BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÁO CÁO TÓM TẮT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

VỀ PHÂN TÍCH NGUYÊN SƠ, PHÂN TÍCH BẤT KHẢ QUY VÀ CẤU TRÚC CỦA MỘT SỐ LỚP VÀNH GIAO HOÁN

Mã số: B2016-TNA-26

Chủ nhiệm đề tài: TS. Trần Nguyên An

THÁI NGUYÊN – 10/2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÁO CÁO TÓM TẮT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

VỀ PHÂN TÍCH NGUYÊN SƠ, PHÂN TÍCH BẤT KHẢ QUY VÀ CẤU TRÚC CỦA MỘT SỐ LỚP VÀNH GIAO HOÁN

Mã số: B2016-TNA-19

Xác nhận của tổ chức chủ trì	Chủ nhiệm đề tài
(ký, họ tên, đóng dấu)	*(ký, họ tên)*
	Trần Nguyên An

THÁI NGUYÊN – 10/2018

Danh sách các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài và đơn vị phối hợp chính

1. Danh sách các thanh viên tham gia nghiên cứu đề tài

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao
1	TS. Trần Nguyên An	Khoa Toán, trường ĐHSP, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Chủ nhiệm đề tài, định hướng nghiên cứu, xây dựng các chuyên đề, tổng hợp, báo cáo.
2	NCS. Lưu Phương Thảo	Khoa Toán, trường ĐHSP, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Xây dựng chuyên đề, tư vấn cộng tác.
3	TS. Trần Đỗ Minh Châu	Khoa Toán, trường ĐHSP, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Xây dựng chuyên đề, tư vấn cộng tác.
4	ThS. Nguyễn Thị Ánh Hằng	Khoa Toán, trường ĐHSP, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Xây dựng chuyên đề, tư vấn cộng tác.
5	TS. Nguyễn Thị Dung	Khoa cơ bản, trường ĐHNL, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Xây dựng chuyên đề, bổ sung tài liệu, chỉnh sửa bản thảo và báo cáo.
6	ThS. Trần Thị Hồng Minh	Khoa Toán, trường ĐHSP, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Xây dựng chuyên đề, bổ sung tài liệu, chỉnh sửa bản thảo và báo cáo.
7	TS. Nguyễn Hữu Quân	Phòng KHCN&HTQT, trường ĐHSP, ĐHTN; Sinh học	Thư ký đề tài.

2. Đơn vị phối hợp chính

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị
Trường ĐHKH, ĐHTN	Tư vấn, định hướng nghiên cứu	GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn
Viện Toán học Việt Nam	Tư vấn, định hướng nghiên cứu	GS.TSKH. Nguyễn Tự Cường

Mục lục

Danh sách các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài và đơn vị phối hợp chính iii

Mở đầu 1

Chương 1 Kiến thức chuẩn bị 3

1.1 Phân tích nguyên sơ và phân tích bất khả quy 3

1.2 Lọc chiều và mô đun Cohen-Macaulay dãy 3

Chương 2 Iđêan hóa và ứng dụng 4

2.1 Iđêan hóa và một số tính chất 4

2.2 Ứng dụng của iđêan hóa 4

Chương 3 Phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy và môđun Cohen-Macaulay dãy 6

3.1 Phân tích nguyên sơ và lọc chiều 6

3.2 Phân tích bất khả quy 8

3.3 Tập iđêan nguyên tố liên kết và lọc chiều 9

3.4 Mở rộng môđun hữu hạn và tính Cohen-Macaulay dãy 10

Kết luận 13

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung

Tên đề tài: Về phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy và cấu trúc của một số lớp vành giao hoán

Mã số: B2016-TNA-19

Chủ nhiệm đề tài: TS. Trần Nguyên An
Email: antrannguyen@gmail.com
Điện thoại: 090816371

Cơ quan chủ trì: Đại học Thái Nguyên

Thời gian thực hiện: 2016-2017

2. Mục tiêu

- Nghiên cứu phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy của iđêan thuần nhất trong vành iđêan hóa, từ đó mô tả lọc chiều, đặc trưng tính Cohen-Macaulay dãy của lớp vành này.

- Nghiên cứu phân tích nguyên sơ qua mở rộng hữu hạn như môđun từ đó tìm hiểu tính Cohen-Macaulay dãy của mở rộng.

3. Tính mới và tính sáng tạo

Chủ đề nghiên cứu của đề tài là mới và có nhiều ứng dụng trong việc nghiên cứu iđêan hóa của môđun và mở rộng môđun hữu hạn.

