hệ thỏa mãn ước lượng dưới đây:

$$\|x(t, \phi)\| \leq 7.7530e^{-0.0751(t-t_0)} \|x_{t_0}\|.$$

Để minh họa bằng hình ảnh, chúng tôi chọn độ trễ  $\tau(t)$  là hàm  $(1 - |\sin t|)$ . Rõ ràng, độ trễ là hàm liên tục nhưng không khả vi. Nhiễu phi tuyến được chọn là  $f_i(t, x(t), x(t - \tau(t))) = \begin{bmatrix} 0.1 \sin^2 t \\ 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.0667 \cos^2 t \\ 0.0667 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)) (i = 1, 2)$ . Hình 3.1 cho ta quy tắc chuyển mạch giữa hai hệ con của hệ. Hình 3.2 cho ta quỹ đạo của hệ (3.16) dưới tác động của luật chuyển mạch được cho trong Hình 3.1.



Hình 3.1: Quy tắc chuyển mạch giữa hai hệ con



Hình 3.2: Quỹ đạo của hệ (3.16) dưới tác động của luật chuyển mạch được cho trong Hình 3.1.

**Ví dụ 3.2.** Xét hệ chuyển mạch (2.22) với  $f_i(\cdot) = 0$ , ( $i = 1, 2$ ) và

$$N = 2, \quad A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

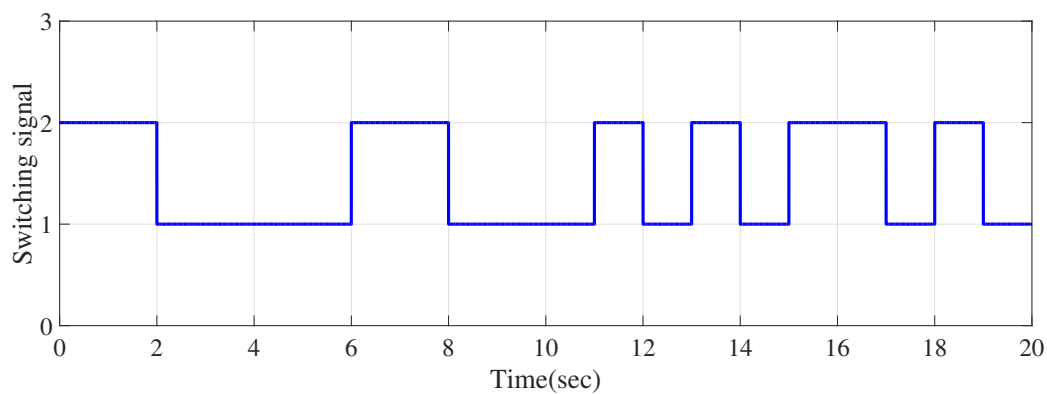
$$f_i(\cdot) = 0, (i = 1, 2).$$

Bảng 3.2 và 3.3 cho ta sự so sánh về giá trị lớn nhất có thể có của  $\tau_2$  giữa Định lý 3.1 và kết quả trong [39, 76] với  $\alpha = 0$  và  $\alpha = 0.3$ , tương ứng. Rõ ràng, từ hai bảng này, có thể nói kết quả của chúng tôi ít bảo thủ hơn các kết quả đã công bố trên các công trình trong [39, 76].

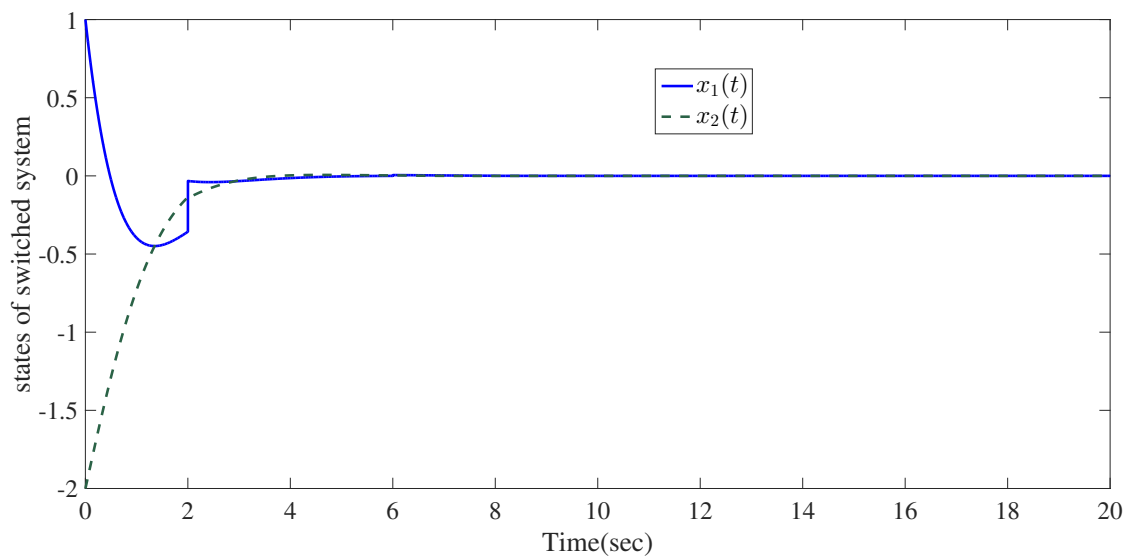
Bảng 3.2: So sánh cận trên  $\tau_2$  với  $\alpha = 0$  và các giá trị khác nhau của  $\tau_1$

$\tau_1$	0	0.4	1
[39]	0.687	0.856	1.335
[76]	1.253	1.368	1.708
Định lý 3.1 với $\mu = 1.1$	2.084	2.237	2.556

Để minh họa bằng hình ảnh, chúng tôi chọn  $\alpha = 0$  và  $\tau(t) = 1 + 1.5|\sin t|$ . Hình 3.3 chỉ luật chuyển mạch giữa hai hệ con trong ví dụ này. Hình 3.4 cho ta quỹ đạo của hệ dưới tác động của luật chuyển mạch được cho trong Hình 3.3.



Hình 3.3: Luật chuyển mạch giữa hai hệ con



Hình 3.4: Quỹ đạo của hệ dưới tác động của luật chuyển mạch được cho trong Hình 3.3

Bảng 3.3: So sánh cận trên  $\tau_2$  với  $\alpha = 0.3$  và các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ 

$\tau_1$	0	0.4	0.5
[39]	0.442	0.490	0.518
[76]	0.832	0.869	0.878
Định lý 3.1 with $\mu = 1.1$	1.006	1.071	1.086

Bảng 3.4: Cận trên  $\tau_2$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$ 

$\tau_1$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Định lý 3.1	0.501	0.511	0.519	0.524	0.532	0.542

**Ví dụ 3.3.** Xét mô hình chất lượng nước suối của sông Nile (xem [16, 46]):

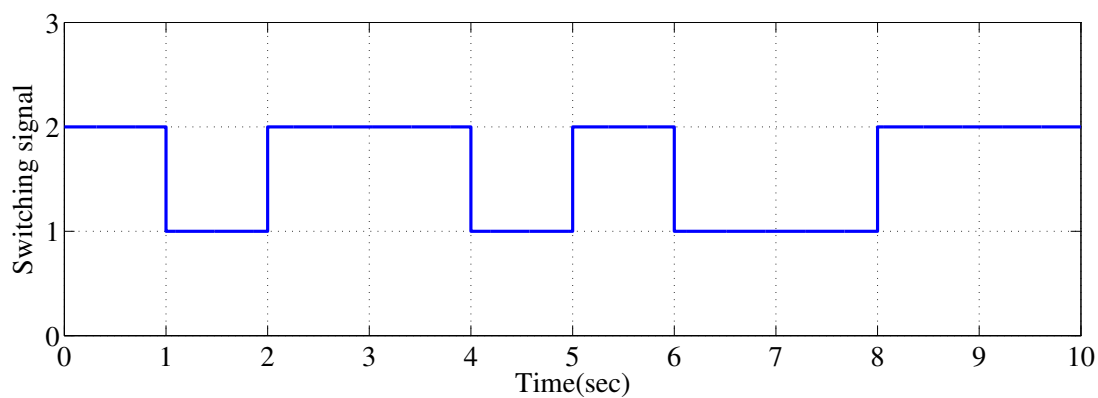
$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} k_{ce}^1 & 0 \\ -k_{de}^1 & -k_{re}^1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} k_{cd}^1 & k_{od}^1 \\ -k_{dd}^1 & -k_{rd}^1 \end{bmatrix}, \quad f_1(\cdot) = 0, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} k_{ce}^2 & 0 \\ -k_{de}^2 & -k_{re}^2 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} k_{cd}^2 & k_{od}^2 \\ -k_{dd}^2 & -k_{rd}^2 \end{bmatrix}, \quad f_2(\cdot) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

ở đó  $k_{ce}^i, k_{de}^i, k_{re}^i, k_{cd}^i, k_{od}^i, k_{dd}^i, k_{rd}^i (i = 1, 2)$  là các hệ số tỉ lệ. Trong ví dụ này, chúng tôi giả thiết độ trễ là hàm không khả vi và thỏa mãn điều kiện (3.3). Ta đi nghiên cứu tính ổn định mũ của hệ (3.31) với các tham số được cho dưới đây

