BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

VỀ PHÂN TÍCH NGUYÊN SƠ, PHÂN TÍCH BẤT KHẢ QUY VÀ CẤU TRÚC CỦA MỘT SỐ LỚP VÀNH GIAO HOÁN

Mã số: B2016-TNA-26

Chủ nhiệm đề tài: TS. Trần Nguyên An

THÁI NGUYÊN – 10/2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

VỀ PHÂN TÍCH NGUYÊN SƠ, PHÂN TÍCH BẤT KHẢ QUY VÀ CẤU TRÚC CỦA MỘT SỐ LỚP VÀNH GIAO HOÁN

Mã số: B2016-TNA-19

Xác nhận của tổ chức chủ trì	Chủ nhiệm đề tài
(ký, họ tên, đóng dấu)	*(ký, họ tên)*
	Trần Nguyên An

THÁI NGUYÊN – 10/2018

Danh sách các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài và đơn vị phối hợp chính

1. Danh sách các thanh viên tham gia nghiên cứu đề tài

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao
1	TS. Trần Nguyên An	Khoa Toán, trường ĐHSP, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Chủ nhiệm đề tài, định hướng nghiên cứu, xây dựng các chuyên đề, tổng hợp, báo cáo.
2	NCS. Lưu Phương Thảo	Khoa Toán, trường ĐHSP, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Xây dựng chuyên đề, tư vấn cộng tác.
3	TS. Trần Đỗ Minh Châu	Khoa Toán, trường ĐHSP, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Xây dựng chuyên đề, tư vấn cộng tác.
4	ThS. Nguyễn Thị Ánh Hằng	Khoa Toán, trường ĐHSP, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Xây dựng chuyên đề, tư vấn cộng tác.
5	TS. Nguyễn Thị Dung	Khoa cơ bản, trường ĐHNL, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Xây dựng chuyên đề, bổ sung tài liệu, chỉnh sửa bản thảo và báo cáo.
6	ThS. Trần Thị Hồng Minh	Khoa Toán, trường ĐHSP, ĐHTN; Đại số & Lý thuyết số	Xây dựng chuyên đề, bổ sung tài liệu, chỉnh sửa bản thảo và báo cáo.
7	TS. Nguyễn Hữu Quân	Phòng KHCN&HTQT, trường ĐHSP, ĐHTN; Sinh học	Thư ký đề tài.

2. Đơn vị phối hợp chính

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị
Trường ĐHKH, ĐHTN	Tư vấn, định hướng nghiên cứu	GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn
Viện Toán học Việt Nam	Tư vấn, định hướng nghiên cứu	GS.TSKH. Nguyễn Tự Cường

Mục lục

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung

Tên đề tài: Về phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy và cấu trúc của một số lớp vành giao hoán

Mã số: B2016-TNA-19

Chủ nhiệm đề tài: TS. Trần Nguyên An

Email: antrannguyen@gmail.com

Điện thoại: 090816371

Cơ quan chủ trì: Đại học Thái Nguyên

Thời gian thực hiện: 2016-2018

2. Mục tiêu

- Nghiên cứu phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy của iđêan thuần nhất trong vành iđêan hóa, từ đó mô tả lọc chiều, đặc trưng tính Cohen-Macaulay dãy của lớp vành này.

- Nghiên cứu phân tích nguyên sơ qua mở rộng hữu hạn như môđun từ đó tìm hiểu tính Cohen-Macaulay dãy của mở rộng.

3. Tính mới và tính sáng tạo

Chủ đề nghiên cứu của đề tài là mới và có nhiều ứng dụng trong việc nghiên cứu iđêan hóa của môđun và mở rộng môđun hữu hạn.

4. Kết quả nghiên cứu

- Đề tài tìm ra phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy của iđêan thuần nhất trong vành iđêan hóa;

- Mô tả tập iđêan nguyên tố liên kết, lọc chiều của vành iđêan hóa;

- Đặc trưng tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa;

- Nghiên cứu tính Cohen-Macaulay dãy qua mở rộng môđun hữu hạn;

- Sử dụng vành iđêan hóa chứng minh lại một số Định lý trong Đại số giao hoán như Định lý giao Krull, Bổ đề Artin-Rees từ vành cho môđun;

- Mô tả phân tích nguyên sơ qua mở rộng hữu hạn như môđun từ đó tìm hiểu tính Cohen-Macaulay dãy của mở rộng.

5. Sản phẩm

5.1. Sản phẩm khoa học

1. Naoki Taniguchi, Tran Thi Phuong, Nguyen Thi Dung and Tran Nguyen An(2018), "Topic on sequentially Cohen-Macaulay modules", *Journal of Commutative Algebra*, 10(2) to appear. (SCIE).

2. Tran Nguyen An (2018), "Primary decomposition of homogeneous ideal in idealization of a module", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, pp. 1-8. (SCIE).

3. Trần Nguyên An và Nguyễn Huy Vinh (2017) "Tập iđêan nguyên tố liên kết và lọc chiều của vành iđêan hóa", *Tạp chí Giáo dục*, 5/2017, tr. 33-36.

4. Nguyễn Thị Ánh Hằng (2017), "Linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất", *Tạp chí khoa học và công nghệ ĐHTN*, 173(13), tr.193-198.

5.2. Sản phẩm đào tạo

- **Hướng dẫn 01 NCS:**

1. Lưu Phương Thảo, *Về một số lớp môđun mở rộng của lớp môđun Cohen-Macaulay*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

- **Hướng dẫn 05 luận văn cao học:**

1. Choukha HouaTouxay (5/2016), *Đa thức Hilbert của iđêan đơn thức*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

2. Lê Thị Thu Hường (10/2016), *Phân tích tham số của iđêan đơn thức*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

3. Nguyễn Thị Hồng Tâm (10/2016), *Số nghiệm và một số chặn nghiệm của đa thức*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

4. Nguyễn Thị Ánh Ly(5/2016), *Thuật toán slice để phân tích bất khả quy của iđêan đơn thức*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

5. Bùi Thị Hải Yến (10/2017), *Đồng nhất thức Newton-Girard và ứng dụng*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

- **Hướng dẫn 06 đề tài sinh viên nghiên cứu khoa học:**

1. Hoàng Hà My, Đinh Thị Nụ, Chansuda Luanglath (4/2016), *Lý thuyết nhóm và lý thuyết Polya*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

2. Dương Thị Phượng, Kiều Thị Lương, Saichay Lomaysim, Joung Her (4/2016), *Cơ sở Groebner và ứng dụng giải hệ phương trình*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

3. Đinh Thị Duyên (4/2016), *Tập iđêan nguyên tố liên kết và tập giá của môđun*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

4. Nguyễn Huy Vinh (4/2017), *Vành iđêan hóa và ứng dụng*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

5. Nguyễn Thị Quỳnh (4/2017), *Vành, môđun các thương và ứng dụng*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

6. Trần Thị Hà (4/2017), *Vành và môđun phân bậc*, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

- Tập hợp chuyên đề seminar làm bài giảng cho cao học viên ngành Đại số và lý thuyết số:

1. Tổng quan về phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy và cấu trúc một số lớp vành giao hoán.

2. Tính toán phân tích tham số và phân tích bất khả quy trong một số lớp vành đặc biệt.

3. Phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy và một số giả thuyết trên vành giao hoán.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại

- Về khoa học: Công bố được một số kết quả mới, có ý nghĩa khoa học trên các tạp chí quốc tế có uy tín ISI (thuộc chủ đề nghiên cứu của đề tài).
- Về giáo dục và đào tạo: Hướng dẫn nghiên cứu sinh, thạc sĩ, hỗ trợ luận án tiến sĩ của một thành viên đề tài, phục vụ hiệu quả cho công tác giảng dạy sau đại học các chuyên ngành Đại số, trường ĐHSP và ĐHKH–Đại học Thái Nguyên.
- Góp phần nâng cao năng lực nghiên cứu các thành viên trong nhóm thực hiện đề tài, mở rộng hợp tác nghiên cứu.

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General Information

Project title: On primary decomposition, irreducible decomposition and structure of some classes of commutative rings

Code number: B2016-TNA-19

Coordinator: Dr. Tran Nguyen An
Email: antrannguyen@gmail.com
Phone: 090816371
Implementing institution: Thai Nguyen University
Duration: From 1/2016 to 12/2017

2. Objectives

- Study primary decomposition, irreducible decomposition of homogeneous ideals in idealization of a module. Then give a description of dimension filtration of idealization of a module. Sequentially Cohen-Macaulayness of idealization of a module is also investigated.
- Study primary decomposition under module-finite extensions and sequentially Cohen-Macaulayness of these extension.

3. Novelty and creativity

The topic of the project to study is new and has many applications in studying idealization of a module and module-finite extensions.

4. Research results

- The primary decomposition and irreducible decomposition of a homogeneous ideal in the idealization of a module are given.
- Descible the formula for associated primes of and the index of irreducibility of the idealization of a module;
- Give a characterization of sequentially Cohen-Macaulay of the idealization of a module;
- Study module-finite extension of sequentially Cohen-Macaulay modules;
- Use idealization tool to prove some some theorems such as Krull intersection theorem, Artin-Rees's lemma from ring case to module case.

5. Products

5.1. Scientific publications

1. Naoki Taniguchi, Tran Thi Phuong, Nguyen Thi Dung and Tran Nguyen An(2018), "Topic on sequentially Cohen-Macaulay modules", *Journal of Commutative Algebra*, 10(2) to appear. (SCIE).

2. Tran Nguyen An (2018), "Primary decomposition of homoge-

neous ideal in idealization of a module", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, pp. 1-8. (SCIE).

3. Tran Nguyen An and Nguyen Huy Vinh (2017) "Associated primes and and dimension filtration of idealization of a module", *Journal of Education*, 5/2017, tr. 33-36.

4. Nguyen Thi Anh Hang (2017), "Annihilator of top local cohomology module", *Journal of science and technology TNU*, 173(13), tr.193-198.