4. Kết quả nghiên cứu

- Đề tài tìm ra phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy của iđêan thuần nhất trong vành iđêan hóa;

- Mô tả tập iđêan nguyên tố liên kết, lọc chiều của vành iđêan hóa;

- Đặc trưng tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa;

- Nghiên cứu tính Cohen-Macaulay dãy qua mở rộng môđun hữu hạn;

- Sử dụng vành iđêan hóa chứng minh lại một số Định lý trong Đại số giao hoán như Định lý giao Krull, Bổ đề Artin-Rees từ vành cho môđun;

- Mô tả phân tích nguyên sơ qua mở rộng hữu hạn như môđun từ đó tìm hiểu tính Cohen-Macaulay dãy của mở rộng.

5. Sản phẩm

5.1. Sản phẩm khoa học

1. Naoki Taniguchi, Tran Thi Phuong, Nguyen Thi Dung and Tran Nguyen An(2018), "Topic on sequentially Cohen-Macaulay modules", *Journal of Commutative Algebra*, 10(2) to appear. (SCIE).

2. Tran Nguyen An (2018), "Primary decomposition of homogeneous ideal in idealization of a module", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, pp. 1-8. (SCIE).

3. Trần Nguyên An và Nguyễn Huy Vinh (2017) "Tập iđêan nguyên tố liên kết và lọc chiều của vành iđêan hóa", *Tạp chí Giáo dục*, 5/2017, tr. 33-36.

4. Nguyễn Thị Ánh Hằng (2017), "Linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất", *Tạp chí khoa học và công nghệ ĐHTN*, 173(13), tr.193-198.

5.2. Sản phẩm đào tạo

- **Hướng dẫn 01 NCS:**

1. Lưu Phương Thảo, *Về một số lớp môđun mở rộng của lớp môđun Cohen-Macaulay*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

- **Hướng dẫn 05 luận văn cao học:**

1. Choukha HouaTouxay (5/2016), *Đa thức Hilbert của iđêan đơn thức*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

2. Lê Thị Thu Hường (10/2016), *Phân tích tham số của iđêan đơn thức*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

3. Nguyễn Thị Hồng Tâm (10/2016), *Số nghiệm và một số chặn nghiệm của đa thức*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

4. Nguyễn Thị Ánh Ly(5/2016), *Thuật toán slice để phân tích bất khả quy của iđêan đơn thức*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

5. Bùi Thị Hải Yến (10/2017), *Đồng nhất thức Newton-Girard và ứng dụng*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

- **Hướng dẫn 06 đề tài sinh viên nghiên cứu khoa học:**

1. Hoàng Hà My, Đinh Thị Nụ, Chansuda Luanglath (4/2016), *Lý thuyết nhóm và lý thuyết Polya*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

2. Dương Thị Phượng, Kiều Thị Lương, Saichay Lomaysim, Joung Her (4/2016), *Cơ sở Groebner và ứng dụng giải hệ phương trình*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

3. Đinh Thị Duyên (4/2016), *Tập iđêan nguyên tố liên kết và tập giá của môđun*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

4. Nguyễn Huy Vinh (4/2017), *Vành iđêan hóa và ứng dụng*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

5. Nguyễn Thị Quỳnh (4/2017), *Vành, môđun các thương và ứng dụng*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

6. Trần Thị Hà (4/2017), *Vành và môđun phân bậc*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

- Tập hợp chuyên đề seminar làm bài giảng cho cao học viên ngành Đại số và lý thuyết số:

1. Tổng quan về phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy và cấu trúc một số lớp vành giao hoán.

2. Tính toán phân tích tham số và phân tích bất khả quy trong một số lớp vành đặc biệt.

3. Phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy và một số giả thuyết trên vành giao hoán.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại

- Về khoa học: Công bố được một số kết quả mới, có ý nghĩa khoa học trên các tạp chí quốc tế có uy tín ISI (thuộc chủ đề nghiên cứu của đề tài).
- Về giáo dục và đào tạo: Hướng dẫn nghiên cứu sinh, thạc sĩ, hỗ trợ luận án tiến sĩ của một thành viên đề tài, phục vụ hiệu quả cho công tác giảng dạy sau đại học các chuyên ngành Đại số, trường ĐHSP và ĐHKH–Đại học Thái Nguyên.
- Góp phần nâng cao năng lực nghiên cứu các thành viên trong nhóm thực hiện đề tài, mở rộng hợp tác nghiên cứu.

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General Information

Project title: On primary decomposition, irreducible decomposition and structure of some classes of commutative rings

Code number: B2016-TNA-19

Coordinator: Dr. Tran Nguyen An
Email: antrannguyen@gmail.com
Phone: 090816371
Implementing institution: Thai Nguyen University

Duration: From 1/2016 to 12/2017

2. Objectives

- Study primary decomposition, irreducible decomposition of homogeneous ideals in idealization of a module. Then give a description of dimension filtration of idealization of a module. Sequentially Cohen-Macaulayness of idealization of a module is also investigated.