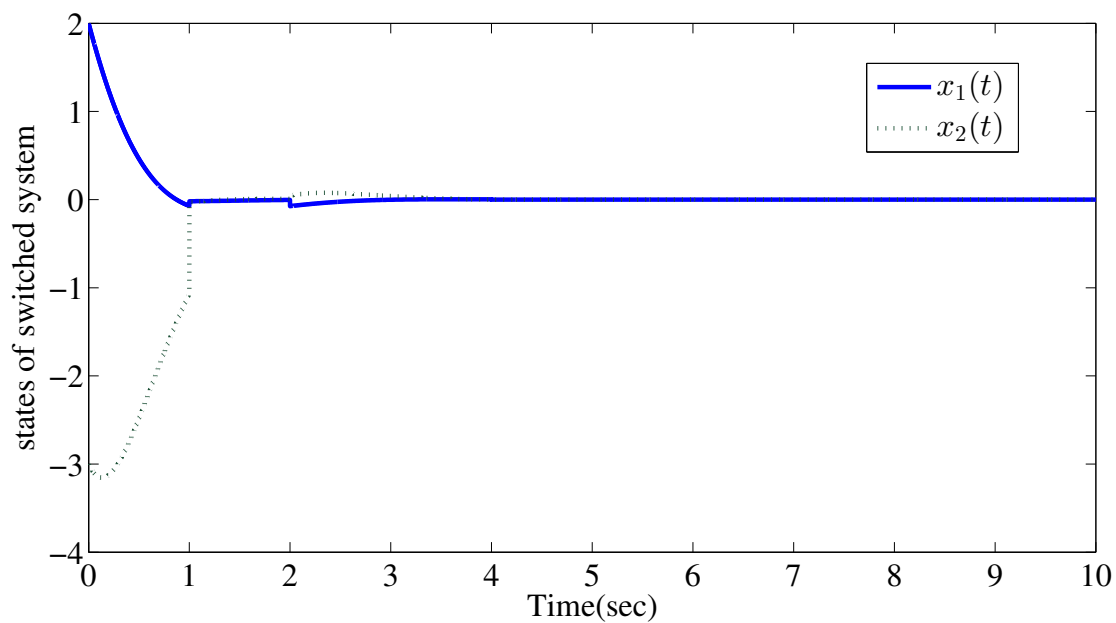
$$\begin{aligned}
 k_{ce}^1 &= 0.1, k_{ce}^2 = 0.2, k_{de}^1 = 3, k_{de}^2 = 4, k_{re}^1 = k_{re}^2 = 2, \\
 k_{cd}^1 &= -1.55, k_{cd}^2 = -1.45, k_{od}^1 = 0.7, k_{od}^2 = 0.5, \\
 k_{dd}^1 &= 0.25, k_{dd}^2 = 0.15, k_{rd}^1 = 0.3, k_{rd}^2 = 0.1.
 \end{aligned}$$

Cận trên  $\tau_2$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$  với  $\alpha = 0.1, \mu = 1.01$  cho tính ổn định mũ của hệ (3.31) thu được bằng cách sử dụng Định lý 3.1 được liệt kê trong Bảng 3.4.

Để minh họa bằng hình ảnh, chúng tôi chọn  $\alpha = 0.1$  và  $\tau(t) = 0.1 + 0.411|\sin t|$ . Hình 3.5 cho ta luật chuyển mạch giữa hai hệ con của hệ (3.31). Hình 3.6 cho ta quỹ đạo của hệ (3.31) dưới tác động của luật chuyển mạch được cho trong Hình 3.5.



Hình 3.5: Luật chuyển mạch giữa hai hệ con của hệ



Hình 3.6: Quỹ đạo của hệ dưới tác động của luật chuyển mạch được cho trong Hình 3.5.

### 3.3. Tính thụ động của lớp hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên

Trước hết, ta xét hệ có trễ dưới đây

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t - \tau(t)) + E\omega(t) + f(t, x(t), x(t - \tau(t)), \omega(t)), \\ x_{t_0}(s) = x(t_0 + s) = \phi(s), \quad s \in [-\tau_2, 0], \\ z(t) = Mx(t) + Ux(t - \tau(t)) + W\omega(t), \end{cases} \quad (3.32)$$

ở đó nhiễu phi tuyến  $f(t, x(t), x(t - \tau(t)), \omega(t))$  thỏa mãn điều kiện dưới đây:

$$f^T(\cdot)f(\cdot) \leq x^T(t)L^T Lx(t) + x^T(t - \tau(t))G^T Gx(t - \tau(t)) + \omega^T(t)H^T H\omega(t), \quad (3.33)$$

trong đó  $L, G, H$  là các ma trận hằng số cho trước.

Để thuận tiện cho việc trình bày kết quả tiếp theo, ta ký hiệu

$$\begin{aligned} e_i &= [0_{n \times (i-1)n} \quad I_n \quad 0_{n \times (11-i)n} \quad 0_{n \times m}], \quad (i = 1, \dots, 11), \quad e_{12} = [0_{m \times 11n} \quad I_m] \\ \mathbf{A} &= Ae_1 + De_3 + e_{11} + Ee_{12}, \\ \xi_0(t) &= [\chi_{01}^T(t) \quad \chi_{02}^T(t) \quad \chi_{03}^T(t) \quad \omega^T(t)]^T. \end{aligned}$$

Bổ đề dưới đây được chứng minh hoàn toàn tương tự như Bổ đề 3.1.

**Bổ đề 3.2.** Cho trước số  $\alpha > 0$ . Giả sử rằng tồn tại các ma trận  $P \in \mathbb{S}_{4n}^+$ ,  $Q, R, S, Z \in \mathbb{S}_n^+$ ,  $X \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ , và hai hằng số  $\gamma \geq 0, \epsilon > 0$  sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính dưới đây thỏa mãn với  $\tau \in \{\tau_1, \tau_2\}$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \bar{Z} & X \\ X^T & \bar{Z} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.34a)$$

$$\Psi(\tau) = \Psi_1(\tau) - \Xi_2 - \Gamma^T \Phi \Gamma < 0. \quad (3.34b)$$

Khi đó đạo hàm dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ (3.32), ta thu được đánh giá sau đây

$$V(x_t) \leq e^{-\alpha(t-t_0)}V(x_{t_0}) - \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}\varphi(s)ds, \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.35)$$

ở đó

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= -2z^T(s)\omega(s) - \gamma\omega^T(s)\omega(s), \\ \Psi_1(\tau) &= \mathcal{G}_1^T(\tau)P\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_2^T P\mathcal{G}_1(\tau) + \alpha\mathcal{G}_1^T(\tau)P\mathcal{G}_1(\tau) + e_1^T(Q + \epsilon L^T L)e_1 \\ &\quad + e_2^T(e^{-\alpha\tau_1}R - e^{-\alpha\tau_1}Q)e_2 - e^{-\alpha\tau_2}e_4^T R e_4 + \epsilon e_3^T G^T G e_3 \\ &\quad - \epsilon e_{11}^T e_{11} + \mathbf{A}^T (\tau_1^2 S + \tau_{12}^2 Z) \mathbf{A} - e_1^T M^T e_{12} - e_{12}^T M e_1 \\ &\quad - e_3^T U^T e_{12} - e_{12}^T U e_3 - e_{12}^T (\gamma I + W + W^T - \epsilon H^T H) e_{12}. \end{aligned}$$

Bây giờ, chúng tôi đưa ra một điều kiện đủ cho tính thụ động của hệ phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên (3.1).

**Định lý 3.2.** Cho trước số  $\alpha > 0$ . Giả sử rằng tồn tại các ma trận  $P_i = \begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i & P_{13}^i & P_{14}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i & P_{23}^i & P_{24}^i \\ P_{31}^i & P_{32}^i & P_{33}^i & P_{34}^i \\ P_{41}^i & P_{42}^i & P_{43}^i & P_{44}^i \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_{4n}^+$ ,  $Q_i, R_i, S_i, Z_i \in \mathbb{S}_n^+$ ,  $X_i \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ , ( $i = 1, \dots, N$ ), và các hằng số  $\epsilon_i > 0$ , ( $i = 1, \dots, N$ ),  $\gamma \geq 0$  sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính dưới đây thỏa mãn với  $\tau \in \{\tau_1, \tau_2\}$

$$\Phi^i = \begin{bmatrix} \bar{Z}_i & X_i \\ X_i^T & \bar{Z}_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.36a)$$

$$\Psi^i(\tau) = \Psi_1^i(\tau) - \Xi_2^i - \Gamma^T \Phi^i \Gamma < 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.36b)$$