5.2. Training results:

- **01 Phd student**

1. Luu Phuong Thao, *On some generalization of Cohen-Macaulay modules*, TNU-Thai Nguyen University of Sciences.

- **05 master of theses**

1. Choukha HouaTouxay (5/2016), *Hilbert functions of monomial ideals*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

2. Le Thi Thu Huong (10/2016), *Parametric decomposition of monomial ideals*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

3. Nguyen Thi Hong Tam (10/2016), *Some properties on roots of polynomials*, TNU-Thai Nguyen University of Sciences.

4. Nguyen Thi Anh Ly (5/2016), *The Slice Algorithm for irreducible decomposition of monomial ideals*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

5. Bui Thi Hai Yen(10/2017), *Newton-Girard and its applications*, TNU-Thai Nguyen University of Sciences.

- **5 scientific research students**

1. Hoang Ha My, Dinh Thi Nu, Chansuda Luanglath (4/2016), *Group theory and Polya theory*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

2. Duong Thi Phuong, Kieu Thi Luong, Saichay Lomaysim, Joung Her (4/2016), *On Groebner bases and their use in solving systems of equations*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

3. Dinh Thi Duyen (4/2016), *On the set of associated primes and the support of modules*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

4. Nguyen Huy Vinh (4/2017), *Idealization of a module and its applications*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

5. Nguyen Thi Quynh (4/2017), *Rings and modules of fractions and applications*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

6. Trần Thị Hà (4/2017), *On graded rings and modules*, TNU-Thai Nguyen University of Education.

- **A collection of special subjects to be a lecture note for master students in major Algebra and Number theory:**

1. A Survey on primary decomposition, irreducible decomposition and structure of some classes of commutative rings

2. Compute parametric decomposition and irreducible decomposition in some special rings.

3. Primary decomposition, irreducible decomposition and some conjectures on commutative rings.

6. Applications and effectiveness

- On the scientific aspect: Publishing some scientific results in ISI journals of mathematics (in the research topic of the project).

- On educational aspect: Instructing 5 master theses, supporting a PhD thesis, teaching undergraduate students and graduate students in mathematics at TNU-Thai Nguyen University of Education.

- Strengthening the research capacity for the investigators of the projects, deepening the cooperation in scientific research with domestic and international research institution.

Mở đầu

Định lý Cơ bản của Số học chỉ ra rằng mọi số nguyên $n \geqslant 2$ luôn phân tích được thành tích các số nguyên tố và sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các nhân tử. Trong Đại số có rất nhiều kết quả tương tự nảy sinh, chẳng hạn: mọi đa thức khác hằng trên một trường phân tích được thành tích các đa thức bất khả quy và sự phân tích đó cũng là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các nhân tử. Các ví dụ trên đều có một đối tượng chung là phân tích thành nhân tử "bất khả quy", tức là các phần tử không phân tích được thành các nhân tử "không tầm thường". Một cách tổng quát, trong một vành giao hoán có đơn vị R liệu các phần tử của R có thể phân tích được thành tích các phần tử bất khả quy. Một ví dụ chỉ ra điều này không đúng là vành $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Trong vành này ta có $6 = 2.3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$.

Vào đầu những năm 1800 Ernst Kummer và Julius Wilhelm Richard Dedekind đã nhận ra rằng bài toán có thể được chính sửa. Thay cho việc phân tích một phần tử $r \in R$ ta phân tích tập rR thành tích $rR = I_1.I_2...I_n, I_i$ là các tập tương tự. Các tập "tương tự" được gọi là các iđêan. Khi đó trong vành $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ta có

$$6R = I_1I_2 = J_1J_2$$

là duy nhất sai khác thứ tự các nhân tử. Trong nghiên cứu người ta đã chỉ ra phân tích thành tích các iđêan không có ý nghĩa.

Vào những năm 1900 Emanuel Lasker và Emmy Noether đã nhận ra rằng tốt hơn là ta xét giao thay cho tích. Ý tưởng là tương tự ngoại trừ một iđêan I là bất khả quy nếu nó không phân tích được thành giao của 2 iđêan thực sự chứa I. Họ cũng chỉ ra sự phân tích như vậy tồn tại trong một lớp vành đủ rộng. Điều này được thể hiện trong hai định lý quan trọng trong Đại số giao hoán Định lý phân tích nguyên sơ và Định lý phân tích bất khả quy. Định lý phân tích nguyên sơ còn gọi là Định lý Lasker-Noether phát biểu rằng mọi iđêan trong vành Noether phân tích được thành giao hữu hạn các iđêan nguyên sơ. Định lý này lần đầu tiên được chứng minh bởi Emanuel Lasker năm 1905 cho vành đa thức và vành các chuỗi lũy thừa hình thức. Năm 1921 Emmy Noether đã chứng minh cho trường hợp tổng quát. Bà còn chứng minh rằng mọi iđêan trong vành Noether có thể biểu diễn thành giao của hữu hạn iđêan bất khả quy và số các iđean bất khả quy trong phân tích bất khả quy thu gọn là một hằng số. Phân tích nguyên sơ và phân tích bất khả quy có nhiều ứng dụng trong Đại số giao hoàn và Hình học Đại số, thể hiện qua hàng loạt công trình của: E. Noether, E. Lasker, W. Groebner, D.G. Northcott, W. Heinzer, L.J. Ratliff, K. Shah, S. Goto, N. Suzuki, I. Swanson, ...

Mục đích chính của đề tài là tìm hiểu phân tích nguyên sơ và phân tích bất khả quy của iđêan trong vành iđêan hóa. Chú ý cho R là vành giao hoán và M là R-môđun. Khái niệm iđêan hóa được giới thiệu bởi M. Nagata [16] như sau. Trang bị cho tích Descartes $R \times M$ hai phép toán cộng và nhân

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2),$$
$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)$$

với $r_1, r_2 \in R$, $m_1, m_2 \in M$, thì $R \times M$ cũng là một vành giao hoán có đơn vị và được gọi là *iđêan hóa* của M trên R (hay còn gọi là mở rộng tầm thường của R bởi M) và được kí hiệu là $R \ltimes M$. Mục đích của iđêan hóa là xem môđun M như là iđêan của $R \ltimes M$. Khi đó, ta có thể dùng iđêan hóa để đưa những kết quả có liên quan đến môđun con về trường hợp iđêan, hoặc mở rộng những kết quả từ vành cho môđun, hoặc xây dựng những ví dụ về vành giao hoán với ước của không.Trong đề tài chúng tôi cũng trình bày một số chứng minh chi tiết về việc sử dụng iđêan hóa mở rộng kết quả từ vành cho môđun.

Phân tích nguyên sơ và phân tích bất khả quy cũng có mối liên hệ mật thiết với cấu trúc của vành giao hoán như tính Gorenstein, Cohen-Macaulay, Cohen-Macaulay suy rộng, Cohen-Macaulay chính tắc.... Phân tích nguyên sơ giúp ta mô tả lọc chiều của vành và môđun từ đó nghiên cứu tính Cohen-Macaulay dãy của vành và môđun. Mục đích tiếp theo của đề tài nghiên cứu tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa của môđun liên hệ với tính Cohen-Macaulay dãy của vành cơ sở và của môđun ban đầu. Cũng cần nói thêm rằng, iđêan hóa là trường hợp đặc biệt của mở rộng môđun hữu hạn, trong trường hợp môđun là hữu hạn sinh. Từ đó một cách tự nhiên chúng tôi tìm hiểu tính Cohen-Macaulay dãy của biến đổi qua mở rộng môđun hữu hạn.

Đề tài được bố cục thành ba chương. Chương 1 trình bày kiến thức chuẩn bị. Để dễ theo dõi kết quả trong chương này chúng tôi trình bày một số kết quả về phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy, lọc chiều và môđun Cohen-Macaulay dãy. Chương 2, trình bày về vành iđêan hóa và một số ứng dụng. Để tiện theo dõi một số kết quả đã biết về iđêan hóa cũng được chúng tôi trình bày chứng minh chi tiết. Kết quả chính trong mục này là Định lý 2.2.3 và Định lý 2.2.5. Chương 3 là chương chính của đề tài trình bày phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy của iđêan trong vành iđêan hóa. Những nghiên cứu về lọc chiều, tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa, tính Cohen-Macaulay dãy chuyển qua mở rộng môđun hữu hạn cũng được trình bày trong chương này. Định lý 3.1.3 mô tả trọn vẹn phân tích nguyên sơ của các iđêan thuần nhất trong vành iđêan hóa. Cũng từ kết quả này cho ta thông tin về tập i đêan nguyên tố liên kết (Hệ quả 3.1.4) và mô tả lọc chiều của vành iđêan hóa (Mệnh đề 3.1.6). Một tính toán trực tiếp tập iđêan nguyên tố liên kết của vành iđêan hóa cũng được trình bày trong đề tài Định lý 3.3.1. Từ đó ta cũng thu lại được mô tả lọc chiều của vành iđêan hóa (Mệnh đề 3.3.3). Từ lọc chiều ta có liên hệ tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa với vành cơ sở và môđun ban đầu (Định lý 3.3.4). Cho $R \subseteq S$ là các vành. Vành S được gọi là *mở rộng môđun hữu hạn* (module finite extension) của R nếu S là R-môđun hữu hạn sinh. Cho R là vành giao hoán, M là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó vành iđêan hóa $R \ltimes M$ là mở rộng môđun hữu hạn của R. Từ đây một câu hỏi tự nhiên đặt ra là tìm hiểu tính Cohen-Macaulay dãy của khi qua mở rộng môđun hữu hạn của các vành. Định lý 3.4.5 cho ta nghiên cứu lọc chiều và tính Cohen-Macaulay dãy khi chuyển qua mở rộng môđun hữu hạn. Cũng từ đây ta thấy lại được kết quả về tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa (Hệ quả 3.4.11).

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Phân tích nguyên sơ và phân tích bất khả quy

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị và một R-môđun M. Khi đó với mỗi $a \in R$, quy tắc $\lambda_a : M \xrightarrow{a} M$ cho bởi $\lambda_a(x) = ax$ với mọi $x \in M$ là một tự đồng cấu của M được gọi là *đồng cấu nhân* bởi phần tử a cho M.

Chúng ta có một số nhận xét liên quan đến đồng cấu nhân sau đây:

(i) λ_a là một đơn cấu khi và chỉ khi a không là ước của không trong M

(ii) λ_a là lũy linh (tức là $\exists n \in \mathbb{N}$ sao cho $(\lambda_a)^n = 0$) nếu và chỉ nếu tồn tại một số nguyên dương n để $a^n M = 0$, tức là $a^n \in \mathrm{Ann}(M)$, hay $a \in \sqrt{\mathrm{Ann}(M)}$.

(iii) Nếu $M \neq 0$ thì mỗi phần tử $a \in R$ không thể đồng thời vừa thuộc $\sqrt{\mathrm{Ann}(M)}$, vừa không là ước của không trong M. Do đó, λ_a không thể vừa là đơn cấu, vừa là lũy linh.

Định nghĩa 1.1.1. Môđun con N của một R-môđun M được gọi là *một môđun con nguyên sơ* của M nếu $N \neq M$, đồng thời với mỗi $a \in R$ thì đồng cấu nhân bởi a cho môđun thương M/N :

$$\lambda_a : M/N \longrightarrow M/N$$

hoặc là đơn cấu hoặc là lũy linh.