- Study primary decomposition under module-finite extensions and sequentially Cohen-Macaulayness of these extension.

3. Novelty and creativity

The topic of the project to study is new and has many applications in studying idealization of a module and module-finite extensions.

4. Research results

- The primary decomposition and irreducible decomposition of a homogeneous ideal in the idealization of a module are given.

- Descible the formula for associated primes of and the index of irreducibility of the idealization of a module;

- Give a characterization of sequentially Cohen-Macaulay of the idealization of a module;

- Study module-finite extension of sequentially Cohen-Macaulay modules;

- Use idealization tool to prove some some theorems such as Krull intersection theorem, Artin-Rees's lemma from ring case to module case.

5. Products

5.1. Scientific publications

1. Naoki Taniguchi, Tran Thi Phuong, Nguyen Thi Dung and Tran Nguyen An(2018), "Topic on sequentially Cohen-Macaulay modules", *Journal of Commutative Algebra*, 10(2) to appear. (SCIE).

2. Tran Nguyen An (2018), "Primary decomposition of homoge-

neous ideal in idealization of a module", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, pp. 1-8. (SCIE).

3. Tran Nguyen An and Nguyen Huy Vinh (2017) "Associated primes and and dimension filtration of idealization of a module", *Journal of Education*, 5/2017, tr. 33-36.

4. Nguyen Thi Anh Hang (2017), "Annihilator of top local cohomology module", *Journal of science and technology TNU*, 173(13), tr.193-198.

5.2. Training results:

- **01 Phd student**

1. Luu Phuong Thao, *On some generalization of Cohen-Macaulay modules*, Thai Nguyen University of Sciences.

- **05 master of theses**

1. Choukha HouaTouxay (5/2016), *Hilbert functions of monomial ideals*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

2. Le Thi Thu Huong (10/2016), *Parametric decomposition of monomial ideals*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

3. Nguyen Thi Hong Tam (10/2016), *Some properties on roots of polynomials*, TNU-Thai Nguyen University of Sciences.

4. Nguyen Thi Anh Ly (5/2016), *The Slice Algorithm for irreducible decomposition of monomial ideals*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

5. Bui Thi Hai Yen(10/2017), *Newton-Girard and its applications*, TNU-Thai Nguyen University of Sciences.

- **5 scientific research students**

1. Hoang Ha My, Dinh Thi Nu, Chansuda Luanglath (4/2016), *Group theory and Polya theory*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

2. Duong Thi Phuong, Kieu Thi Luong, Saichay Lomaysim, Joung Her (4/2016), *On Groebner bases and their use in solving systems of equations*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

3. Dinh Thi Duyen (4/2016), *On the set of associated primes and the support of modules*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

4. Nguyen Huy Vinh (4/2017), *Idealization of a module and its applications*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

5. Nguyen Thi Quynh (4/2017), *Rings and modules of fractions and applications*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

6. Trần Thị Hà (4/2017), *On graded rings and modules*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

- **A collection of special subjects to be a lecture note for master students in major Algebra and Number theory:**

1. A Survey on primary decomposition, irreducible decomposition and structure of some classes of commutative rings
2. Compute parametric decomposition and irreducible decomposition in some special rings.
3. Primary decomposition, irreducible decomposition and some conjectures on commutative rings.

6. Applications and effectiveness

- On the scientific aspect: Publishing some scientific results in ISI journals of mathematics (in the research topic of the project).
- On educational aspect: Instructing 5 master theses, supporting a PhD thesis, teaching undergraduate students and graduate students in mathematics at TNU-Thai Nguyen University of Education.
- Strengthening the research capacity for the investigators of the projects, deepening the cooperation in scientific research with domestic and international research institution.

Mở đầu

Một trong những kết quả cơ bản của Đại số giao hoán là Định lý phân tích nguyên sơ và Định lý phân tích bất khả quy. Định lý phân tích nguyên sơ còn gọi là Định lý Lasker-Noether phát biểu rằng mọi iđêan trong vành Noether phân tích được thành giao hữu hạn các iđêan nguyên sơ. Định lý này lần đầu tiên được chứng minh bởi Emanuel Lasker năm 1905 cho vành đa thức và vành các chuỗi lũy thừa hình thức. Năm 1921 Emmy Noether đã chứng minh cho trường hợp tổng quát. Bà còn chứng minh rằng mọi iđêan trong vành Noether có thể biểu diễn thành giao của hữu hạn iđêan bất khả quy và số các iđean bất khả quy trong phân tích bất khả quy thu gọn là một hằng số. Phân tích nguyên sơ và phân tích bất khả quy có nhiều ứng dụng trong Đại số giao hoàn và Hình học Đại số, thể hiện qua hàng loạt công trình của: E. Noether, E. Lasker, W. Groebner, D.G. Northcott, W. Heinzer, L.J. Ratliff, K. Shah, S. Goto, N. Suzuki, I. Swanson, ...