Khi đó hệ (2.1) thụ động với bất kỳ luật chuyển mạch mà thời gian dừng trung bình (average dwell time) thỏa mãn (3.18), ở đó  $\mu \geq 1$  thỏa mãn (3.20) và

$$A_i = A_i e_1 + D_i e_3 + e_{11} + E_i e_{12},$$

$$\begin{aligned} \Psi_1^i(\tau) &= \mathcal{G}_1^T(\tau) P_i \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_2^T P_i \mathcal{G}_1(\tau) + \alpha \mathcal{G}_1^T(\tau) P_i \mathcal{G}_1(\tau) + e_1^T (Q_i + \epsilon_i L_i^T L_i) e_1 \\ &\quad + e_2^T (e^{-\alpha \tau_1} R_i - e^{-\alpha \tau_1} Q_i) e_2 - e^{-\alpha \tau_2} e_4^T R_i e_4 + \epsilon_i e_3^T G_i^T G_i e_3 \\ &\quad - \epsilon_i e_{11}^T e_{11} + A_i^T (\tau_1^2 S_i + \tau_{12}^2 Z_i) A_i - e_1^T M_i^T e_{12} - e_{12}^T M_i e_1 \\ &\quad - e_3^T U_i^T e_{12} - e_{12}^T U_i e_3 - e_{12}^T (\gamma I + W_i + W_i^T - \epsilon_i H_i^T H_i) e_{12}. \end{aligned}$$

*Chứng minh.* Khi  $\omega(t) \equiv 0$ , (3.36a) và (3.36b) suy ra (3.17a) và (3.17b). Do đó từ Định lý 3.1, ta có hệ ổn định mũ. Để chứng tỏ tính thụ động của hệ (3.1), ta chọn hàm Lyapunov–Krasovskii (3.21). Từ (3.20), ta có

$$V(x_{t_i}) \leq \mu V(x_{t_i^-}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.37)$$

Với bất kỳ  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , sử dụng (3.36a), (3.36b), và Bổ đề 3.2, ta có

$$V(x_t) \leq e^{-\alpha(t-t_k)} V(x_{t_k}) - \int_{t_k}^t e^{-\alpha(t-s)} \varphi(s) ds. \quad (3.38)$$

Kết hợp (3.37) và (3.38) ta có

$$\begin{aligned}
V(x_t) &\leq \mu V(x_{t_k^-}) e^{-\alpha(t-t_k)} - \int_{t_k}^t e^{-\alpha(t-s)} \varphi(s) ds \\
&\leq \mu^k V(x_{t_0}) e^{-\alpha(t-t_0)} - \mu^k \int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha(t-s)} \varphi(s) ds - \mu^{k-1} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\alpha(t-s)} \varphi(s) ds \\
&\quad - \dots - \int_{t_k}^t e^{-\alpha(t-s)} \varphi(s) ds \\
&= e^{-\alpha(t-t_0) + N_\sigma(t_0, t) \ln \mu} V(x_{t_0}) - \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s) + N_\sigma(s, t) \ln \mu} \varphi(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Sử dụng điều kiện ban đầu bằng không, (3.39) đưa ra

$$0 \leq - \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s) + N_\sigma(s, t) \ln \mu} \varphi(s) ds. \tag{3.40}$$

Từ điều kiện (3.18), ta thu được  $N_\sigma(s, t) \leq \frac{t-s}{T_a} \leq \frac{(t-s)\alpha}{\ln \mu}$ . Do đó từ (3.40), ta có

$$- \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \geq 0.$$

Suy ra

$$2 \int_{t_0}^t z^T(s) \omega(s) ds \geq -\gamma \int_{t_0}^t \omega^T(s) \omega(s) ds.$$

Theo Định nghĩa 3.3, hệ (3.1) thụ động. Định lý được chứng minh hoàn toàn.  $\square$

**Nhận xét 3.2.** Bằng cách sử dụng một vài bất đẳng thức tích phân mới được đề xuất trong [53] kết hợp với kỹ thuật tổ hợp lỗi trong [52] và cách tiếp cận sử dụng thời gian dừng trung bình (the average dwell time), Định lý 3.2 đưa ra một điều kiện đủ cho bài toán nghiên cứu tính thụ động của lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên. Tiêu chuẩn của chúng tôi tương đối tổng quát vì một số yếu tố như độ trễ biến thiên dạng khoảng trên cả véc tơ trạng thái và véc tơ quan sát, độ trễ là hàm không khả vi được xét đến trong kết quả của chúng tôi. Do đó kết quả của chúng tôi cải tiến và mở rộng các kết quả đã có trong [37, 38, 78, 79].

Ví dụ dưới đây được đưa ra để minh họa của kết quả của Định lý 3.2.

**Ví dụ 3.4.** Xét hệ phương trình vi phân phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên (3.1) với  $N = 2$ ,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.5 & -1.8 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = [1 \quad 2],$$



$$\begin{aligned}
 U_1 &= [-1 \ 2], \quad W_1 = [0.2], \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0.9 & -2 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = [1 \ 3], \\
 U_2 &= [2 \ -2], \quad W_2 = [0.5],
 \end{aligned}$$

và nhiều phi tuyến  $f_i(\cdot), i = 1, 2$ , thỏa mãn điều kiện dưới đây

$$f_i^T(\cdot)f_i(\cdot) \leq x^T(t)0.1^2x(t) + x^T(t-\tau(t))0.2^2x(t-\tau(t)) + \omega^T(t)0.3^2\omega(t), \quad i = 1, 2.$$

Giá trị lớn nhất có thể của cận trên  $\tau_2$  với  $\alpha = 0.1, \mu = 2$  cho tính thụ động của hệ thu được bằng cách sử dụng Định lý 3.2 được liệt kê trong Bảng 3.5.

Bảng 3.5: Cận trên  $\tau_2$  với các giá trị khác nhau của  $\tau_1$

$\tau_1$	0	0.5	0.9	1	1.5	2
Định lý 3.2	1.548	1.732	1.880	1.915	2.084	2.214

## Chương 4

### Tính ổn định hóa của lớp hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo có nhiều phi tuyến

#### 4.1. Một số kiến thức về giải tích phân thứ

Trước hết, chúng tôi trình bày lại một số kiến thức cơ bản về giải tích phân thứ.

**Định nghĩa 4.1.** ([21]) Cho  $\alpha > 0$  và  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp  $\alpha$  của hàm  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  được cho bởi

$${}_t I_t^\alpha x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad t \in (a, b],$$

trong đó  $\Gamma(\cdot)$  là hàm Gamma xác định bởi  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \alpha > 0$ .

Trong Định nghĩa 4.1 khi  $\alpha = 0$ , chúng ta quy ước  ${}_t I_t^\alpha := I$  với  $I$  là toán tử đồng nhất. Sự tồn tại của tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp  $\alpha$  với  $0 < \alpha < 1$  được cho bởi định lý sau

**Định lý 4.1.** ([6]) *Giả sử  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm khả tích trên  $[a, b]$ . Khi đó, tích phân  ${}_t I_t^\alpha x(t)$  tồn tại với hầu hết  $t \in [a, b]$ . Hơn nữa,  ${}_t I_t^\alpha x$  cũng là một hàm khả tích.*

Ví dụ sau đây cho ta tích phân phân thứ của một số hàm cơ bản.

**Ví dụ 4.1.** ([6])

(i) Cho  $x(t) = (t-a)^\beta$ , ở đây  $\beta > -1$  và  $t > a$ . Với bất kì  $\alpha > 0$ , chúng ta có

$${}_t I_t^\alpha x(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}, \quad t > a.$$

(ii) Cho  $x(t) = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$ . Với bất kì  $\alpha > 0$ , chúng ta có

$${}_{t_0}I_t^\alpha x(t) = \lambda^{-\alpha} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+j+1)}, \quad t > 0.$$

**Định nghĩa 4.2.** ([23]) Cho trước một số thực dương  $\alpha$  và một khoảng  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp  $\alpha$  của hàm  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  được cho bởi

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha x(t) := \frac{d^n}{dt^n} [{}_{t_0}I_t^{n-\alpha} x(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-\alpha-1} x(s) ds,$$

trong đó  $n := \lceil \alpha \rceil$  là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng  $\alpha$  và  $\frac{d^n}{dt^n}$  là đạo hàm thông thường cấp  $n$ .

**Ví dụ 4.2.** Cho hàm bước đơn vị (unit-step function)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0, & \text{nếu } t < 0. \end{cases}$$

Bằng cách sử dụng Định nghĩa 4.2, ta tính đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp  $\alpha$  của hàm  $f(t)$  là

$${}_{0}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Trước khi trình bày điều kiện cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, chúng tôi nhắc lại một số kết quả sau.

Cho  $[a, b]$  là một khoảng hữu hạn trong  $\mathbb{R}$ .  $AC[a, b]$  là không gian các hàm tuyệt đối liên tục trên  $[a, b]$ . Kolmogorov và Fomin đã chỉ ra mối liên hệ giữa các hàm tuyệt đối liên tục và các hàm khả tích Lebesgue như sau:

$$f(t) \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_a^t \varphi(s) ds \quad (\varphi(s) \in L(a, b)),$$

do đó một hàm tuyệt đối liên tục  $f(t)$  có đạo hàm  $f'(t) = \varphi(t)$  hầu khắp nơi trên  $[a, b]$ .

Với  $n \in \mathbb{N}$ , ta định nghĩa lớp hàm  $AC^n[a, b]$  như sau:

$$AC^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, (D^{n-1}f)(t) \in AC[a, b] \quad \left( D = \frac{d}{dt} \right) \right\}.$$

Mệnh đề sau đây cho ta một số đặc tính của lớp hàm  $AC^n[a, b]$ .