Nhận xét 1.1.2. Từ Định nghĩa 1.1.1 ta rút ra rằng, một môđun con thực sự N của M là một môđun con nguyên sơ khi và chỉ khi với mỗi $a \in R$ và $x \in M$ mà $ax \in N$, thì hoặc $x \in N$ hoặc tồn tại n để $a^n M \subseteq N$.

Mệnh đề 1.1.3. *Nếu N là một môđun con nguyên sơ của M thì tập*

$$\mathfrak{p} := r_M(N) = \sqrt{N : M} = \sqrt{\mathrm{Ann}(M/N)}$$

là một iđêan nguyên tố. Trong trường hợp này, người ta gọi N là một môđun con $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của M.

Chú ý 1.1.4. Ta gọi một iđêan I của R là một *iđêan nguyên sơ* nếu I là một R-môđun con nguyên sơ của R. Dễ thấy rằng I là một *iđêan nguyên sơ* nếu và chỉ nếu I khác R và nếu $ab \in I$, thì hoặc $a \in I$ hoặc $b^n \in I$ với n nguyên dương nào đó. Theo Mệnh đề 1.1.3, thì $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố và người ta gọi I là một iđêan $\mathfrak{p}$-*nguyên sơ*. Dễ dàng thấy rằng, mỗi iđêan nguyên tố đều là một iđêan nguyên sơ.

Đặc biệt, trong một vành chính, thì $\sqrt{I}$ là một iđêan nguyên tố khi và chỉ khi I nguyên sơ, và thậm chí tương đương với I là lũy thừa của một iđêan nguyên tố.

Ví dụ sau chỉ ra iđêan I có $\sqrt{I}$ là một iđêan nguyên tố nhưng I không là iđêan nguyên sơ.

Ví dụ 1.1.5. *Cho $R = K[X, Y]$ với K là một trường và $I = (X^2, XY)$. Khi đó, $\sqrt{I} = (X)$ là một iđêan nguyên tố của R, tuy nhiên I không nguyên sơ, vì $XY \in I$ nhưng $X \notin I$ và $Y \notin \sqrt{I}$.*

Ví dụ sau chỉ ra một iđêan là lũy thừa của một iđêan nguyên tố chưa chắc đã là một iđêan nguyên sơ.

Ví dụ 1.1.6. *Với K là một trường, ta xét vành*

$$R = K[X, Y, Z]/(XY - Z^2)$$

và iđêan $\mathfrak{p} = (\overline{X}, \overline{Z})$ của R, trong đó $\overline{X}$ và $\overline{Z}$ tương ứng là ảnh của X và Z trong R . Khi đó, $R/\mathfrak{p} \cong K[Y]$ là một miền nguyên, nên $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố. Tuy nhiên $\mathfrak{p}^2$ không nguyên sơ, vì $\overline{X}\,\overline{Y} = \overline{Z}^2 \in \mathfrak{p}^2$, nhưng $\overline{X} \notin \mathfrak{p}^2$ và $\overline{Y}^n \notin \mathfrak{p}$ với mọi n.

Một iđêan nguyên sơ cũng không nhất thiết phải là lũy thừa của một iđêan nguyên tố.

Ví dụ 1.1.7. *Cho $R = K[X, Y]$ với K là một trường. Khi đó, $I = (X, Y^2)$ là một iđêan $\mathfrak{p} = (X, Y)$-nguyên sơ, nhưng $I \neq \mathfrak{p}^n$ với mọi n.*

Tuy vậy, ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1.8. *Nếu $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ là một iđêan cực đại của vành R thì I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ.*

Từ Mệnh đề 1.1.8, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 1.1.9. *Lũy thừa của một iđêan cực đại là một iđêan nguyên sơ.*

Mệnh đề 1.1.10. *Nếu $N_1, N_2, \ldots, N_k$ là các môđun con $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của một R-môđun M thì $N = \bigcap_{i=1}^{k} N_i$ cũng là một môđun con $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của M.*

Một loại môđun con liên hệ với môđun nguyên sơ, đó là môđun con bất khả quy, được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.1.11. Một môđun con thực sự N của M được gọi là *bất khả quy* nếu N không thể biểu diễn dưới dạng $N = N_1 \cap N_2$ với N_1 và N_2 là các môđun con của M chứa thực sự N.

Bổ đề 1.1.12. *Nếu N là một môđun con bất khả quy của một R-môđun Noether M thì N là một môđun con nguyên sơ.*

Định nghĩa 1.1.13. Cho N là một môđun con của R-môđun M. Một *phân tích nguyên sơ* của N là một biểu diễn N dưới dạng

$$N = \bigcap_{i=1}^{r} N_i \,(*)$$

trong đó, N_i là một môđun con $\mathfrak{p}_i$-nguyên sơ, $i = 1, 2, \ldots, r$. Phân tích nguyên sơ $(*)$ được gọi là *phân tích nguyên sơ thu gọn,* nếu các $\mathfrak{p}_i$ từng đôi một phân biệt và N không thể biểu diễn qua giao của một họ con thực sự của $\{N_1, N_2, \ldots, N_r\}$.

Chú ý 1.1.14. Nếu một môđun con N có một phân tích nguyên sơ, thì do Mệnh đề 1.1.10, ta có thể quy tất cả các thành phần cùng là $\mathfrak{p}$-nguyên sơ về chỉ một thành phần $\mathfrak{p}$-nguyên sơ. Cùng với việc loại bỏ tất cả các thành phần, mà khi bỏ chúng không ảnh hưởng đến giao, ta sẽ nhận được một phân tích nguyên sơ thu gọn của N.

Định lý 1.1.15. *Nếu N là một môđun con thực sự của một môđun Noether M thì N có phân tích nguyên sơ, và do đó có một phân tích nguyên sơ thu gọn.*

Nhận xét 1.1.16. *Phân tích nguyên sơ của một môđun nói chung là không duy nhất.*

Ví dụ 1.1.17. *Trong vành đa thức $R = K[X, Y]$ với K là một trường. Ta có $\mathfrak{p}_1 = (X), \mathfrak{p}_2 = (X, Y), \mathfrak{q} = (X^2, Y)$ là các iđêan nguyên sơ. Khi đó, iđêan $I = (X^2, XY)$ có hai cách phân tích nguyên sơ là:*

$$I = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2^2 = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}.$$

Định nghĩa 1.1.18. Cho M là R-môđun $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố của R. Ta nói rằng $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố liên kết của M nếu $\mathfrak{p}$ là linh hóa tử của một phần tử khác không $x \in M$, tức là $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x), 0 \neq x \in M$. Tập các iđêan nguyên tố liên kết của M kí hiệu là $\mathrm{Ass}_R(M)$, hoặc $\mathrm{Ass}(M)$ nếu R đã được chỉ rõ.

Mệnh đề 1.1.19. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ *nếu và chỉ nếu có đơn cấu R-mô đun từ $R/\mathfrak{p}$ tới M (hay tương đương $R/\mathfrak{p}$ đẳng cấu với một môđun con của M). Do đó nếu N là môđun con của M thì* $\mathrm{Ass}(N) \subseteq \mathrm{Ass}(M)$.

Mệnh đề 1.1.20. *Nếu $M = 0$ thì $\mathrm{Ass}(M) = \emptyset$. Điều ngược lại cũng đúng nếu R là vành Noether.*

Mệnh đề 1.1.21. *Với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ ta có* $\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

Định lý 1.1.22. $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p} \subseteq \mathrm{Z}(M)$ *dấu bằng xảy ra nếu R là vành Noether.*

Mệnh đề 1.1.23. *Nếu N là mođun con của M thì*

$$\mathrm{Ass}(N) \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(N) \cup \mathrm{Ass}(M/N).$$

Từ Mệnh đề trên ta có nhận xét : Cho $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ là dãy khớp, khi đó M' xem như môđun con của M và $M'' \cong M/M'$, từ đó ta có

$$\mathrm{Ass}(M') \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'').$$

Sau đây ta sẽ chỉ ra mối liên hệ giữa tập các iđêan nguyên tố liên kết và sự phân tích nguyên sơ.

Định lý 1.1.24. *Cho $M \neq 0$ là R-môđun hữu hạn sinh trên vành Noether R. Khi đó mọi môđun con thực sự của M có một phân tích nguyên sơ thu gọn. Đặc biệt môđun không có thể biểu diễn dạng:*

$$0 = \bigcap_{t=1}^{r} N_t,$$

N_t là $\mathfrak{p}_t$-nguyên sơ, $t = 1, ..., r$. Khi đó $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_r\}$ và do đó $\mathrm{Ass}(M)$ là một tập hữu hạn.

Định lý 1.1.25 (Định lý duy nhất thứ nhất)**.** *Cho M là môđun hữu hạn sinh trên vành Noether R. Nếu $N = \cap_{i=1}^{r} N_i$ là phân tích thu gọn của môđun con N, và N_i là $\mathfrak{p}_i$- nguyên sơ, $i = 1, ..., r$ thì $\mathfrak{p}_i$ xác định duy nhất bởi N (Khi M và R cố định).*

Hệ quả 1.1.26. *Cho M là môđun hữu hạn sinh trên vành Noether R, N là môđun con của M. Khi đó nếu N là $\mathfrak{p}$-nguyên sơ thì theo định lý trên ta có $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$. Giả sử ngược lại $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$. Vì M là môđun hữu hạn sinh trên vành Noether nên N có sự phân tích thu gọn $N = \cap_{i=1}^{r} N_i, N_i$ là $\mathfrak{p}_i$- nguyên sơ. Theo định lý trên ta có $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_r\}$. Từ đó và từ giả thiết $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$ ta có $r = 1$ và $N = N_1$ là $\mathfrak{p}$-nguyên sơ*

Định nghĩa 1.1.27. Cho $N = \cap_{i=1}^{r} N_i$ là phân tích nguyên sơ thu gọn với N_i là $\mathfrak{p}_i$-nguyên sơ, $i = 1, ..., r$, do đó $\{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_r\}$ xác định duy nhất và là $\mathrm{Ass}(M/N)$. Ta gọi N_i là thành phần cô lập (hoặc thu gọn) nếu $\mathfrak{p}_i$ là thu gọn (tức $\mathfrak{p}_i$ không chứa thực sự $\mathfrak{p}_j, j \neq i$). Các N_i còn lại được gọi là thành phần nhúng.