Mục đích chính của đề tài là tìm hiểu phân tích nguyên sơ và phân tích bất khả quy của iđêan trong vành iđêan hóa.

Phân tích nguyên sơ và phân tích bất khả quy cũng có mối liên hệ mật thiết với cấu trúc của vành giao hoán như tính Gorenstein, Cohen-Macaulay, Cohen-Macaulay suy rộng, Cohen-Macaulay chính tắc.... Phân tích nguyên sơ giúp ta mô tả lọc chiều của vành và môđun từ đó nghiên cứu tính Cohen-Macaulay dãy của vành và môđun. Mục đích tiếp theo của đề tài nghiên cứu tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa của môđun liên hệ với tính Cohen-Macaulay dãy của vành cơ sở và của môđun ban đầu. Cũng cần nói thêm rằng, iđêan hóa là trường hợp đặc biệt của mở rộng môđun hữu hạn, trong trường hợp môđun là hữu hạn sinh. Từ đó một cách tự nhiên chúng tôi tìm hiểu tính Cohen-Macaulay dãy của biến đổi qua mở rộng môđun hữu hạn.

Đề tài được bố cục thành ba chương. Chương 1 trình bày kiến thức chuẩn bị. Để dễ theo dõi kết quả trong chương này chúng tôi trình bày một số kết quả về phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy, lọc chiều và môđun Cohen-Macaulay dãy. Chương 2, trình bày về vành iđêan hóa và một số ứng dụng. Để tiện theo dõi một số kết quả đã biết về iđêan hóa cũng được chúng tôi trình bày chứng minh chi tiết. Kết quả chính trong mục này là Định lý 2.2.3 và Định lý 2.2.5. Chương 3 là chương chính của đề tài trình bày phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy của iđêan trong vành iđêan hóa. Những nghiên cứu về lọc chiều, tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa, tính Cohen-Macaulay dãy chuyển qua mở rộng môđun hữu hạn cũng được trình bày trong chương này. Định lý 3.1.3 mô tả trọn vẹn phân tích nguyên sơ của các iđêan thuần nhất trong vành iđêan hóa. Cũng từ kết quả này cho ta thông tin về tập i đêan nguyên tố liên kết (Hệ quả 3.1.4) và mô tả lọc chiều của vành iđêan hóa (Mệnh đề 3.1.6). Một tính toán trực tiếp tập iđêan nguyên tố liên kết của vành iđêan hóa cũng được trình bày trong đề tài Định lý 3.3.1. Từ đó ta cũng thu lại được mô tả lọc chiều của vành iđêan hóa (Mệnh đề 3.3.3). Từ lọc chiều ta có liên hệ tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa với vành cơ sở và môđun ban đầu (Định lý 3.3.4). Cho $R \subseteq S$ là các vành. Vành S được gọi là *mở rộng môđun hữu hạn* (module finite extension) của R nếu S là R-môđun hữu hạn sinh. Cho R là vành giao hoán, M là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó vành iđêan hóa $R \ltimes M$ là mở rộng môđun hữu hạn của R. Từ đây một câu hỏi tự nhiên đặt ra là tìm hiểu tính Cohen-Macaulay dãy của khi qua mở rộng môđun hữu hạn của các vành. Định lý 3.4.5 cho ta nghiên cứu lọc chiều và tính Cohen-Macaulay dãy khi chuyển qua mở rộng môđun hữu hạn. Cũng từ đây ta thấy lại được kết quả về tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa (Hệ quả 3.4.11).

CHƯƠNG 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Phân tích nguyên sơ và phân tích bất khả quy

1.2 Lọc chiều và mô đun Cohen-Macaulay dãy

CHƯƠNG 2

Iđêan hóa và ứng dụng

2.1 Iđêan hóa và một số tính chất

Trong toàn bộ chương này ta xét R là vành giao hoán và M là R-môđun. Khái niệm iđêan hóa được giới thiệu bởi M. Nagata như sau:

Định nghĩa 2.1.1. Với $r_1, r_2 \in R$ và $m_1, m_2 \in M$ ta định nghĩa phép cộng và phép nhân

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1).$$

Khi đó, $R \times M$ với hai phép toán cộng và nhân ở trên là một vành được gọi là *iđêan hóa* của M trên R (hay còn gọi là mở rộng tầm thường của R bởi M) và được kí hiệu là $R \ltimes M$.