**Mệnh đề 4.1.** ([21]) *Không gian  $AC^n[a, b]$  chứa tất cả các hàm  $f(t)$  có dạng như sau:*

$$f(t) = {}_{t_0}I_t^\alpha \varphi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (t - t_0)^k,$$

trong đó  $\varphi(t) \in L(a, b)$ ,  $c_k (k = 0, 1, \dots, n - 1)$  là các hằng số tùy ý và

$${}_{t_0}I_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} \varphi(s) ds.$$

Ngoài ra, từ các điều kiện trên ta có

$$\varphi(s) = f^{(n)}(s), \quad c_k = \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (k = 0, 1, \dots, n - 1).$$

Định lý sau cho ta một tiêu chuẩn cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville.

**Định lý 4.2.** ([21]) *Cho  $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$ . Nếu  $f(t) \in AC^n[a, b]$ , khi đó đạo hàm phân thứ  ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$  tồn tại hầu khắp nơi trên  $[a, b]$  và có thể được biểu diễn dưới dạng sau*

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-t_0)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s) ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}.$$

Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 4.2.

**Hệ quả 4.1.** ([21]) *Nếu  $0 < \alpha < 1$  và  $f(t) \in AC[a, b]$  thì*

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(t_0)}{(t-t_0)^\alpha} + \int_{t_0}^t \frac{f'(s) ds}{(t-s)^\alpha} \right].$$

Mệnh đề sau khẳng định toán tử đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville là một toán tử tuyến tính.

**Mệnh đề 4.2.** ([23]) *Cho trước một số thực dương  $\alpha$ . Khi đó đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp  $\alpha$  là một toán tử tuyến tính, tức là*

$${}^{RL}D_t^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda {}^{RL}D_t^\alpha f(t) + \mu {}^{RL}D_t^\alpha g(t)$$

trong đó  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(t), g(t) \in AC^n[a, b]$ .

**Chứng minh.** Ta có

$$\begin{aligned}
& {}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-\alpha-1} [\lambda f(s) + \mu g(s)] ds \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds + \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-\alpha-1} g(s) ds \\
&= \lambda {}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t) + \mu {}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha g(t).
\end{aligned}$$

□

**Định nghĩa 4.3.** ([23]) Cho trước một số thực dương  $\alpha$  và một khoảng  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Đạo hàm phân thứ Caputo cấp  $\alpha$  của hàm  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  được cho bởi

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha x(t) := {}_{t_0} I_t^{n-\alpha} D^n x(t),$$

trong đó  $n := [\alpha]$  là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng  $\alpha$  và  $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$  là đạo hàm thông thường cấp  $n$ .

Đối với một hàm véc tơ  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))^T$  đạo hàm phân thứ Caputo của  $x(t)$  được định nghĩa theo từng thành phần như sau:

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha x(t) := ({}_{t_0}^C D_t^\alpha x_1(t), {}_{t_0}^C D_t^\alpha x_2(t), \dots, {}_{t_0}^C D_t^\alpha x_d(t))^T.$$

Định lí sau cho ta một điều kiện đủ cho sự tồn tại đạo hàm Caputo phân thứ cấp  $\alpha$ .

**Định lý 4.3.** ([21]) Cho  $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$ . Nếu  $f(t) \in AC^n[a, b]$ , khi đó đạo hàm phân thứ Caputo  ${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t)$  tồn tại hầu khắp nơi trên  $[a, b]$ . Hơn nữa, ta có (i) Nếu  $\alpha \notin \mathbb{N}$  thì  ${}_{t_0}^C D_t^\alpha x(t)$  biểu diễn dưới dạng sau:

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s) ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}.$$

Đặc biệt, khi  $0 < \alpha < 1$  và  $f(t) \in AC[a, b]$ , ta có:

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f'(s) ds}{(t-s)^\alpha}.$$

(ii) Nếu  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  thì  ${}_{t_0}^C D_t^n f(t)$  biểu diễn dưới dạng sau:

$${}_{t_0}^C D_t^n f(t) = f^{(n)}(t).$$

Đặc biệt,

$${}_{t_0}^C D_t^0 f(t) = f(t).$$

Mệnh đề sau khẳng định toán tử đạo hàm phân thứ Caputo là một toán tử tuyến tính.

**Mệnh đề 4.3.** ([23]) *Cho trước một số thực dương  $\alpha$ . Khi đó đạo hàm phân thứ Caputo cấp  $\alpha$  là một toán tử tuyến tính, tức là*

$${}^C D_t^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda {}^C D_t^\alpha f(t) + \mu {}^C D_t^\alpha g(t),$$

trong đó  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(t), g(t) \in AC^n[a, b]$ .

**Chứng minh.** Tương tự như chứng minh Mệnh đề 4.2. □

Ta dễ dàng chứng minh được tính chất sau của đạo hàm phân thứ Caputo.

**Mệnh đề 4.4.** ([23]) *Cho trước một số thực dương  $\alpha$ . Nếu  $\xi$  là hằng số thì  ${}^C D_t^\alpha \xi = 0$ .*

Giống với phép tính vi-tích phân cổ điển, đạo hàm phân thứ Caputo là nghịch đảo trái của toán tử tích phân phân thứ.

**Định lý 4.4.** ([21]) *Cho  $\alpha > 0$  và  $f(t) \in C[a, b]$ . Khi đó ta có*

$${}^C D_t^\alpha ({}_t I_t^\alpha f(t)) = f(t).$$

Tuy nhiên, đạo hàm phân thứ Caputo nói chung không là toán tử nghịch đảo phải của tích phân phân thứ. Điều này được chỉ rõ trong định lý dưới đây

**Định lý 4.5.** ([21]) *Cho  $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ . Nếu  $f(t) \in AC^n[a, b]$  thì*

$${}_t I_t^\alpha ({}^C D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k.$$

*Đặc biệt, nếu  $0 < \alpha \leq 1$  và  $f(t) \in AC[a, b]$  thì*

$${}_t I_t^\alpha ({}^C D_t^\alpha f(t)) = f(t) - f(t_0).$$

Giữa các đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville và Caputo có quan hệ sau

**Định lý 4.6.** [6] *Cho  $\alpha > 0$  và đặt  $n = [\alpha]$ . Với bất kỳ  $x \in AC^n[a, b]$ , chúng ta có:*

$${}^C D_t^\alpha x(t) = {}^{RL} D_t^\alpha \left( x(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t - t_0)^j}{j!} x^{(j)}(t_0) \right),$$

với hầu hết  $t \in [a, b]$ .

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại định nghĩa về hàm Mittag-Leffler.

**Định nghĩa 4.4.** Cho  $\alpha \in \mathbb{C}$ , một hàm  $E_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  xác định bởi

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

được gọi là hàm Mittag-Leffler một tham số.

**Nhận xét 4.1.** Trong Định nghĩa 4.4, nếu cho  $\alpha = 1$ , ta có

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Do đó hàm Mittag-Leffler chính là mở rộng của khái niệm hàm mũ.

**Định nghĩa 4.5.** Cho  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , một hàm  $E_{\alpha, \beta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  xác định bởi

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

được gọi là hàm Mittag-Leffler hai tham số. Các hàm Mittag-Leffler nhận giá trị ma trận được định nghĩa hoàn toàn tương tự, tức là

$$E_{\alpha, \beta}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Các tính chất của hàm Mittag-Leffler một tham số, hai tham số đã được trình bày chi tiết trong cuốn sách chuyên khảo của Podlubny I. (xem [55]).

## 4.2. Một số tiêu chuẩn ổn định hóa của lớp hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo có nhiễu phi tuyến

Xét hệ điều khiển phân thứ Caputo có nhiễu phi tuyến

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = [A + \Delta A(t)] x(t) + f(x(t)) \\ \quad + [B + \Delta B(t)] u(t), \quad t \geq t_0 \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.1)$$

ở đó  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  là véc tơ trạng thái,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  là véc tơ điều khiển,  $\Delta A(t) = G_a F_a(t) H_a$ ,  $\Delta B(t) = G_b F_b(t) H_b$ , trong đó  $A, B, G_a, G_b, H_a, H_b$  là các

ma trận thực, hằng số cho trước có số chiều thích hợp;  $F_a(t)$  và  $F_b(t)$  là các ma trận không biết thỏa mãn điều kiện  $F_a^T(t)F_a(t) \leq I$ ,  $F_b^T(t)F_b(t) \leq I$ ,  $\forall t \geq t_0 \geq 0$ ; nhiễu phi tuyến  $f(x(t)) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(0) = 0$ , là hàm liên tục Lipschitz, tức là tồn tại một hằng số  $\kappa > 0$  sao cho với bất kỳ  $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$ , ta có

$$\|f(x(t)) - f(y(t))\| \leq \kappa \|x(t) - y(t)\|, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (4.2)$$

Đặc biệt, khi  $y(t) = 0$ , ta có

$$\|f(x(t))\| \leq \kappa \|x(t)\|, \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (4.3)$$

Khi véc tơ điều khiển  $u(t) \equiv 0$ , hệ (4.1) trở thành

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = [A + \Delta A(t)] x(t) + f(x(t)), \\ t \geq t_0 \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.4)$$

**Nhận xét 4.2.** Không mất tính tổng quát, trong cả mục này, chúng tôi chỉ nghiên cứu tính ổn định của điểm cân bằng 0 của hệ (4.1) bởi vì mọi điểm cân bằng bất kỳ của hệ đều đưa về điểm cân bằng gốc 0 bằng cách đổi biến và từ tính chất ổn định của điểm gốc 0 đều suy ra tính ổn định của điểm cân bằng bất kỳ của hệ. Ngoài ra, thay vì nói điểm cân bằng 0 của hệ ổn định ta chỉ nói hệ ổn định.