Ví dụ 1.1.28. *Xét vành $\mathbb{Z}$ các số nguyên ta có $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{p\mathbb{Z} | p$ là số nguyên tố$\}$. Còn tập các iđêan nguyên sơ là $\{0\} \cup \{p^n\mathbb{Z}, p$ là số nguyên tố, $n \in \mathbb{N}^*\}$. Xét iđêan $m\mathbb{Z}, m > 1$. Giả sử $m = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}, p_i$ là số nguyên tố, $\alpha_i \geq 1$, với mọi $i = 1, ..., r$ và $p_i \neq p_j, i \neq j$. Khi đó ta có phân tích nguyên sơ thu gọn của $m\mathbb{Z}$*

$$m\mathbb{Z} = p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \cap .... \cap p_r^{\alpha_r}\mathbb{Z},$$

trong đó $p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}$ là $p_i\mathbb{Z}$- nguyên sơ với mọi $i = 1, .., r$. Vậy

$$\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m) = \{p_1\mathbb{Z}, ..., p_r\mathbb{Z}\}.$$

Chú ý ta cũng có:
$p_i\mathbb{Z} = \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(p_1^{\alpha_1}...p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}.p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}....p_r^{\alpha_r} + m\mathbb{Z})$ và $p_1^{\alpha_1}...p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}.p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}....p_r^{\alpha_r} + m\mathbb{Z} \neq 0$ trong $Z/m\mathbb{Z}$.

Bổ đề 1.1.29. *Cho M là môđun hữu hạn sinh trên vành Noether R, N là môđun con $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của M và $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R)$. Nếu $\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{p}'$ thì $M_{\mathfrak{p}'} = N_{\mathfrak{p}'}$.*

Định lý 1.1.30 (Định lý duy nhất thứ 2)**.** *Cho M là môđun hữu hạn sinh trên vành Noether R. Giả sử $N = \cap_{i=1}^r N_i$ là phân tích nguyên sơ thu gọn của môđun con N và N_i là $\mathfrak{p}_i$-nguyên sơ, $i = 1, ..., r$. Nếu $\mathfrak{p}_i$ là thu gọn thì N_i xác định duy nhất bởi N, không phụ thuộc vào sự phân tích nguyên sơ của N (M và R cố định)*

Phần tiếp theo, ta luôn giả thiết R là vành Noether và M là R-môđun.

Định nghĩa 1.1.31. *Cho N là môđun con của M. Một phân tích bất khả quy của N được gọi là phân tích thu gọn nếu không bỏ được bất cứ thành phần bất khả quy nào trong phân tích đó.*

Định lý 1.1.32. *Cho N là môđun con của M. Khi đó số thành phần bất khả quy của một phân tích bất khả quy thu gọn của môđun con N là không đổi, tức là chỉ phụ thuộc vào N.*

Định nghĩa 1.1.33. *Cho N là môđun con của M. Số môđun con bất khả quy xuất hiện trong một phân tích thu gọn của môđun con N được gọi là chỉ số thu gọn của môđun con N và được kí hiệu là $n_R(N;M)$ hay ngắn gọn là $n(N)$.*

1.2 Lọc chiều và mô đun Cohen-Macaulay dãy

Cho R là một vành giao hoán Noether và $M(\neq (0))$ là một R-môđun hữu hạn sinh với chiều Krull hữu hạn, giả sử $d = \dim_R M$. Ta đặt

$$\operatorname{Assh}_R M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R M |\, \dim R/\mathfrak{p} = d\}.$$

Khi đó

$$\operatorname{Assh}_R M \subseteq \min_R M \subseteq \operatorname{Ass}_R M$$

Đặt $S = \big\{\dim_R L | L \text{ là một } R\text{-môđun con của } M, L \neq (0)\big\}$. Khi đó ta có

$$S(M) = \{\dim_R R/\mathfrak{p} \,|\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M\} < \infty.$$

Đặt $\ell = \sharp\mathcal{S}$. Giả sử $S = \{d_1, \ldots, d_\ell\}$ với $d_1 < d_2 < \ldots < d_\ell$ và đặt $d_0 = 0$. Với mỗi $d_i \in S$ tồn tại $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$ sao cho $\dim R/\mathfrak{p} = d_i$ và ta có $R/\mathfrak{p} \cong N$, N là R-môđun con của M nên M có các môđun con chiều $d_i, 1 \leq i \leq \ell$. Với mỗi $1 \leq i \leq \ell$, đặt

$$\sum = \{N' |\ N' \text{ là một môđun con của } M \text{ và } \dim N' \leq d_i\}.$$

Ta có $0 \in \sum$ nên $\sum \neq \emptyset$. Vì R là vành Noether nên $\sum$ có phần tử tối đại gọi là D_i. Giả sử $N \in \sum$ cũng là phần tử tối đại. Vì

$$\dim(N + D_i) \leq \dim(N \oplus D_i) \leq \max\{\dim N, \dim D_i\} \leq d_i,$$

nên $N + D_i \in \sum$. Vì D_i tối đại nên $N + D_i = D_i$, kéo theo $N \subseteq D_i$. Do đó D_i là phần tử lớn nhất theo quan hệ bao hàm. Vậy với mỗi $1 \leq i \leq \ell$, R-môđun M chứa một R-môđun con lớn nhất D_i với $\dim_R D_i = d_i$.

Định nghĩa 1.2.1. Cho R là vành Noether và M là R-môđun. Giả sử D_i là R-môđun con lớn nhất có chiều $\dim_R D_i = d_i$ với mỗi $1 \leq i \leq \ell$. Đặt $D_0 = (0)$, ta có lọc $\mathcal{D} = \{D_i\}_{0 \leq i \leq \ell}$

$$D_0 = (0) \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \ldots \subsetneq D_\ell = M$$

của các R-môđun con của M. Ta gọi đó là *lọc chiều* của M.

Khái niệm lọc chiều được đưa ra đầu tiên bởi R.P.Stanley cho vành phân bậc [18]. Tiếp theo P.Schenzel [17], N.T.Cường và L.T.Nhàn [10] tìm hiểu khái niệm lọc chiều cho vành địa phương. Sau đó S.Goto, Y.Horiuchi và H.Sakurai [11] định nghĩa cho vành giao hoán bất kì.

Dựa vào kết quả vừa nêu ta có lọc chiều luôn tồn tại và xác định duy nhất. Sau đây ta đưa ra mô tả chi tiết hơn về lọc chiều.

Mệnh đề 1.2.2. Giả sử R là vành Noether và M là R-môđun hữu hạn sinh, $0 = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)} N(\mathfrak{p})$ là phân tích nguyên sơ thu gọn của môđun con 0 của M thì

$$D_i = \bigcap_{\dim(R/\mathfrak{p}) \geqslant d_{i+1}} N(\mathfrak{p}) = H^0_{\mathfrak{a}_i}(M),$$

trong đó $d_i = \dim D_i, \mathfrak{a}_i = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R M, \dim R/\mathfrak{p} \leqslant d_i} P$. Trong trường hợp $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R M, \dim R/\mathfrak{p} \leqslant d_i\} = \emptyset$ ta đặt $\mathfrak{a}_i = R$.

Hơn nữa, giả sử N là môđun con của M và $\dim N < \dim M$, khi đó tồn tại một D_i trong lọc chiều $\mathcal{D}$ của M sao cho $N \subseteq D_i$ và $\dim N = \dim D_i$.

Chú ý 1.2.3. Nếu thêm giả thiết R là vành địa phương với iđêan tối đại $\mathfrak{m}$ thì ra có $H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là môđun con lớn nhất của M có chiều bằng 0 với điều kiện $H^0_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$. Thật vậy, có $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = \bigcup_{n \geqslant 0}(0 :_M \mathfrak{m}^n)$, do tính Noether của M nên tồn tại số tự nhiên n sao cho $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = (0 :_M \mathfrak{m}^n)$. Suy ra $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathrm{Ann}_R(\Gamma_{\mathfrak{m}}(M))$, suy ra $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(\Gamma_{\mathfrak{m}}(M))} = \mathfrak{m}$. Suy ra $\dim(\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)) = 0$. Giả sử N' là một môđun con của M có chiều bằng 0, ta có $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(N')} = \mathfrak{m}$. Do đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $\mathfrak{m}^k \subseteq \mathrm{Ann}_R N'$, suy ra $N' \subseteq (0 :_M \mathfrak{m}^k) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$. Như vậy $H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ là môđun con lớn nhất của M có chiều bằng 0.

Sau đây ta đưa thêm một số thông tin về lọc chiều. Trước hết ta có bổ đề sau.

Bổ đề 1.2.4. Cho R là vành Noether và cho M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Giả sử N là phần tử lớn nhất theo quan hệ bao hàm của M thỏa mãn $\dim N < d$. Đặt $G := M/N$ khi đó

(i) $\dim G = d$;

(ii) G không chứa một môđun con khác không nào có chiều nhỏ hơn n;

(iii) $\operatorname{Ass} G = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M \mid \ \dim R/\mathfrak{p} = d\}$;

(iv) Nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương thì $H^d_{\mathfrak{m}}(G) \cong H^d_{\mathfrak{m}}(M)$.

Mệnh đề 1.2.5. Cho R là vành Noether và M là R-môđun. Giả sử $0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_\ell = M$ (*) là lọc chiều của M với $\dim D_i = d_i$ và đặt $C_i = D_i/D_{i-1}$. Khi đó

(i) $\operatorname{Ass}_R D_i = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M \mid \dim R/\mathfrak{p} \leqslant d_i\}$.

(ii) $\operatorname{Ass}_R M/D_i = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M \mid \dim R/\mathfrak{p} > d_i\}$.

(iii) $\operatorname{Ass}_R C_i = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M \mid \dim R/\mathfrak{p} = d_i\}$.

(iv) $\dim C_i = d_i$ và C_i không có môđun con khác 0 có chiều nhỏ hơn d_i.

(v) Đặc biệt nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương thì $H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(D_i) \cong H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(C_i)$ và với mỗi $j \in \mathbb{Z}, H^j_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ khi và chỉ khi $j \in S(M)$. Ta có

$$H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(D_i) \cong H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(C_i) \cong H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(M).$$

Định lý 1.2.6. Cho $\mathcal{M} = \{M_i\}_{0 \leq i \leq t}\,(t > 0)$ là một họ các R-môđun con của M sao cho

(i) $M_0 = (0) \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \ldots \subsetneq M_t = M$ và

(ii) $\dim_R M_{i-1} < \dim_R M_i$ với mọi $1 \leq i \leq t$.

Giả sử rằng $\operatorname{Ass}_R M_i/M_{i-1} = \operatorname{Assh}_R M_i/M_{i-1}$ với mọi $1 \leq i \leq t$. Khi đó $t = \ell$ và $M_i = D_i$ với mỗi $1 \leq i \leq \ell$.