Trong chương này ta sẽ trình bày một số tính chất cơ bản của iđêan hóa

2.2 Ứng dụng của iđêan hóa

Iđêan hóa là công cụ hữu hiệu mở rộng một số kết quả từ vành lên môđun. Ta trình bày hai ví dụ về việc mở rộng Bổ đề Artin-Rees và định lý giao Krull từ vành lên môđun trong mục này.

Chú ý kết quả sau cho ta thông tin về tính Noether của vành iđêan hóa.

Định lý 2.2.1. *Ta có $R \ltimes M$ là Noether (tương ứng là Artin) nếu và chỉ nếu R là Noether (tương ứng là Artin) và M là hữu hạn sinh.*

Bổ đề 2.2.2. *Cho R là vành Noether, I, J, J' là các iđêan của R. Khi đó tồn tại một số tự nhiên r thỏa mãn:*

$$I^n J \cap J' = I^{n-r}(I^r J \cap J')$$

và mọi số tự nhiên $n > r$.

Định lý 2.2.3 (Bổ đề Artin-Rees)**.** *Cho M là môđun hữu hạn trên vành Noether R và cho N, N' là các R-môđun con của M. Giả sử I là iđêan của R. Khi đó tồn tại một số tự nhiên r thỏa mãn:*

$$I^n N \cap N' = I^{n-r}(I^r N \cap N')$$

với mọi số tự nhiên $n > r$.

Nhận xét 2.2.4. *Từ bổ đề Artin-Rees ta có thể chứng minh được định lý Krull tuy nhiên ở đây đề tài đưa ra chứng minh định lý giao Krull cho môđun bằng cách trực tiếp và ứng dụng công cụ iđêan hóa*

Định lý 2.2.5. *Cho I là iđêan trong vành Noether R. Khi đó tồn tại a thuộc I sao cho $(1 + a)(\bigcap I^n) = 0$.*

Định lý 2.2.6 (Định lý giao Krull)**.** *Cho I là iđêan trong vành Noether R và M là R- môđun hữu hạn sinh. Khi đó tồn tại $a \in I$ sao cho*

$$(1 + a) \bigcap_{n \geq 0} I^n M = 0.$$

Hệ quả 2.2.7. *Cho I là iđêan trong vành Noether R, I nằm trong căn Jacobson của R. Cho M là R- môđun hữu hạn sinh. Khi đó*

$$\bigcap_{n \geq 0} IM = 0.$$

CHƯƠNG 3

Phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy và môđun Cohen-Macaulay dãy

3.1 Phân tích nguyên sơ và lọc chiều

Nagata đã chỉ ra rằng nếu N môđun con $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của M thì $\mathrm{Ann}_R(M/N) \times M$ là $\mathfrak{p} \times M$-nguyên sơ. Ta đã tổng quát kết quả này và đưa ra phân loại iđêan nguyên sơ thuần nhất của vành $R \ltimes M$ như sau

Định lý 3.1.1. *Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M. Khi đó $I \times N$ là iđêan nguyên sơ nếu và chỉ nếu thỏa mãn một trong hai điều kiện sau*

(i) $N = M$ và I là iđêan nguyên sơ của R.

(ii) $N \subsetneq M$, $IM \subseteq N$ và I, N là các $\mathfrak{p}$-nguyên sơ với $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$.

Trong cả hai trường hợp, $I \times N$ là $\sqrt{I} \times M$-nguyên sơ.

Mục này trình bày kết quả mới. Trong suốt mục này ta giả sử R là một vành Noether và M là R-môđun hữu hạn sinh. Giả sử I là iđêan của R và N là môđun con M. Nhắc lại một phân tích nguyên sơ $N = N_1 \cap \cdots \cap N_t$ của N là thu gọn nếu

(i) các iđêan nguyên tố $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/N_1)}, ..., \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/N_t)}$ phân biệt và

(ii) với mọi $j = 1, ..., t$, $N \neq \bigcap_{i \neq j} N_i$.

Trong trường hợp iđêan, phân tích nguyên sơ $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$ của I là thu gọn nếu $\sqrt{Q_1}, ..., \sqrt{Q_s}$ phân biệt và $I \neq \bigcap_{i \neq j} Q_i$ với mọi $j \in \{1, ..., n\}$.

Ta có phân tích nguyên sơ thu gọn nếu tồn tại phân tích nguyên sơ. Hơn nưa, nếu R là Noether và M là R-môđun hữu hạn sinh thì tồn tại phân tích nguyên sơ thu gọn của I và của N.

Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$. Bổ đề sau là kết quả mới cho ta phân tích nguyên sơ thu gọn của I và N. Đây là công cụ hữu hiệu để mô tả phân tích nguyên sơ của $I \times N$.

Bổ đề 3.1.2. *Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$. Giả sử $\operatorname{Ass}(R/I) = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_s\}$, $\operatorname{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{q}_1, ..., \mathfrak{q}_t\}$, $\operatorname{Ass}(R/I) \cap \operatorname{Ass}(M/N) \neq \emptyset$, và $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i, i = 1, ..., r$, $1 \leq r \leq \min\{s, t\}$. Khi đó tồn tại phân tích nguyên sơ thu gọn của I và N*

$$I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i; N = \bigcap_{i=1}^{t} N_i$$

thỏa mãn $Q_i M \subseteq N_i$, với mọi $i = 1, ..., r$.

Định lý 3.1.3. *Cho I là một iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$. Đặt $\Lambda_1 = \{i | \, \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass}(R/I) \cap \operatorname{Ass}(M/N)\}$, $\Lambda_2 = \{i | \, \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass}(R/I) \setminus \operatorname{Ass}(M/N)\}$, và*

$$\Lambda_3 = \{i | \, \mathfrak{q}_i \in \operatorname{Ass}(M/N) \setminus \operatorname{Ass}(R/I)\}.$$

Giả sử

$$I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i, N = \bigcap_{i=1}^{t} N_i$$

là phân tích nguyên sơ của I và N thỏa mãn $Q_i M \subseteq N_i$ với mọi $i \in \Lambda_1$. Khi đó

$$I \times N = \bigcap_{i \in \Lambda_1} (Q_i \times N_i) \bigcap_{i \in \Lambda_2} (Q_i \times M) \bigcap_{i \in \Lambda_3} (\operatorname{Ann}(M/N_i) \times N_i)$$

là phân tích nguyên sơ của $I \times N$.

Kết quả sau mô tả các iđêan nguyên tố liên kết của $R \ltimes M$. Ta ký hiệu $\operatorname{Assh}(L) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(L) \,|\, \dim R/\mathfrak{p} = \dim L\}$ với mọi R-môđun L.

Hệ quả 3.1.4. *Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$. Khi đó* $\operatorname{Ass}(R \ltimes M) = \{\mathfrak{p} \times M \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R) \cup \operatorname{Ass}(M)\}$, *và* $\operatorname{Assh}(R \ltimes M) = \{\mathfrak{p} \times M \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Assh}(R)\}$.

Giả sử L là R-môđun. Ta ký hiệu $U_0(L)$ là môđun con lớn nhất của L có chiều nhỏ hơn $\dim L$. Ta có

$$U_0(L) = \cap_{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Assh}(L)} I(\mathfrak{p}_i),$$

trong đó $0 = \cap I(\mathfrak{p}_i)$ là phân tích nguyên sơ tối tiểu của môđun con 0 trong L. Ta có thể tính $U_0(R \ltimes M)$ theo $U_0(R)$ và $U_0(M)$ như sau.

Hệ quả 3.1.5. *Nếu* $\dim M = \dim R$ *thì* $U_0(R \ltimes M) = U_0(R) \times U_0(M)$. *Nếu* $\dim M < \dim R$ *thì* $U_0(R \ltimes M) = U_0(R) \times M$.

Kết quả trên là cơ sở để nghiên cứu lọc chiều của môđun. Lọc chiều là công cụ hữu hiệu trong việc nghiên cứu một số lớp môđun là mở rộng của môđun Cohen-Macaulay: môđun Cohen-Macaulay dãy, môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy. Kết quả sau đưa ra mô tả lọc chiều của iđêan hóa của M.

Mệnh đề 3.1.6. *Giả sử $\{R_i\}_{i=0,\dots,d}$ và $\{M_i\}_{i=0,\dots,s}$ là lọc chiều của R và M tương ứng. Đặt $S = R \ltimes M, S_i = R_i \times M_i$ với $i = 0, ..., s$ và $S_i = R_i \times M$ với $i = s+1, ..., d$. Khi đó $\{S_i\}_{i=0,\dots,d}$ là lọc chiều của $R \ltimes M$.*

3.2 Phân tích bất khả quy

Định lý trong mục này cho ta phân tích bất khả quy của iđêan thuần nhất trong vành iđêan hóa.

Bổ đề 3.2.1. *Cho R là vành giao hoán, M là R-môđun. Cho I là một iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$. Khi đó $I \times N$ bất khả quy nếu và chỉ nếu*

(i) $N = M$ và I là iđêan bất khả quy của R hoặc

(ii) $N \subsetneq M$, $I = \operatorname{Ann}_R(M/N)$, và N là bất khả quy.