**Định nghĩa 4.6.** ([33]) Hệ (4.4) được gọi là ổn định Mittag-Leffler nếu

$$\|x(t)\| \leq [m(x_0)E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha)]^\beta,$$

ở đó  $\lambda > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $m(x) \geq 0$  ( $m(0) = 0$ ) thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương theo biến  $x \in \mathbb{R}^n$  với hằng số Lipschitz  $m_0$ .

**Nhận xét 4.3.** ([77]) Nhận xét rằng nếu hệ (4.4) là ổn định Mittag-Leffler thì hệ ổn định tiệm cận, tức là  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$ .

Bây giờ, chúng tôi nhắc lại một số bổ đề kỹ thuật được dùng để chứng minh kết quả chính của mục này.

**Bổ đề 4.1.** ([9]) Cho  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  là một hàm véc tơ liên tục và có đạo hàm. Khi đó với bất kỳ  $t \geq t_0$ , ta có bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^C D_t^\alpha (x^T(t) P x(t)) &\leq x^T(t) P {}^C D_t^\alpha x(t), \\ \forall \alpha &\in (0, 1), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \end{aligned}$$

ở đó  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  là một ma trận đối xứng, xác định dương.



**Bổ đề 4.2.** ([33]) Cho  $x = 0$  là điểm cân bằng của hệ phương trình vi phân phân thứ  ${}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x)$ . Điểm cân bằng  $x = 0$  là ổn định Mittag-Leffler nếu tồn tại các hằng số dương  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, a, b$ , và một hàm khả vi liên tục  $V(t, x(t))$  thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\beta_1 \|x\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \beta_2 \|x\|^{ab} \quad (4.5)$$

$${}^C D_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -\beta_3 \|x\|^{ab}, \quad (4.6)$$

ở đó  $\alpha \in (0, 1)$ , và  $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương theo  $x$ ;  $D \subset \mathbb{R}^n$  là một tập mở chứa gốc 0. Nếu tất cả các giả thiết trên đúng trên  $\mathbb{R}^n$ , thì điểm cân bằng  $x = 0$  là ổn định Mittag-Leffler toàn cục.

Mục đích chính của ta trong mục này là ta thiết kế một điều khiển ngược  $u(t) = Kx(t)$  sao cho hệ đóng sau đây

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = \left[ A + G_a F_a(t) H_a + BK + G_b F_b(t) H_b K \right] x(t) \\ \quad + f(x(t)), \forall t \geq t_0 \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.7)$$

$\forall \alpha \in (0, 1)$  ổn định Mittag-Leffler và do đó là ổn định tiệm cận theo như Nhận xét 4.3.

Định lý dưới đây cho ta một điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được của hệ điều khiển phân thứ (4.1).

**Định lý 4.7.** Hệ đóng (4.7) ổn định Mittag-Leffler toàn cục nếu tồn tại một ma trận đối xứng, xác định dương  $P$ , một ma trận  $Y$  có số chiều thích hợp sao cho các phép toán đại số về ma trận thực hiện được và ba số dương  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau đây được thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & PH_a^T & Y^T H_b^T & \kappa P \\ * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & -\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.8)$$

ở đó

$$\begin{aligned} M_{11} &= AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \epsilon_1 G_a G_a^T \\ &\quad + \epsilon_2 G_b G_b^T + \epsilon_3 I. \end{aligned}$$

Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (4.1) xác định bởi:

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

*Chứng minh.* Vì  $P$  là một ma trận đối xứng, xác định dương nên  $P^{-1}$  cũng là một ma trận đối xứng, xác định dương. Ta xét hàm Lyapunov sau đây:

$$V(t) = x^T(t)P^{-1}x(t).$$

Để dàng kiểm tra được

$$\lambda_{\min}(P^{-1})\|x(t)\|^2 \leq V(t) \leq \lambda_{\max}(P^{-1})\|x(t)\|^2. \quad (4.9)$$

Do đó điều kiện (4.5) trong Bổ đề 4.2 được thỏa mãn. Áp dụng Bổ đề 4.1, ta lấy đạo hàm phân thứ Caputo cấp  $\alpha$  của hàm  $V(t)$  dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ đóng (4.7) như sau

$$\begin{aligned} & {}^C D_t^\alpha V(t) \\ & \leq 2x^T(t)P^{-1} {}^C D_t^\alpha x(t) \\ & = 2x^T(t)P^{-1} \left( A + BK + G_a F_a(t) H_a + G_b H_b(t) H_b K \right) x(t) \\ & \quad + 2x^T(t)P^{-1} f(t, x(t)) \\ & = x^T(t) \left[ P^{-1}A + A^T P^{-1} + P^{-1}BK + K^T B^T P^{-1} \right] x(t) \\ & \quad + 2x^T(t)P^{-1}G_a F_a(t) H_a x(t) + 2x^T(t)P^{-1}G_b F_b(t) H_b K x(t) \\ & \quad + 2x^T(t)P^{-1} f(x(t)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy ma trận và điều kiện (4.3), ta thu được các đánh giá sau

$$\begin{aligned} & 2x^T(t)P^{-1}G_a F_a(t) H_a x(t) \\ & \leq \epsilon_1 x^T(t)P^{-1}G_a G_a^T P^{-1}x(t) + \epsilon_1^{-1} x^T(t)H_a^T H_a x(t), \\ & 2x^T(t)P^{-1}G_b F_b(t) H_b K x(t) \\ & \leq \epsilon_2 x^T(t)P^{-1}G_b G_b^T P^{-1}x(t) + \epsilon_2^{-1} x^T(t)K^T H_b^T H_b K x(t), \end{aligned} \quad (4.11)$$

và

$$\begin{aligned} & 2x^T(t)P^{-1} f(t, x(t)) \\ & \leq \epsilon_3 x^T(t)P^{-1}P^{-1}x(t) + \epsilon_3^{-1} f^T(x(t))f(x(t)) \\ & \leq \epsilon_3 x^T(t)P^{-1}P^{-1}x(t) + \epsilon_3^{-1} \kappa^2 x^T(t)x(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Từ các điều kiện (4.10), (4.11) và (4.12), ta thu được đánh giá sau

$${}^C D_t^\alpha V(t) \leq x^T(t)\Omega x(t), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (4.13)$$

ở đó

$$\begin{aligned}\Omega &= P^{-1}A + A^T P^{-1} + P^{-1}BK + K^T B^T P^{-1} \\ &+ \epsilon_1 P^{-1}G_a G_a^T P^{-1} + \epsilon_2 P^{-1}G_b G_b^T P^{-1} + \epsilon_3 P^{-1}P^{-1} \\ &+ \epsilon_1^{-1} H_a^T H_a + \epsilon_2^{-1} K^T H_b^T H_b K + \epsilon_3^{-1} \kappa^2 I.\end{aligned}$$

Nhân hai vế của ma trận  $\Omega$  bởi ma trận  $P$  và đặt  $K = YP^{-1}$ , ta có

$$\begin{aligned}\Phi &= P\Omega P = AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \epsilon_1 G_a G_a^T \\ &+ \epsilon_2 G_b G_b^T + \epsilon_3 I + \epsilon_1^{-1} P H_a^T H_a P \\ &+ \epsilon_2^{-1} Y^T H_b^T H_b Y + \epsilon_3^{-1} \kappa^2 PP.\end{aligned}$$

Chú ý rằng  $\Omega < 0$  tương đương với  $\Phi < 0$ . Bằng cách áp dụng Bổ đề Schur (Bổ đề 2.2), ta có  $\Phi < 0$  tương đương với (4.8). Từ đó, ta có

$${}^C D_t^\alpha V(t) \leq \lambda_{\max}(\Omega) \|x(t)\|^2. \quad (4.14)$$

Từ (4.8), ta có  $\Omega < 0$ . Suy ra  $\lambda_{\max}(\Omega) < 0$ . Vậy điều kiện (4.6) trong Bổ đề 4.2 cũng được thỏa mãn. Do đó hệ (4.7) là ổn định Mittag-Leffler. Định lý được chứng minh hoàn toàn.  $\square$

Khi  $\Delta A(t) = 0$ ,  $\Delta B(t) = 0$ , hệ (4.1) trở thành

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + f(x(t)) + Bu(t), \forall t \geq t_0 \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.15)$$

Hệ đóng tương ứng với hệ (4.15) khi ta dùng điều khiển ngược  $u(t) = Kx(t)$  được mô tả bởi

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = (A + BK)x(t) + f(x(t)), \forall t \geq t_0 \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.16)$$

Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 4.7.