Định nghĩa 1.2.7. Cho R là vành Noether và $M \neq (0)$ là R-môđun hữu hạn sinh với $d = \dim_R M < \infty$ và

$$\mathcal{D} : D_0 := (0) \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \ldots \subsetneq D_\ell = M$$

là lọc chiều của M. Với mỗi $1 \leq i \leq \ell$ ta đặt $C_i = D_i/D_{i-1}$. Ta nói rằng M là *R-môđun Cohen-Macaulay dãy* nếu C_i là Cohen-Macaulay với mỗi $1 \leq i \leq \ell$. Lọc $\mathcal{D}$ được gọi là lọc Cohen-Macaulay.

Vành R được gọi là *vành Cohen-Macaulay dãy* nếu $\dim R < \infty$ và R là môđun Cohen-Macaulay dãy trên chính nó.

Nhận xét 1.2.8. Dựa vào Định lý 1.2.6 ta có lọc $M_0 = 0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_t = M$ là Cohen-Macaulay khi và chỉ khi M_i/M_{i-1} là Cohen-Macaulay với $i = 1, \ldots, t$ và

$$\dim M_1/M_0 < \dim M_2/M_1 < \ldots < \dim M_t/M_{t-1}.$$

Một số tác giả đã dùng tính chất này để định nghĩa cho môđun Cohen-Macaulay dãy [18].

Ví dụ 1.2.9. (i) M là môđun Cohen-Macaulay thì M là môđun Cohen-Macaulay dãy.

(ii) Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương với $d = \dim R$. Cho $N_i, i = 0, ..., d$ là một họ các $R-$môđun thoả mãn N_i là môđun Cohen-Macaulay chiều i. Khi đó $M = \bigoplus_{i=0}^{d} N_i$ là $R-$môđun Cohen-Macaulay dãy.

(iii) Mọi môđun chiều 1 là môđun Cohen-Macaulay dãy.

(iv) Ta xét vành địa phương $R = k[[X, Y, Z]]/[(X) \cap (Y, Z)]$ trong $k[[X, Y, Z]]$ là vành chuỗi lũy thừa hình thức trên trường k. Cho x, y, z tương ứng là ảnh của X, Y, Z trong R. Ta có R là một vành Cohen-Macaulay dãy chiều 2 với lọc chiều của R cho bởi

$$\mathcal{D} : D_0 = (0) \subsetneq D_1 = (x) \subsetneq D_2 = R$$

Chương 2

Iđêan hóa và ứng dụng

2.1 Iđêan hóa và một số tính chất

Trong toàn bộ chương này ta xét R là vành giao hoán và M là R-môđun. Khái niệm iđêan hóa được giới thiệu bởi M. Nagata (xem [16]) như sau:

Định nghĩa 2.1.1. Với $r_1, r_2 \in R$ và $m_1, m_2 \in M$ ta định nghĩa phép cộng và phép nhân

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1).$$

Khi đó, $R \times M$ với hai phép toán cộng và nhân ở trên là một vành được gọi là *iđêan hóa* của M trên R (hay còn gọi là mở rộng tầm thường của R bởi M) và được kí hiệu là $R \ltimes M$.

Trong chương này ta sẽ trình bày một số tính chất cơ bản của iđêan hóa.

Mệnh đề 2.1.2. *(i) Quy tắc $R \longrightarrow R \times M, r \mapsto (r, 0)$ là đơn cấu vành.*

(ii) Quy tắc $R \times M \longrightarrow R, (r, m) \mapsto r$ là toàn cấu vành.

(iii) Nếu N là một môđun con của M thì $0 \times N$ là iđêan của $R \times M$.

(iv) $0 \times N$ là iđêan lũy linh chỉ số 2.

(v) $(R \times M)/(0 \times M) \cong R$.

Chứng minh. (i), (ii), (iii) là hiển nhiên.

(iv) Với mọi $\alpha \in (0 \times M)^2$ ta có $\alpha = \sum_{i=1}^{n} (0, m_i)(0, m'_i) = (0, 0)$.

(v) theo (iii) $f : R \times M \longrightarrow R, (r, m) \mapsto r$ là toàn cấu và ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{(r, m) \mid f(r, m) = 0\} \\ &= \{(r, m) \mid r = 0\} \\ &= \{(0, m) \mid m \in M\} \\ &= 0 \times M. \end{aligned}$$

□

Định lý 2.1.3. *Cho I là iđêan của R, N là môđun con của M. Khi đó*

(i) $I \times N$ là iđêan của $R \ltimes M$ nếu và chỉ nếu $IM \subseteq N$.

(ii) $I \times N$ là iđêan thì M/N là R/I-môđun và

$$(R \ltimes M)/(I \times N) \cong (R/I) \ltimes (M/N).$$

Đặc biệt, $(R \ltimes M)/(0 \times N) \cong R \ltimes (M/N)$ và $(R \ltimes M)/(0 \times M) \cong R$. Do đó tất cả các iđêan của $R \ltimes M$ chứa $0 \times M$ đều có dạng $J \times M$, với J là iđêan nào đó của R.

Chứng minh. (i) Với mọi $\alpha \in IM$, ta có $\alpha = \{\sum_{i=1}^{n} a_i m_i | a_i \in I, m_i \in M\}$. Vì $(a_i, 0) \in I \times N, (0, m_i) \in R \ltimes M$ và $I \times N$ là iđêan của $R \ltimes M$ suy ra $(a_i, 0)(0, m_i) \in I \times N$ tức là $(0, a_i m_i) \in IN$. Vậy $a_i m_i \in N$. Kéo theo $\alpha \in N$. Vậy $IM \subseteq N$

Tồn tại $(0, 0) \in I \times N$ hay $I \times N \neq \emptyset$. Với mọi $(a, n) \in I \times N, (r, m) \in R \ltimes M$ ta có $(a, n)(r, m) = (ar, am + rn)$. Vì $a \in I, r \in R$ suy ra $ar \in I$, $a \in I$, $m \in M$ suy ra $am \in IM \subseteq N$ nên $am \in N$. Mặt khác ta có $r \in R$ và $n \in N$ suy ra $rn \in N$. Vậy $(a, n)(r, m) \in I \times N$ hay $I \times N$ là iđêan của $R \ltimes M$.

(ii) Chú ý nếu I là iđêan của A, mà $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$, thì M có cấu trúc là A/I- môđun hơn nữa mỗi tập con N của M là một R- môđun con của M khi và chỉ khi N là một R/I-môđun con của M. Ta lại có $I.M/N = 0$. Vậy M/N là R/I-môđun. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} f : R \ltimes M &\longrightarrow (R/I) \ltimes (M/N). \\ (r, m) &\longmapsto (r + I, m + N) \end{aligned}$$

Ta dễ dàng chứng minh được f là toàn cấu vành và

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \{(r,m) \mid (r+I, m+N) = (0,0)\}\\ &= \{(r,m) \mid r \in I, m \in N\} = I \times N.\end{aligned}$$

Theo định lý đồng cấu vành ta có điều cần chứng minh. □

Định lý sau là hệ quả của Định lý 2.1.3, mô tả các iđêan cực đại, iđêan nguyên tố, iđêan căn của $R \ltimes M$.

Định lý 2.1.4. *(i) Iđêan tối đại của $R \ltimes M$ có dạng $\mathfrak{m} \times M$ với $\mathfrak{m}$ là iđêan cực đại của R. Vì thế, $R \ltimes M$ là địa phương nếu và chỉ nếu R là địa phương. Đặc biệt, $R \ltimes M$ và R có cùng một trường thặng dư và căn Jacobson của $R \ltimes M$ là $J(R \ltimes M) = J(R) \times M$.*

(ii) Iđêan nguyên tố của $R \ltimes M$ có dạng $\mathfrak{p} \times M$ với $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố của R. Do đó, nếu $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố của R thì $\operatorname{ht}(\mathfrak{p} \times M) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ và $\dim(R \ltimes M) = \dim(R)$.

(iii) Iđêan căn của $R \ltimes M$ có dạng $I \times M$ với I là iđêan căn của R. Nếu J là iđêan của $R \ltimes M$ thì $\sqrt{J} = \sqrt{I} \times M$ với $I = \{r \in R \mid \exists b \in M, (r,b) \in J\}$ là iđêan của R. Đặc biệt, nếu I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$ thì, $\sqrt{I \times N} = \sqrt{I} \times M$, do đó căn lũy linh $\operatorname{Nil}(R \ltimes M) = \operatorname{Nil}(R) \times M$.

Chứng minh. Cho A là iđêan căn của $R \ltimes M$. Vì $(0 \times M)^2 = 0 \subseteq A$ nên $0 \times M \subseteq A$ (do A là iđêan căn). Theo Định lý 2.1.3, tồn tại iđêan $J \subseteq R$ sao cho $A = J \times M$ và ta cũng có

$$(R \ltimes M)/(J \times M) \cong R/J. \tag{2.1}$$

(i) Từ đẳng cấu (2.1), ta có J là iđêan căn (tương ứng là iđêan cực đại) của R nếu và chỉ nếu $J \times M$ cũng là iđêan căn (tương ứng là iđêan cực đại) của $R \ltimes M$. Vì thế, vành $R \ltimes M$ là tựa địa phương nếu và chỉ nếu R là tựa địa phương. Trường thặng dư của $(R, \mathfrak{m})$ là $R/\mathfrak{m}$, trường thặng dư của $(R \ltimes M, \mathfrak{m} \times M)$ là $(R \ltimes M)/(\mathfrak{m} \times M) \cong R/\mathfrak{m}$ theo 2.1 hay $R \ltimes M$ và R có cùng trường thặng dư. Ta có căn

Jacobson

$$\begin{aligned} J(R \ltimes M) &= \cap\{\mathfrak{m} \times M \mid \mathfrak{m} \times M \text{ là iđêan cực đại của } R \ltimes M\} \\ &= \cap\{\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \text{ là iđêan cực đại của } R\} \times M \\ &= J(R) \times M. \end{aligned}$$

(*ii*) Từ đẳng cấu (2.1) ở (*i*) ta có $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố của R nếu và chỉ nếu $\mathfrak{p} \times M$ là iđêan nguyên tố của $R \ltimes M$ hay các iđêan nguyên tố của $R \ltimes M$ có dạng $\mathfrak{p} \times M$ với $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố của R. Khi đó

$$\begin{aligned} \mathrm{ht}(\mathfrak{p} \times M) &= \sup\{n \mid \text{ tồn tại dãy } \mathfrak{p}_0 \times M \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n \times M = \mathfrak{p} \times M\} \\ &= \sup\{n \mid \text{ tồn tại dãy } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\} \times M \\ &= \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

với $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)$. Vì vậy

$$\begin{aligned} \dim(R \ltimes M) &= \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p} \times M) \mid \mathfrak{p} \times M \in \mathrm{Spec}(R \ltimes M)\} \\ &= \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\} = \dim(R). \end{aligned}$$