Định lý 3.2.2. *Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subsetneq N$. Giả sử*

$$I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i; N = \bigcap_{i=1}^{t} N_i$$

là phân tích bất khả quy của I và N. Khi đó

$$I \times N = \left[\bigcap_{i=1}^{s}(Q_i \times M)\right] \bigcap_{i=1}^{t}(\mathrm{Ann}(M/N_i) \times N_i)$$

là phân tích bất khả quy của $I \times N$.

Cho L là môđun con của M. Ta đã biết rằng L có phân tích bất khả quy và số các thành phần xuất hiện trong phân tích bất khả quy thu gọn của L không phụ thuộc vào phân tích bất khả quy. Số này được gọi là *chỉ số bất khả quy* của L và được ký hiệu$n(L)$. Từ Định lý 3.2.2 ta có.

Hệ quả 3.2.3. $n(0_{R\ltimes M}) = n(0_R) + n(0_M)$.

3.3 Tập iđêan nguyên tố liên kết và lọc chiều

Tập iđêan nguyên tố liên kết của vành iđêan hóa được mô tả như sau. Lưu ý kết quả này đã được tiếp cận cách khác thông qua phân tích nguyên sơ và được trình bày trong mục 3.2.

Định lý 3.3.1. *Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$. Khi đó*

$$\mathrm{Ass}_{R\ltimes M}(I \ltimes N) = \{\mathfrak{p} \times M | \, \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R\, I \cup \mathrm{Ass}_R\, N\}.$$

Đặc biệt,

$$\mathrm{Ass}_{R\ltimes M}(R \ltimes M) = \{\mathfrak{p} \times M | \, \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R\, R \cup \mathrm{Ass}_R\, M\}.$$

Tập iđêan nguyên tố liên kết cho ta nhiều thông tin của môđun. Theo Herzog and Popescu ta có thể mô tả lọc chiều của môđun. Với mỗi $0 \le i \le s$, đặt $\mathrm{Ass}^i_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M) | \dim R/\mathfrak{p} = i\}$. Herzog and Popescu đã đưa ra đặc trưng sau của lọc chiều.

Bổ đề 3.3.2. *Cho* $\mathcal{F} : 0 \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{s-1} \subseteq M_s = M$ *là một lọc các môđun con của* M*. Khi đó các điều kiện sau tương đương:*

(i) $\mathcal{F}$ *là lọc chiều của* M*;*

(ii) $\mathrm{Ass}_R(M_i/M_{i-1}) = \mathrm{Ass}^i_R(M)$ *với mọi* i*.*

Từ đó ta có mô tả lọc chiều của vành iđêan hóa $R \ltimes M$.

Mệnh đề 3.3.3. *Giả sử* $\mathcal{F}_R : 0 \subseteq R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots \subseteq R_{d-1} \subseteq R_d = R$ *và* $\mathcal{F}_M : 0 \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{s-1} \subseteq M_s = M$ *là các lọc chiều của* R *và* M *tương ứng. Đặt* $S = R \ltimes M, S_i = R_i \times M_i$ *với* $i = 0, ..., s$ *và* $S_i = R_i \times M$ *với* $i = s + 1, ..., d$*. Khi đó* $\mathcal{F}_S : 0 \subseteq S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_{d-1} \subseteq S_d = S$ *là lọc chiều của* $R \ltimes M$*. Hơn nữa,* S_i *là iđêan thuần nhất của* $R \ltimes M$ *với mọi* i*.*

Từ kết quả mô tả lọc chiều trên ta dễ dàng chứng minh kết quả sau, cho ta nghiên cứu về tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa.

Định lý 3.3.4. *Cho* R *là vành địa phương Noether,* $M \neq (0)$ *là* R*-môđun hữu hạn sinh. Đặt* $S = R \ltimes M$ *là iđêan hóa của* M *trên* R*. Khi đó các điều kiện sau là tương đương.*

(1) $S = R \ltimes M$ *là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy.*

(2) $S = R \ltimes M$ *là* R*-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

(3) R *vành địa phương Cohen-Macaulay dãy và* M *là* R*-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

3.4 Mở rộng môđun hữu hạn và tính Cohen-Macaulay dãy

Định nghĩa 3.4.1. *Cho* $R \subseteq S$ *là các vành. Vành* S *được gọi là mở rộng môđun hữu hạn (module finite extension) của* R *nếu* S *là* R*-môđun hữu hạn sinh.*

Ví dụ 3.4.2. *(i)* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *là mở rộng môđun hữu hạn của* $\mathbb{Z}$*.*

(ii) Cho R là vành giao hoán, M là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó vành iđêan hóa $R \ltimes M$ là mở rộng môđun hữu hạn của R.