**Hệ quả 4.2.** *Hệ đóng (4.16) ổn định Mittag-Leffler toàn cục nếu tồn tại một ma trận đối xứng, xác định dương  $P$ , một ma trận  $Y$  có số chiều thích hợp và một hằng số  $\epsilon$  sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn*

$$\begin{bmatrix} N_{11} & \kappa P \\ * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.17)$$

ở đó

$$N_{11} = AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \epsilon I.$$

Ngoài ra, điều khiển ngược ổn định hóa hệ (4.15) được xác định như sau:

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

**Nhận xét 4.4.** Một số kết quả gần đây (xem [4, 5, 29, 69, 75]) đã nghiên cứu tính ổn định hóa được cho hệ phân thứ (4.15). Tuy nhiên, các kết quả trên chỉ nghiên cứu tính ổn định hóa được địa phương của điểm cân bằng gốc 0 của hệ bởi vì thành phần phi tuyến trong các kết quả trên thỏa mãn điều kiện  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(x(t))\|}{\|x(t)\|} = 0$ . Ngược lại, Hệ quả 4.2 đưa ra một điều kiện đủ cho tính ổn định hóa được của hệ (4.15) bằng cách sử dụng phương pháp trực tiếp Lyapunov cho hệ phân thứ và cách tiếp cận sử dụng bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Do đó, có thể nói kết quả của chúng tôi ít bảo thủ hơn so với các kết quả trong [4, 5, 29, 69, 75].

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định hóa của lớp hệ tuyến tính không chắc chắn phân thứ (tức là hệ (4.1) với  $f(x(t)) \equiv 0$ ):

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t), \forall t \geq t_0 \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.18)$$

Với điều khiển ngược  $u(t) = Kx(t)$ , hệ (4.18) trở thành

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = [A + BK + \Delta A(t) + \Delta B(t)K]x(t), \forall t \geq t_0 \geq 0, \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.19)$$

**Hệ quả 4.3.** Hệ đóng (4.19) ổn định Mittag-Leffler toàn cục nếu tồn tại một ma trận đối xứng, xác định dương  $P$ , một ma trận  $Y$  có số chiều thích hợp và hai hằng số dương  $\epsilon_1, \epsilon_2$  sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau đây được thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} W_{11} & PH_a^T & Y^T H_b^T \\ * & -\epsilon_1 I & 0 \\ * & * & -\epsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.20)$$

ở đó

$$W_{11} = AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \epsilon_1 G_a G_a^T + \epsilon_2 G_b G_b^T.$$

Hơn nữa, luật điều khiển ngược ổn định hóa xác định bởi:

$$u(t) = YP^{-1}x(t), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

### 4.3. Ví dụ số

Trong mục này, chúng tôi đưa ra hai ví dụ số minh họa cho các kết quả lý thuyết ở Mục 4.2.

**Ví dụ 4.3.** Xét hệ điều khiển phân thứ Caputo có nhiễu phi tuyến sau đây

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha x(t) = [A + G_a F_a(t) H_a] x(t) + f(x(t)) \\ \quad + [B + G_b F_b(t) H_b] u(t), \quad \forall t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (4.21)$$

ở đó  $0 < \alpha < 1$ ,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ , và

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad G_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$H_a = [0.1 \ 0 \ 0.4], \quad F_a(t) = \sin t,$$

$$G_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \quad H_b = [1], \quad F_b(t) = \sin t,$$

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} 0.5 \sin x_1^2(t) \\ 0 \\ 0.5 \sin x_3^2(t) \end{bmatrix}.$$

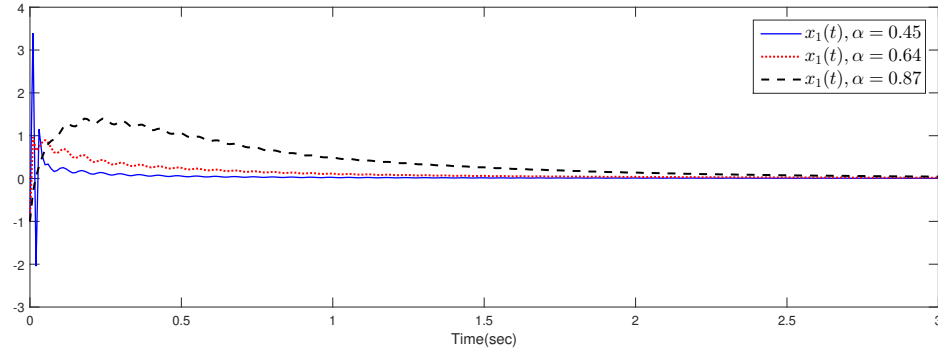
Chú ý rằng khi  $u(t) \equiv 0$ , hệ (4.21) không ổn định tiệm cận. Vì hệ (4.21) chứa đại lượng không chắc chắn trong thành phần của véc tơ điều khiển  $u(t)$ , nên các phương pháp trong các bài báo trong [4, 75] không thể áp dụng cho ví dụ này. Nhiễu phi tuyến  $f(x(t))$  thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục với hằng số Lipschitz  $\kappa = 0.5$ . Ta thấy các điều kiện trong Định lý 4.7 được thỏa mãn với  $\epsilon_1 = 4.4269$ ,  $\epsilon_2 = 7.4768$ ,  $\epsilon_3 = 1.1320$  và

$$P = \begin{bmatrix} 2.6717 & -0.4321 & 0.2327 \\ -0.4321 & 0.6110 & 1.3071 \\ 0.2327 & 1.3071 & 5.2815 \end{bmatrix},$$

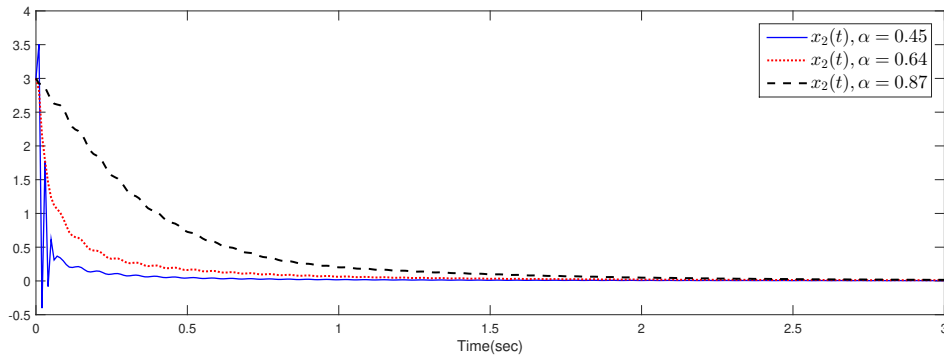
$$Y = [0.3345 \ -1.8427 \ -2.4411].$$

Vậy hệ (4.21) ổn định hóa được bởi điều khiển ngược  $u(t)$  xác định bởi

$$u(t) = [-0.9123 \ -5.8611 \ 1.0285] x(t).$$



Hình 4.1: Quỹ đạo của  $x_1(t)$  với các giá trị khác nhau của  $\alpha$



Hình 4.2: Quỹ đạo của  $x_2(t)$  với các giá trị khác nhau của  $\alpha$

Hình 4.1-4.3 cho ta quỹ đạo của véc tơ trạng thái của hệ đóng tương ứng của hệ (4.21) ứng với một số giá trị khác nhau của  $\alpha$ . Rõ ràng, từ hình vẽ ta thấy các trạng thái của hệ đóng tương ứng ổn định tiệm cận.

**Ví dụ 4.4.** Xét hệ phân thứ không ô tô nôm

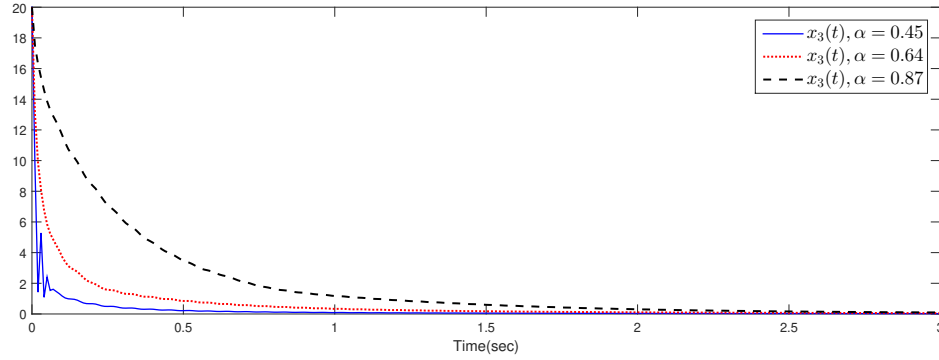
$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (4.22)$$

ở đó  $0 < \alpha < 1$ ,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ , và

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 + 2.5 \sin t & -3 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 1 + \sin t \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Hệ (4.22) có thể viết lại như sau:

$$\begin{cases} {}^C_{t_0} D_t^\alpha x(t) = [A + G_a F_a(t) H_a] x(t) + [B + G_b F_b(t) H_b] u(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (4.23)$$



Hình 4.3: Quỹ đạo của  $x_3(t)$  với các giá trị khác nhau của  $\alpha$

ở đó

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, & G_a &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \\
 H_a &= [1 \ 0], & F_a(t) &= \sin t, \\
 B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, & G_b &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & H_b &= [1], & F_b(t) &= \sin t.
 \end{aligned}$$