(*iii*) Từ đẳng cấu (2.1) ở (*i*) ta có mọi iđêan căn của $R \ltimes M$ có dạng $I \times M$ với I là iđêan căn của R.
Cho J là iđêan của $R \ltimes M$. Vì $\sqrt{J}$ là iđêan căn của $R \ltimes M$ nên theo chứng minh trên ta có $\sqrt{J} = K \times M$ với K là iđêan căn của R. Đặt $I = \{r \in R \mid \exists b \in M, (r, b) \in J\}$. Ta sẽ chứng minh $K \times M = \sqrt{I} \times M$. Thật vậy, dễ thấy I là iđêan của R (vì lấy $r \in R, r' \in I$ thì tồn tại $b \in M$ sao cho $(r', b) \in J$, suy ra $(r, 0)(r', b) = (rr', b) \in J$, từ đó ta có $rr' \in I$). Cho $x \in \sqrt{I}$, khi đó tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $x^n \in I$, suy ra tồn tại $b \in M$, để $(x^n, b) \in J$. Vì thế $(x^n, b) \in \sqrt{J} = K \times M$. Từ đó ta có $x^n \in K$. Vì K là iđêan căn của R nên $x \in K$. Do đó $\sqrt{I} \times M \subseteq K \times M = \sqrt{J}$. Ngược lại, cho $x \in K$. Khi đó $(x, 0) \in \sqrt{J}$, suy ra tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $(x^n, 0) \in J$. Do đó $x^n \in I$ theo định nghĩa tập I, suy ra $x \in \sqrt{I}$. Vì thế $K \times M \subseteq \sqrt{I} \times M$. Vậy $\sqrt{J} = K \times M = \sqrt{I} \times M$. Đặc biệt, nếu I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$ thì $\sqrt{I \times N} = \sqrt{I} \times M$.

Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Nil}(R \ltimes M) &= \cap\{\mathfrak{p} \times M \mid \mathfrak{p} \times M \in \mathrm{Spec}(R \ltimes M)\}\\ &= \cap\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\} \times M = \mathrm{Nil}(R) \times M.\end{aligned}$$

□

Nhắc lại rằng, R là vành *phân bậc* nếu $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$, là tổng trực tiếp của các nhóm Aben và $R_iR_j \subseteq R_{i+j}$, khi đó mỗi R_0 là một vành và R_i là R_0-môđun. Một R-môđun M là *phân bậc* nếu $M = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \dots$ và $R_iM_j \subseteq M_{i+j}$, do đó mỗi M_j là một R_0-môđun. Các phần tử của M_i được gọi là *thuần nhất* bậc i. Một môđun con N của M được gọi là *thuần nhất* nếu thỏa mãn một trong những điều kiện tương đương sau đây

(1) N sinh bởi các phần tử thuần nhất.

(2) Nếu $n_0 + n_1 + \dots + n_i \in N$, với n_j là thuần nhất bậc j thì $n_j \in N$.

(3) $N = \oplus_{n=0}^{\infty}(N \cap M_n)$.

Từ định nghĩa phân bậc trên và từ định nghĩa phép nhân trong $R \ltimes M$, ta có $R \ltimes M$ là vành phân bậc với $(R \ltimes M)_0 = R \oplus 0$, $(R \ltimes M)_1 = 0 \oplus M$, $(R \ltimes M)_n = 0$ với mọi $n \geq 2$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh một số kết quả có liên quan đến iđêan thuần nhất trong $R \ltimes M$. Nhắc lại rằng một vành R là vành *présimplifiable* nếu với $x, y \in R$ và $xy = x$ thì $x = 0$ hoặc y là phần tử khả nghịch. Dễ thấy rằng miền nguyên là vành *présimplifiable.* Nhắc lại rằng, một R-môđun M được gọi là *môđun chia được,* nếu với mọi phần tử không là ước của không $a \in R$ ta luôn có: $aM = \{ax | \forall x \in M\} = M$.

Định lý 2.1.5. *(i) Iđêan thuần nhất của $R \ltimes M$ có dạng $I \times N$ với I là iđêan của R, N là môđun con của M và $IM \subseteq N$. Vì thế, nếu J là iđêan thuần nhất của $R \ltimes M$ thì J có dạng $J = I \times N$, với*

$$I = \{r \in R \mid \exists b \in M, (r, b) \in J\} \text{ và}$$
$$N = \{m \in M \mid \exists s \in R, (s, m) \in J\}.$$

(ii) Cho $I \times N$ và $I' \times N'$ là hai iđêan thuần nhất của $R \ltimes M$. Khi đó

$$(I \times N) \cap (I' \times N') = (I \cap I') \times (N \cap N') \text{ và}$$
$$(I \times N)(I' \times N') = (II') \times (IN' + I'N).$$

Đặc biệt $(I \times N)^n = I^n \times I^{n-1}N$.

(iii) Với mỗi iđêan chính $\langle(a,b)\rangle$ của $R \ltimes M$, các điều kiện sau là tương đương.

(1) *$\langle(a,b)\rangle$ là thuần nhất,*
(2) *$\langle(a,b)\rangle = Ra \times (Rb + aM)$,*
(3) *$(a,0) \in \langle(a,b)\rangle$,*
(4) *Tồn tại $x \in R$ sao cho $xa = a$ và $xb \in aM$.*

Đặc biệt, nếu R là vành présimplifiable thì $\langle(a,b)\rangle$ là thuần nhất nếu và chỉ nếu $a = 0$ hoặc $b \in aM$.

(iv) Ta có các khẳng định sau

(1) *Mọi iđêan của $R \ltimes M$ là thuần nhất nếu và chỉ nếu mọi iđêan chính của $R \ltimes M$ là thuần nhất.*

(2) *Nếu R là présimplifiable thì mọi iđêan của $R \ltimes M$ là thuần nhất nếu và chỉ nếu $M = aM$, với mỗi phần tử khác không $a \in R$.*

(3) *Nếu R là miền nguyên thì mọi iđêan của $R \ltimes M$ là thuần nhất nếu và chỉ nếu M là chia được.*

(4) *Nếu R là présimplifiable nhưng không là miền nguyên thì mọi iđêan của $R \ltimes M$ là thuần nhất nếu và chỉ nếu $M = 0$.*

(v) Giả sử M là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó, mọi iđêan của $R \ltimes M$ là thuần nhất nếu và chỉ nếu với mọi phần tử khác không $a \in R$, tồn tại $x_a \in R$ sao cho $x_a a = a$ và $x_a M = aM$.

Chứng minh. (*i*) Cho J là iđêan thuần nhất của $R \ltimes M$. Khi đó ta có $J = J \cap (R \oplus 0) \oplus (J \cap (0 \oplus M)) = (J \cap R) \oplus (J \cap M)$, trong đó $J \cap R \subseteq R$ và $J \cap M$ là môđun con của M, có nghĩa là $J = I \times N$, trong đó I là iđêan của R và N là môđun con của M. Theo Định lý 2.1.3, $IM \subseteq N$. Ngược lại, theo cấu trúc phân bậc của vành $R \ltimes M$ ở trên, dễ kiểm tra $I \times N$, trong đó I là iđêan của R, N là môđun con của M và $IM \subseteq N$ là iđêan thuần nhất.

Cho J là iđêan thuần nhất. Theo chứng minh trên, $J = (J \cap R) \oplus (J \cap M)$. Đặt

$$I = \{r \in R \mid \exists m \in M, (r, b) \in J\} \text{ và } N = \{m \in M \mid \exists s \in R, (s, m) \in J\}.$$

Rõ rằng rằng $J \cap R = I$ và $J \cap M = N$. Vì thế, ta có $J = I \times N$.

(ii) Trước tiên ta chứng minh $(I \times N) \cap (I' \times N') = (I \cap I') \times (N \cap N')$. Thật vậy, lấy $x = (a, b) \in (I \times N) \cap (I' \times N')$. Khi đó, vì $x \in I \times N$ và $x \in I' \times N'$ nên ta có $a \in I \cap I', b \in N \cap N'$. Vậy $x \in (I \cap I') \times (N \cap N')$ hay $(I \times N) \cap (I' \times N') \subseteq (I \cap I') \times (N \cap N')$.

Ngược lại, lấy $y = (c, d) \in (I \cap I') \times (N \cap N')$. Khi đó $c \in I \cap I'$ và $d \in N \cap N'$. Vì vậy $y = (c, d) \in (I \times N) \cap (I' \times N')$ hay

$$(I \cap I') \times (N \cap N') \subseteq (I \times N) \cap (I' \times N').$$

Tiếp theo ta chứng minh $(I \times N)(I' \times N') = (II') \times (IN' + I'N)$. Lấy $(a, b) \in I \times N, (a', b') \in I' \times N'$. Khi đó

$$(a, b)(a', b') = (aa', ab' + a'b) \in (II') \times (IN' + I'N).$$

Vì vậy $(I \times N)(I' \times N') \subseteq II' \times (IN' + I'N)$. Ngược lại ta cũng dễ dàng chứng minh được $II' \times (IN' + I'N) \subseteq (I \times N)(I' \times N')$.
(iii) (1) $\Rightarrow$ (2). Trước tiên ta chứng minh, nếu $\langle (a, b) \rangle$ thuần nhất thì $\langle (a, b) \rangle = Ra \times (Rb + aM)$. Thật vậy, lấy phần tử $x \in \langle (a, b) \rangle$. Khi đó, tồn tại $(m, n) \in R \ltimes M$ sao cho

$$x = (m, n)(a, b) = (ma, mb + na) \in Ra \times (Rb + aM).$$

Vậy $\langle (a, b) \rangle \subseteq Ra \times (Rb + aM)$. Ngược lại lấy $y \in Ra \times (Rb + aM)$. Khi đó tồn tại $r \in R, m \in M$ sao cho $y = (ra, rb + am) = (r, m)(a, b)$ theo định nghĩa phép nhân. Vì vậy $y \in \langle (a, b) \rangle$ hay $Ra \times (Rb + aM) \subseteq \langle (a, b) \rangle$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Giả sử $\langle (a, b) \rangle = Ra \times (Rb + aM)$, ta cần chứng minh $\langle (a, b) \rangle$ thuần nhất. Thật vậy, đặt $I = Ra, N = Rb + aM$. Hiển nhiên: $I \subseteq R$ là iđêan chính của R sinh bởi a, $N \subseteq M$ là môđun con của M. Theo (i) ta cần chứng minh $IM \subseteq N$. Điều này dễ thấy vì $IM = (Ra)M \subseteq aM \subseteq N$. Vậy $\langle (a, b) \rangle$ thuần nhất.