(iii) Let A be a Noetherian local ring, G a finite subgroup of $\operatorname{Aut} A$. *Suppose that the order of G is invertible in A. Then A is a module-finite extension of $R = A^G$.*

Từ đây một câu hỏi tự nhiên đặt ra là tìm hiểu tính Cohen-Macaulay dãy của khi qua mở rộng môđun hữu hạn của các vành. Lưu ý mục trước ta đã nghiên cứu trong trường hợp đặc biệt mở rộng vành bởi iđêan hóa.

Trong mục này ta luôn giả sử R là một vành địa phương với iđêan tối đại $\mathfrak{m}$, $M \neq (0)$ là R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Khi đó tồn tại R-môđun con lớp nhất M_n của M thỏa mãn $\dim_R M_n \leq n$, với mọi $n \in \mathbb{Z}$ (chú ý ta quy ước $\dim_R(0) = -\infty$).

Bổ đề 3.4.3. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether, M và N là các R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó $[M \oplus N]_n = M_n \oplus N_n$ với mỗi $n \in \mathbb{Z}$.

Mệnh đề 3.4.4. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, M và N ($M, N \neq (0)$) là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó $M \oplus N$ là R-môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi M và N là các R-môđun Cohen-Macaulay dãy.

Từ đây ta giả sử S là vành địa phương và S là mở rộng môđun hữu hạn của R. Ta có kết quả chính của mục này như sau.

Định lý 3.4.5. *Cho $M \neq (0)$ là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó các phát biểu sau là đúng.*

(1) *M_n là S-môđun con lớn nhất của M thỏa mãn $\dim_A M_n \leq n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.*

(2) *Lọc chiều của M như S-môđun trùng với lọc chiều của M như R-môđun.*

(3) *M là S-môđun Cohen-Macaulay dãy nếu và chỉ nếu M là R-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

Từ đó ta có một số hệ quả.

Hệ quả 3.4.6. *S là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy nếu và chỉ nếu S là R-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

Hệ quả 3.4.7. *Cho M là S-môđun hữu hạn sinh. Giả sử R là một hạng tử trực tiếp của M như R-môđun. Nếu M là S-môđun Cohen-Macaulay dãy thì R là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy.*

Hệ quả 3.4.8. *Giả sử R là hạng tử trực tiếp của S như R-môđun. Nếu S là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy thì R cũng là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy.*

Ta xét vành bất biến $R = A^G$.

Hệ quả 3.4.9. *Giả sử S là vành địa phương Noether, G là nhóm con của $\operatorname{Aut} A$. Giả sử cấp của G khả nghịch trong S. Nếu S là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy, thì vành bất biến $R = S^G$ của S là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy.*

Chú ý 3.4.10. *Với các giả thiết như trong Hệ quả 3.4.9, gọi $\{D_i\}_{0\leq i\leq \ell}$ là lọc chiều của S. Khi đó mọi D_i là iđêan G-ổn định của S (xem Định lý 3.4.5 (1)) và lọc chiều của R cho bởi $\{D_i^G\}_{0\leq i\leq \ell}$ khi bỏ các môđun trùng nhau.*

Từ trên ta có kết quả sau.

Hệ quả 3.4.11. *Cho R là vành địa phương Noether, $M \neq (0)$ là R-môđun hữu hạn sinh. Đặt $S = R \ltimes M$ là iđêan hóa của M trên R. Khi đó các điều kiện sau là tương đương.*

(1) *$S = R \ltimes M$ là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy.*

(2) *$S = R \ltimes M$ là R-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

(3) *R vành địa phương Cohen-Macaulay dãy và M là R-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

Kết luận

Trong đề tài, chúng tôi đã đạt được một số kết quả cơ bản sau:

- Hệ thống một số kiến thức cơ bản về phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy, lọc chiều của môđun, mô tả lọc chiều của môđun, môđun Cohen-Macaulay dãy.
- Tìm hiểu về iđêan hóa và một số tính chất cơ bản: mô tả các lớp iđêan đặc biệt, một số đẳng cấu thông dụng, một số phần tử đặc biệt; tìm hiểu về địa phương hóa của vành iđêan hóa.
- Đưa ra một ứng dụng của iđêan hóa trong việc mở rộng kết quả từ vành sang môđun.
- Nghiên cứu để đưa ra mô tả phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy của iđêan thuần nhất trong vành iđêan hóa.
- Mô tả lọc chiều của vành iđêan hóa bằng cách sử dụng phân tích nguyên sơ và bằng tính tập iđêan nguyên tố liên kết.
- Nghiên cứu tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa, biến đổi tính Cohen-Macaulay dãy của vành qua mở rộng hữu hạn đặc biệt.