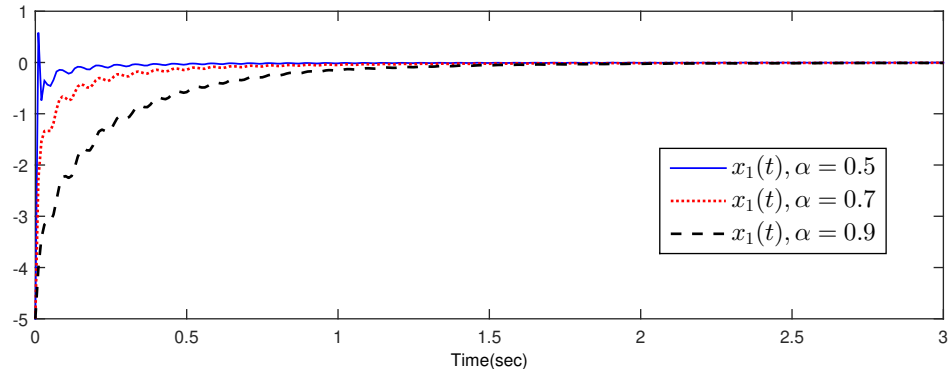
Chú ý rằng khi  $u(t) \equiv 0$ , hệ (4.23) không ổn định tiệm cận. Ta thấy các điều kiện trong Hệ quả 4.3 được thỏa mãn với  $\epsilon_1 = 172.6404$ ,  $\epsilon_2 = 374.5774$ , và

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} 105.4454 & -79.6329 \\ -79.6329 & 394.0063 \end{bmatrix}, \\
 Y &= [-412.1293 \ 287.9873].
 \end{aligned}$$

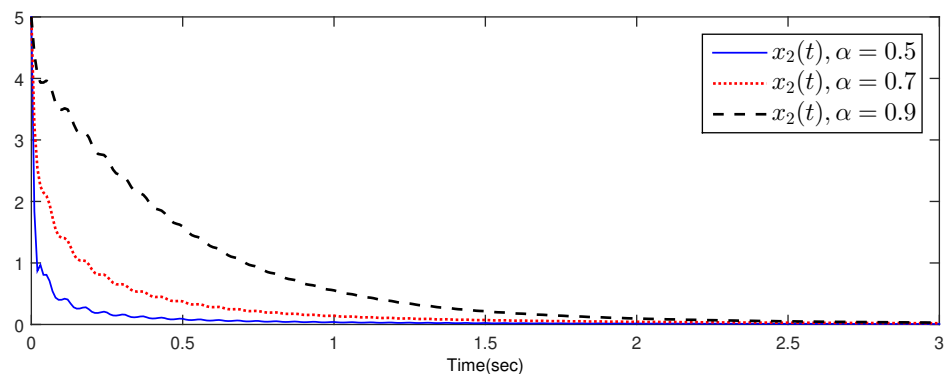
Vậy hệ (4.22) ổn định hóa được bởi điều khiển ngược  $u(t)$  xác định bởi

$$u(t) = [-3.9611 \ -0.0697] x(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Hình 4.4 và 4.5 cho ta quỹ đạo của véc tơ trạng thái của hệ đóng tương ứng của hệ (4.22) ứng với một số giá trị khác nhau của  $\alpha$ . Rõ ràng, từ hình vẽ ta thấy các trạng thái của hệ đóng tương ứng ổn định tiệm cận.



Hình 4.4: Quỹ đạo của  $x_1(t)$  với các giá trị khác nhau của  $\alpha$



Hình 4.5: Quỹ đạo của  $x_2(t)$  với các giá trị khác nhau của  $\alpha$



## Kết luận

**Trong đề tài, chúng tôi đã đạt được một số kết quả cơ bản sau:**

- Trình bày bài toán nghiên cứu bao của tập đạt được cho một số lớp hệ phương trình vi phân có trễ như lớp hệ tuyến tính chuyển mạch có trễ biến thiên, mạng nơ ron tổng quát có trễ biến thiên, mạng nơ ron chuyển mạch có trễ hỗn hợp biến thiên. Chương này được viết dựa trên ba bài báo [64, 65, 66];
- Trình bày bài toán đảm bảo chi phí điều khiển trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình vi phân tuyến tính dương đa trễ;
- Trình bày tính ổn định mũ và tính thụ động cho lớp hệ phương trình vi phân phi tuyến chuyển mạch có trễ biến thiên;
- Giới thiệu về giải tích phân thứ và đưa ra một số tiêu chuẩn cho bài toán ổn định hóa lớp hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Amato F., Ambrosino R., Ariola M., Cosentino C., Tommasi G.D. (2013), *Finite-time Stability and Control*, Springer.
- [2] Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V. (1994), *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia.
- [3] Cao X., Liu L., Fu Z., Song X., Song S. (2017), “Guaranteed cost finite-time control for positive switched linear systems with time-varying delays”, *Journal of Control Science and Engineering*, Article ID 7051658, 10 pages.
- [4] Chen L., Chai Y., Wu R., Yan J. (2012), “Stability and stabilization of a class of nonlinear fractional-order systems with Caputo derivative”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 59(9), pp. 602–606.
- [5] Chen L., He Y., Chai Y., Wu R. (2014), “New results on stability and stabilization of a class of nonlinear fractional-order systems”, *Nonlinear Dynamics*, 75(4), pp. 633–641.
- [6] Diethelm K. (2010), *The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Lecture Notes in Mathematics, Springer - Verlag, Berlin.
- [7] Dong Y., Liu J., Mei S., Li M. (2011), “Stabilization for switched nonlinear time-delay systems”, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 5, pp. 78–88.
- [8] Dorato P. (1961), *Short-time Stability in Linear Time-varying Systems*, Tech. Rep., Polytechnic Institute of Brooklyn.
- [9] Duarte-Mermoud M.A., Aguila-Camacho N., Gallegos J.A., Castro-Linares R. (2015), “Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1–3), pp. 650–659.
- [10] Feng Z., Lam J. (2015), “On reachable sets for singular systems”, *Automatica*, 52, pp. 146–153.

- [11] Fridman E. (2014), *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*, Birkhauser.
- [12] Fridman E., Shaked U. (2002), “On delay-dependent passivity”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, pp. 664–669.
- [13] Fridman E., Shaked U. (2003), “On reachable sets for linear systems with delay and bounded peak inputs”, *Automatica*, 39, pp. 2005–2010.
- [14] Gahinet P., Nemirovskii A., Laub A.J., Chilali M. (1995), *LMI control toolbox for use with MATLAB*, The MathWorks Inc.
- [15] Geromel J.C., Colaneri P., Bolzern P. (2012), “Passivity of switched linear systems: Analysis and control design”, *Systems & Control Letters*, 61, pp. 549–554.
- [16] Ghadiri H., Jahed-Motlagh M.R. (2016), “LMI-based criterion for the robust guaranteed cost control of uncertain switched neutral systems with time-varying mixed delays and nonlinear perturbations by dynamic output feedback”, *Complexity*, 21, pp. 555–578.
- [17] Gu K., Kharitonov V.L., Chen J. (2003), *Stability of time-delay systems*, Birkhauser, Boston.
- [18] Ji M.D., He Y., Wu M., Zhang C.K. (2015), “Further results on exponential stability of neural networks with time-varying delay”, *Applied Mathematics and Computation*, 256, pp. 175–182.
- [19] Hale J.K., Verduyn Lunel S.M. (1993), *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer.
- [20] Huang H., Qu Y., Li H.X. (2005), “Robust stability analysis of switched Hopfield neural networks with time-varying delay under uncertainty”, *Physics Letters A*, 345, pp. 345–354
- [21] Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. (2006), *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, Elsevier, New York.
- [22] Kaczorek T. (2009), “Stability of positive continuous-time linear systems with delays”, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 57(4), pp.395–398.

- [23] Kaczorek T. (2011), *Selected Problems of Fractional Systems Theory*, Springer.
- [24] Kharitonov V.L. (2013), *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*, Birkhauser.
- [25] Kim S., Campbell S.A., Liu X. (2006), "Stability of a class of linear switching systems with time delay", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 53(2), pp. 384–393.
- [26] Krishnasamy R., Balasubramaniam P. (2015), "A descriptor system approach to the delay-dependent exponential stability analysis for switched neutral systems with nonlinear perturbations", *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 15, pp. 23–36.
- [27] Kwon O.M., Lee S.M., Park J.H (2012), "On passivity criteria of uncertain neural networks with timevarying delays", *Nonlinear Dynamics*, 67, pp. 1261–1271.
- [28] Lam J., Zhang B., Chen Y., Xu S. (2015), "Reachable set estimation for discrete-time linear systems with time delays", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25, pp. 269–281.
- [29] Lenka B.K., Banerjee S. (2016), "Asymptotic stability and stabilization of a class of nonautonomous fractional order systems", *Nonlinear Dynamics*, 85(1), pp. 167–177.
- [30] Li C., Liao X. (2005), "Passivity analysis of neural network with time delay", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 52, pp. 471–475.
- [31] Li C., Zhang H. (2006), "Passivity and Passification of fuzzy systems with time delays", *Computers & Mathematics with Applications*, 52, pp. 1067–1078.
- [32] Li H., Gao G., Shi P. (2010), "New passivity analysis for neural networks with discrete and distributed delays", *IEEE Transactions on Neural Networks*, 21, pp. 153–163.
- [33] Li Y., Chen Y.Q., Podlubny I. (2010), "Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffer stability", *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5), pp. 1810–1821.