(1) $\Leftrightarrow$ (3). Nếu $\langle(a,b)\rangle$ là thuần nhất thì hiển nhiên ta có $(a,0) \in \langle(a,b)\rangle$. Ngược lại, nếu $(a,0) \in \langle(a,b)\rangle$ thì $(0,b) \in \langle(a,b)\rangle$. Vì

$$(a,0) \in R \oplus 0 = (R \ltimes M)_0 \text{ và } (0,b) \in 0 \oplus M = (R \ltimes M)_1$$

tương ứng là các phần tử thuần nhất bậc 0 và bậc 1 trong vành $R \ltimes M$ nên $\langle(a,b)\rangle = \langle(a,0),(0,b)\rangle$ là iđêan sinh bởi các phần tử thuần nhất, vì thế theo định nghĩa nó là iđêan thuần nhất.

(3) $\Leftrightarrow$ (4). Ta có $(a,0) \in \langle(a,b)\rangle$ nếu và chỉ nếu tồn tại $(x,n) \in R \ltimes M$ sao cho $(x,n)(a,b) = (a,0)$, nếu và chỉ nếu $(xa, xb+na) = (a,0)$, nếu và chỉ nếu $xa = a$ và $xb = -an \in aM$.

Giả sử rằng R là *présimplifiable* (nghĩa là nếu $x, y \in R$ sao cho $xy = x$ thì hoặc $x = 0$ hoặc y khả nghịch). Ta cần chứng minh $\langle(a,b)\rangle$ thuần nhất nếu và chỉ nếu $a = 0$ hoặc $b \in aM$. Trường hợp $a = 0$ suy ra $\langle(0,b)\rangle$ thuần nhất, do đó ta chỉ cần lấy $x = 0$ và áp dụng điều kiện tương đương (1) $\Leftrightarrow$ (4). Trường hợp $a \neq 0$ và giả sử $xa = a, xb = -an$. Vì R là *présimplifiable* nên từ $xa = a$ suy ra x khả nghịch. Do đó $b = -ax^{-1}n \in aM$. Trong trường hợp này ta chỉ cần lấy $x = 1$ và áp dụng điều kiện tương đương (1) $\Leftrightarrow$ (4). (iv)

(1)($\Rightarrow$). Hiển nhiên.

($\Leftarrow$). Lấy $\langle(a,b)\rangle$ là iđêan chính bất kỳ của $R \ltimes M$. Theo điều kiện $(iii), (1) \Leftrightarrow (2)$ và điều kiện (i) ta có điều phải chứng minh.

(2) Theo ý (1) ở trên, ta chỉ cần chứng minh mọi iđêan chính của $R \ltimes M$ là thuần nhất. Thật vậy, vì R là vành *présimplifiable* và $0 \neq a \in R$ nên theo $(iii)(1) \Leftrightarrow (4)$, ta có ngay kết quả $M = aM$.

(3) Giả sử R là miền nguyên. Khi đó R là *présimplifiable* và từ điều kiện $aM = M$ với $0 \neq a \in R$ ta có M là chia được.

(4) Giả sử R là *présimplifiable* nhưng không là miền nguyên. Khi đó R có ước của không thực sự, nghĩa là $rs = 0$, với $r, s \neq 0$. Suy ra

$$0 = 0M = rsM = r(sM) = rM = M.$$

(v) Giả sử với mỗi $0 \neq a \in R$, tồn tại $x_a \in R$ sao cho $x_a a = a$ và $x_a M = aM$. Theo kết quả của $(iii), (4) \Leftrightarrow (1)$ suy ra mọi iđêan chính của $R \ltimes M$ đều thuần nhất. Điều này tương đương với mọi iđêan của $R \ltimes M$ đều thuần nhất theo $(iv)(1)$.

Giả sử M là hữu hạn sinh, nghĩa là $M = Rm_1 + Rm_2 + \ldots + Rm_n$ với $m_i \in M$. Lấy $0 \neq a \in R$, với mỗi $1 \leqslant i \leqslant n$, theo (iii) tồn tại x_i sao cho $x_i a = a$ và $x_i m_i \in aM$. Đặt $x_a = x_1 x_2 \ldots x_n$. Khi đó ta có $x_a a = a$ và $x_a m_i \in aM$ với mọi i. Từ đó suy ra $x_a M \subseteq aM = x_a aM$, vì vậy $x_a M = aM$. □

Hệ quả 2.1.6. *Cho R là một miền nguyên, M là R-môđun. Khi đó các điều kiện sau đây là tương đương:*

(i) Mọi iđêan của $R \ltimes M$ có thể so sánh được với $0 \times M$.

(ii) Mọi iđêan của $R \ltimes M$ có dạng $I \times M$ (hoặc $0 \times N$) với I là iđêan của R (hoặc N là môđun con của M).

(iii) Mọi iđêan của $R \ltimes M$ là thuần nhất.

(iv) M là chia được.

Chứng minh. $(i) \Rightarrow (ii)$. Vì R là miền nguyên nên mọi iđêan I của R đều chứa iđêan 0. Do đó các iđêan so sánh được với $0 \times M$ là $I \times M$ và $0 \times N$ (vì $I \times M \supseteq 0 \times M$ và $0 \times N \subseteq 0 \times M$).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Hiển nhiên mọi iđêan có dạng $I \times M$ và $0 \times N$ đều thuần nhất.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Theo kết quả (iv) của Định lý 2.1.5 ta có điều phải chứng minh.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Giả sử M là chia được. Lấy J là iđêan bất kỳ của $R \ltimes M$, ta cần chứng minh J so sánh được với $0 \times M$. Vì R là miền nguyên và M là chia được nên theo Định lý 2.1.5, J có dạng $I \times N$, trong đó I là iđêan của R, N là môđun con của M sao cho $IM \subseteq N$. Mặt khác, vì M là chia được nên ta có $M = IM \subseteq N$. Nếu $I = 0$ thì ta luôn có $J = 0 \times N \subseteq 0 \times M$. Vì thế ta giả sử $I \neq 0$, ta sẽ chứng minh $J = I \times N \supseteq 0 \times M$. Thật vậy, lấy $(a, b) \in J$ sao cho $a \neq 0$ và $m \in M$. Khi đó tồn tại $m' \in M$ sao cho $m = am'$ (do $M = IM$). Điều này suy ra $(0, m) = (a, b)(0, m') \in J$. Mà $(0, m) \in 0 \times M$. Do đó $J \supseteq 0 \times M$. □

Tiếp theo ta xét tập các ước của không của $R \times M$

Định lý 2.1.7. *Tập các ước của không $Z(R \ltimes M)$ của vành $R \ltimes M$ được xác định là $Z(R \ltimes M) = \{(r, m) \mid r \in Z(R) \cup Z(M), m \in$*

$M\}$. Khi đó, tập $S \times M$ với $S = R \setminus (Z(R) \cup Z(M))$ là tập hợp gồm các phần tử chính quy (không là ước của không) của $R \ltimes M$.

Chứng minh. Trước tiên ta sẽ chứng minh $Z(R \ltimes M) = (Z(R) \cup Z(M)) \times M$. Thật vậy, lấy tùy ý $(r, m) \in (Z(R) \cup Z(M)) \times M$ với $r \in Z(R) \cup Z(M)$. Nếu $r \in Z(R)$ thì tồn tại phần tử $0 \neq s \in R$ sao cho $rs = 0$ suy ra $(r, 0)(s, 0) = (0, 0)$. Vậy $(r, 0) \in Z(R \ltimes M)$. Nếu $r \in Z(M)$ thì tồn tại phần tử $0 \neq n \in M$ sao cho $rn = 0$ suy ra $(r, 0)(0, n) = (0, 0)$. Do đó $(r, 0) \in Z(R \ltimes M)$. Mặt khác, vì $Z(R \ltimes M)$ là hợp của các iđêan nguyên tố mà $\mathrm{Nil}(R \ltimes M)$ được chứa trong mỗi iđêan nguyên tố đó nên với mỗi $m \in M$, ta có $(0, m) \in \mathrm{Nil}(R \ltimes M)$. Do đó $(r, m) = (r, 0) + (0, m) \in Z(R \ltimes M)$ hay $(Z(M) \cup Z(M)) \times M \subseteq Z(R \ltimes M)$. Ngược lại, lấy tùy ý phần tử $(r, m) \in Z(R \ltimes M)$. Khi đó, tồn tại $(0, 0) \neq (s, n) \in R \ltimes M$ sao cho

$$(0, 0) = (r, m)(s, n) = (rs, rn + sm).$$

Nếu $s \neq 0$ thì do $rs = 0$ nên $r \in Z(R)$. Nếu $s = 0$ thì vì $n \neq 0$ và $rn = 0$ nên $r \in Z(M)$. Từ đó suy ra $r \in Z(R) \cup Z(M)$ hay

$$Z(R \ltimes M) \subseteq (Z(R) \cup Z(M)) \times M.$$

Khi đó, tập $S \times M$ với $S = R \setminus (Z(R) \cup Z(M))$ là tập hợp gồm các phần tử chính quy (không là ước của không) của $R \ltimes M$. □

Định lý sau đây sẽ cho ta cách xác định tập các phần tử khả nghịch của $R \ltimes M$.

Định lý 2.1.8. *Tập các phần tử khả nghịch của $R \ltimes M$, ký hiệu là $U(R \ltimes M)$, được xác định là $U(R \ltimes M) = U(R) \times M$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh $U(R \ltimes M) = U(R) \times M$. Thật vậy, lấy phần tử bất kỳ $(r, m) \in U(R \ltimes M)$. Khi đó, tồn tại $(s, n) \in R \ltimes M$ sao cho $(r, m)(s, n) = (1, 0)$. Mặt khác $(r, m)(s, n) = (rs, rn + sm)$. Từ đó suy ra $rs = 1$, do đó $r \in U(R)$ hay $(r, m) \in U(R) \times M$. Vậy $U(R \ltimes M) \subseteq U(R) \times M$. Ngược lại, lấy $r \in R$ là phần tử khả nghịch, khi đó tồn tại $s \in R$ sao cho $rs = 1$. Suy ra $(r, 0)(s, 0) = (1, 0)$ hay $(r, 0)$ là phần tử khả nghịch. Với mỗi $m \in M$, ta có $(0, m)$

là lũy linh (vì $(0,m)^2 = (0,m)(0,m) = (0,0)$). Do đó $(r,m) = (r,0) + (0,m)$ là khả nghịch, hay $(r,m) \in U(R \ltimes M)$. Vậy $U(R) \times M \subseteq U(R \ltimes M)$. □

2.2 Ứng dụng của iđêan hóa

Iđêan hóa là công cụ hữu hiệu mở rộng một số kết quả từ vành lên môđun. Ta trình bày hai ví dụ về việc mở rộng Bổ đề Artin-Rees và định lý giao Krull từ vành lên môđun trong mục này.