- [34] Li O., Zhang Q., Yi N., Yuan Y. (2009), “Robust passivity control for uncertain time-delay singular systems”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 56, pp. 653–663.
- [35] Li Z., Xu Y., Fei Z., Agarwal R. (2015), “Exponential stability analysis and stabilization of switched delay systems”, *Journal of the Franklin Institute*, 352(11), pp. 4980–5002.
- [36] Lian J., Zhang K., Feng Z. (2012), “Stability analysis for switched Hopfield neural networks with time delay”, *Optimal Control Applications and Methods*, 33(4), pp. 433–444.
- [37] Lian J., Shi P., Feng Z. (2013), “Passivity and passification for a class of uncertain switched stochastic time-delay systems”, *IEEE Transactions on Cybernetics*, 43(1), pp. 3–13.
- [38] Lian J., Wang J. (2015), “Passivity of switched recurrent neural networks with time-varying delays”, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 26(2), pp. 357–366.
- [39] Lien C.H., Yu K.W., Chung Y.J., Lin Y.F., Chung L.Y., Chen J.D. (2009), “Exponential stability analysis for uncertain switched neutral systems with interval time-varying state delay”. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 3, pp. 334–342.
- [40] Lien C.H., Yu K.W., Chang H.C., Chung L.Y., Chen J.D. (2011), “Switching signal design for global exponential stability of uncertain switched nonlinear systems with time-varying delay”, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 5(1), pp. 10–19.
- [41] Lien C.H., Yu K.W., Chen J.D., Chung L.Y. (2016), “Global exponential stability of switched systems with interval time-varying delays and multiple non-linearities via simple switching signal design”, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 33(4), pp. 1135–1155.
- [42] Liu Y., Wang Z., Liu X. (2006), “Global exponential stability of generalized recurrent neural networks with discrete and distributed delays”, *Neural Networks*, 19, pp. 667–675.
- [43] Liu Y., Ma Y., Mahmoud M. (2012), “New results for global exponential stability of neural networks with varying delays”, *Neurocomputing*, 97, pp. 357–363.

- [44] Liu C., Liu W., Liu X., Li C., Han Q. (2015), “Stability of switched neural networks with time delay”, *Nonlinear Dynamics*, 79(3), pp. 2145–2154.
- [45] Lou X., Cui B. (2008), “Delay-dependent criteria for global robust periodicity of uncertain switched recurrent neural networks with time-varying delay”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 19(4), pp. 549–557.
- [46] Mahmoud M.S. (2004), *Resilient Control of Uncertain Dynamical Systems*, Springer, Berlin.
- [47] Nam P.T., Pathirana P.N. (2011), “Further result on reachable set bounding for linear uncertain polytopic systems with interval time-varying delays”, *Automatica*, 47, pp. 1838–1841.
- [48] Nam P.T., Pathirana P.N., Trinh H. (2015), “Reachable set bounding for nonlinear perturbed time-delay systems: the smallest bound”, *Applied Mathematics Letters*, 43, pp. 68–71.
- [49] Niamsup P., Ratchagit K., Phat V.N. (2015), “Novel criteria for finite-time stabilization and guaranteed cost control of delayed neural networks”, *Neurocomputing*, 160, pp. 281–286.
- [50] Niamsup P., Phat V. N. (2016), “Robust finite-time control for linear time-varying delay systems with bounded control”, *Asian Journal of Control*, 18(5), pp. 1–8.
- [51] Niculescu S.I., Lozano R. (2001), “On the passivity of linear delay systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46, pp. 460–464.
- [52] Park P.G., Ko J.W., Jeong C. (2011), “Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays”, *Automatica*, 47(1), pp. 235–238.
- [53] Park P.G., Lee W.I., Lee S.Y. (2015), “Auxiliary function-based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems”, *Journal of the Franklin Institute*, 352(4), pp. 1378–1396.
- [54] Phat V.N., Botmart T., Niamsup P. (2009), “Switching design for exponential stability of a class on nonlinear hybrid time-delay systems”, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 3, pp. 1–10.
- [55] Podlubny I. (1999), *Fractional Differential Equations*, Academic Press.

- [56] Stojanovic S.B. (2016), “Further improvement in delay-dependent finite-time stability criteria for uncertain continuous-time systems with time-varying delays”, *IET Control Theory and Applications*, 10(8), pp. 926–938.
- [57] Qi J., Li C., Huang T., Zhang W. (2016), “Exponential stability of switched time-varying delayed neural networks with all modes being unstable”, *Neural Processing Letters*, 43(2), pp. 553–565.
- [58] Shen C., Zhong S. (2011), “The ellipsoidal bound of reachable sets for linear neutral systems with disturbances”, *Journal of The Franklin Institute*, 348, pp. 2570–2585.
- [59] Sun J., Liu G.P., Chen J., Rees D. (2010), “Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays”, *Automatica*, 46, pp. 466–470.
- [60] That N.D., Nam P.T., Ha Q.P. (2013), “Reachable set bounding for linear discrete-time systems with delays and bounded disturbances”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 157, pp. 96–107.
- [61] Thuan M.V. (2018), “Robust finite-time guaranteed cost control for positive systems with multiple time delays”, *Journal of Systems Science and Complexity*, 31, pp. 1–14.
- [62] Thuan M.V., Huong D.C. (2018), “New results on exponential stability and passivity analysis of delayed switched systems with nonlinear perturbations”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 37(2), pp. 569–592.
- [63] Thuan M.V., Huong D.C. (2018), “New results on stabilization of fractional-order nonlinear systems via an LMI approach”, *Asian Journal of Control*, 20(4), pp. 1541–1550.
- [64] Thuan M.V., Trinh H., Huong D.C. (2017), “Reachable sets bounding for switched systems with time-varying delay and bounded disturbances”, *International Journal of Systems Science*, 48(3), pp. 494–504.
- [65] Thuan M.V., Tran H.M., Trinh H. (2018), “Reachable sets bounding for generalized neural networks with interval time-varying delay and bounded disturbances”, *Neural Computing and Applications*, 29(10), pp. 783–794.
- [66] Thuan M.V., Thu N.T.H. (2017), “New results on reachable sets bounding for switched neural networks systems with discrete, distributed delays and bounded disturbances”, *Neural Processing Letters*, 46(1), pp. 355–378.

- [67] Trinh H., Nam P.T., Pathirana P.N., Le H.P. (2015), “On backwards and forwards reachable sets bounding for perturbed time-delay systems”, *Applied Mathematics and Computation*, 269, pp. 664–673.
- [68] Uhlig F. (1979), “A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions”, *Linear Algebra and its Applications*, 25, pp. 219–237.
- [69] Wang Z., Yang D., Zhang H. (2016), “Stability analysis on a class of nonlinear fractional-order systems”, *Nonlinear Dynamics*, 86(2), pp. 1023–1033.
- [70] Weiss L., Infante E.F. (1967), “Finite-time stability under perturbing forces and on product spaces”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 12(1), pp. 54–59.
- [71] Wu M., Liu F., Shi P., He Y., Yokoyama R. (2008), “Exponential stability analysis for neural networks with time-varying delay”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 38, pp. 1152–1156.
- [72] Wu Z.G., Shi P., Su H.Y., Chu J. (2011), “Delay-dependent stability analysis for switched neural networks with time-varying delay”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B* 41(6), pp. 1522–1530.
- [73] Yan Z.G., Zhang G., Wang J., Zhang W. (2015), “State and output feedback finite-time guaranteed cost control of linear Itô stochastic systems”, *Journal of Systems Science and Complexity*, 28(4), pp. 813–829.
- [74] Yan Z., Park J.H., Zhang W. (2017), “Finite-time guaranteed cost control for Itô Stochastic Markovian jump systems with incomplete transition rates”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27, pp. 66–83.
- [75] Zhang R., Tian G., Yang S., Cao H. (2015), “Stability analysis of a class of fractional order nonlinear systems with order lying  $(0, 2)$ ”, *ISA Transactions*, 56, pp. 102–110.
- [76] Zhang D., Yu L. (2012), “Exponential stability analysis for neutral switched systems with interval time-varying mixed delays and nonlinear perturbations”, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 6(2), pp. 775–786.
- [77] Zhang S., Yu Y., Yu J. (2017), “LMI conditions for global stability of fractional-order neural networks”, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning systems*, 28(10), pp. 2423–2433.



- [78] Zhao X.Q., Zhao J. (2015), “Output feedback passification of switched continuous-time linear systems subject to saturating actuators”, *Circuits, Systems and Signal Processing*, 34, pp. 1343–1361.
- [79] Zhong G.X., Yang G.H. (2015), “Passivity and output feedback passification of switched continuous-time systems with a dwell time constraint”, *Journal of Process Control*, 32, pp. 16–24.
- [80] Zuo Z., Fu F., Wang Y. (2012), “Results on reachable set estimation for linear systems with both discrete and distributed delays”, *IET Control Theory & Applications*, 6, pp. 2346–2350.
- [81] Zuo Z., Wang Z., Chen Y., Wang W. (2014), “A non-ellipsoidal reachable set estimation for uncertain neural networks with time-varying delay”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19, pp. 1097–1106.