Chú ý kết quả sau cho ta thông tin về tính Noether của vành iđêan hóa.

Định lý 2.2.1. *Ta có $R \ltimes M$ là Noether (tương ứng là Artin) nếu và chỉ nếu R là Noether (tương ứng là Artin) và M là hữu hạn sinh.*

Chứng minh. Giả sử $R \ltimes M$ là Noether. Khi đó vì R là ảnh đồng cấu của $R \ltimes M$ nên R là Noether. Ta cần chứng minh M là hữu hạn sinh. Thật vậy, vì $R \ltimes M$ là Noether nên iđêan $0 \times M$ của $R \ltimes M$ là hữu hạn sinh. Ta có $(0,m_1),\dots,(0,m_n)$ sinh ra $0 \times M$ như là một iđêan nếu và chỉ nếu $m_1,\dots,m_n$ sinh ra M như là một R-môđun. Do đó M là R-môđun hữu hạn sinh. Nếu $R \ltimes M$ là Artin. Khi đó vì R là ảnh đồng cấu của $R \ltimes M$ nên R cũng là Artin. Do vành Artin là Noether nên ta có M là hữu hạn sinh.

Ngược lại, giả sử rằng R là Noether và M là hữu hạn sinh. Cho $\mathfrak{p} \times M$ là một iđêan nguyên tố bất kỳ của $R \ltimes M$. Vì R là Noether nên $\mathfrak{p}$ là hữu hạn sinh. Khi đó, do M là R-môđun hữu hạn sinh nên $\mathfrak{p} \times M$ là iđêan hữu hạn sinh của $R \ltimes M$. Vì mọi iđêan nguyên tố của $R \ltimes M$ đều là hữu hạn sinh nên $R \ltimes M$ là Noether. Giả sử R là Artin. Khi đó R là Noether và $\dim R = 0$. Vì M là hữu hạn sinh nên theo chứng minh trên ta có $R \ltimes M$ là Noether và theo Định lý 2.1.4 ta có $\dim R \ltimes M = \dim R = 0$. Do đó $R \ltimes M$ là Artin. □

Bổ đề 2.2.2. *Cho R là vành Noether, I, J, J' là các iđêan của R. Khi đó tồn tại một số tự nhiên r thỏa mãn:*

$$I^n J \cap J' = I^{n-r}(I^r J \cap J')$$

và mọi số tự nhiên $n > r$.

Chứng minh. Ta luôn có $I^nJ \cap J' \supseteq I^{n-r}(I^rJ \cap J')$.

Ngược lại, vì R là vành Noether nên tồn tại $a_1, ..., a_s \in R$ sao cho $I = \langle a_1, .., a_s \rangle$. Đặt S_n là tập các đa thức $f(x_1, ..., x_s) \in R[x_1, ..., x_s]$ thỏa mãn $f(x_1, ..., x_s)$ thuần nhất bậc n và $f(a_1, ..., a_s) \in I^nJ \cap J'$. Đặt $S = \cup S_n$ và $\mathfrak{a} = \langle S \rangle$ iđêan của $R\,[x_1, .., x_s]$ sinh bởi S. Theo Định lý Cơ sở Hilbert $R[X_1, .., X_s]$ là vành Noether nên $\mathfrak{a}$ là iđêan hữu hạn sinh. Giả sử $\mathfrak{a} = \langle g_1, .., g_t \rangle$, $g_i \in S$. Gọi $d_i = \deg(g_i)$ và đặt $r = \mathrm{Max}\{d_i\}$. Giả sử $n \geq r$. Với mọi $\alpha \in I^nJ \cap J'$ ta có $\alpha \in I^n$. Do đó $\alpha = f(a_1, .., a_n)$, với $f(x_1, ..., x_n)$ là đa thức thuần nhất bậc thuộc $R[X_1, ..., X_s]$. Ta có:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} (f_i(x_1, .., x_s) g_i(x_1, .., x_s)), h(x_1, .., x_s) \in S_n.$$

Bằng cách so sánh bậc, ta có thể giả sử h_i thuần nhất bậc $n - d_i$. Như vậy:

$$\begin{aligned} \alpha = f(a_1, ...a_s) &= \sum f_i(a_1, .., a_s) g_i(a_1, .., a_s) \\ &\in \sum I^{n-d_i}(I^{d_i}J \cap J') \\ &\subseteq I^{n-r}(I^rJ \cap J'). \end{aligned}$$

□

Định lý 2.2.3 (Bổ đề Artin-Rees)**.** *Cho M là môđun hữu hạn trên vành Noether R và cho N, N' là các R-môđun con của M. Giả sử I là iđêan của R. Khi đó tồn tại một số tự nhiên r thỏa mãn:*

$$I^nN \cap N' = I^{n-r}(I^rN \cap N')$$

với mọi số tự nhiên $n > r$.

Chứng minh. Xét vành iđêan hóa $R \ltimes M$. Ta có $R \ltimes M$ là vành Noether, $I \times M, 0 \times N, 0 \times N'$ là các iđêancủa $R \ltimes M$. Theo Bổ đề 2.2.2 ta có :

$$(I \times M)^n(0 \times N) \cap (0 \times N') = (I \times M)^{n-r}((I \times M)^r(0 \times N) \cap (0 \times N')).$$

Vì $(I \times M)^k = I^k \times I^{k-1}M$ nên đẳng thức trên tương đương với

$$
\begin{aligned}
&((I^n \times I^{n-1}M)(0 \times N)) \cap (0 \times N')\\
&\qquad = (I^{n-r} \times I^{n-r-1}M)((I \times M)^r(0 \times N) \cap (0 \times N')).\\
&\Leftrightarrow (0 \times I^nN) \cap (0 \times N') = (I^{n-r} \times I^{n-r-1}M)((0 \times I^nN) \cap (0 \times N'))\\
&\Leftrightarrow (0 \times I^nN \cap N') = (I^{n-r} \times I^{n-r-1}M)(0 \times I^nN \cap N')\\
&\Leftrightarrow (0 \times I^nN \cap N') = (0 \times I^{n-r}(I^nN \cap N')).
\end{aligned}
$$

So sánh ta thấy $I^nN \cap N' = I^{n-r}(I^nN \cap N')$. □

Nhận xét 2.2.4. *Từ bổ đề Artin-Rees ta có thể chứng minh được định lý Krull tuy nhiên ở đây đề tài đưa ra chứng minh định lý giao Krull cho môđun bằng cách trực tiếp và ứng dụng công cụ iđêan hóa*

Định lý 2.2.5. *Cho I là iđêan trong vành Noether R. Khi đó tồn tại a thuộc I sao cho $(1+a)(\bigcap I^n) = 0$.*

Chứng minh. Đặt $J = \bigcap I^n$. Trước hết ta chứng minh $IJ = J$. Ta có $IJ \subseteq J$. Vì R là vành Noether nên $I = (a_1, .., a_s)$. Với mọi $\alpha \in J$, ta có $\alpha \in I^n$, với mọi n. Vì $\alpha \in I^n$ nên $\alpha = f_n(a_1, ..., a_s)$, với $f_n(x_1, .., x_s) \in R[X_1, .., X_s]$ là đa thức thuần nhất bậc n . Đặt $U = \langle f_i(x_1, .., x_s) | \forall i \rangle$ là iđêan của R sinh bởi các f_i, với mọi i. Vì $R[X_1, .., X_s]$ là vành Noether nên tồn tại $f_1, ..., f_N$ sao cho $U = \langle f_1, .., f_N \rangle$. Ta có $\alpha = f_{N+1}(a_1, .., a_s)$. Ta lại có

$$f_{N+1} = f_1g_1 + ... + f_Ng_N,$$

trong đó g_i là đa thức thuần nhất bậc $N - i + 1 > 0$.
Do đó $\alpha = f_{N+1}(a_1, ..., a_s) = \sum f_i(a_1, .., a_s)g_i(a_1, .., a_s) \in \alpha I \subseteq IJ$.
Vậy $IJ = J$. Theo Bổ đề Nakayama ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 2.2.6 (Định lý giao Krull)**.** *Cho I là iđêan trong vành Noether R và M là R- môđun hữu hạn sinh. Khi đó tồn tại $a \in I$ sao cho*

$$(1+a)\bigcap_{n \geq 0} I^nM = 0.$$

Chứng minh. Xét vành $R \ltimes M$ và iđêan $I \times M$. Ta có $I \times M$ là iđêan của $R \ltimes M$ theo Bổ đề 2.1.3. Theo Bổ đề 2.2.1 $R \ltimes M$ là vành Noether. Từ đó theo Bổ đề 2.2.5 và Bổ đề 2.1.5 tồn tại $(a, m) \in I \times M$ sao cho:

$$\begin{aligned} 0 &= ((1,0) + (a,m))\,(\bigcap_{n\geq 0}(I \times M)^{n+1}) \\ &= ((1,0) + (a,m))\,(\bigcap_{n\geq 0}(I^{n+1}, I^n M)) \\ &= ((1,0) + (a,m))\,(\bigcap_{n\geq 0} I^{n+1}, \bigcap_{n\geq 0} I^n M). \end{aligned}$$

Với mọi $b \in \cap_{n\geq 0} I^n M$. Ta có $(0, b)(\bigcap\limits_{n\geq 0} I^{n+1}, \bigcap\limits_{n\geq 0} I^n M)$. Do đó

$$(1 + a, m)(0, b) = (0, 0).$$

Kéo theo $(1 + a)b = 0$. Vậy $(1 + a)(\bigcap_{n\geq 0} I^n M) = 0$. □

Hệ quả 2.2.7. *Cho I là iđêan trong vành Noether R, I nằm trong căn Jacobson của R. Cho M là R- môđun hữu hạn sinh. Khi đó*

$$\bigcap_{n\geq 0} IM = 0.$$

Chứng minh. Theo Định lý 2.2.6 tồn tại $a \in I$ sao cho

$$(1 + a) \bigcap_{n\geq 0} I^n M = 0.$$

Vì I nằm trong căn *Jacobson* nên $1 + a$ khả nghich. Từ đó suy ra $\bigcap_{n\geq 0} I^n M = 0$. □

Chương 3

Phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy và môđun Cohen-Macaulay dãy

3.1 Phân tích nguyên sơ và lọc chiều

Nagata [16, page 24] đã chỉ ra rằng nếu N môđun con $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của M thì $\mathrm{Ann}_R(M/N) \times M$ là $\mathfrak{p} \times M$-nguyên sơ. Ta đã tổng quát kết quả này và đưa ra phân loại iđêan nguyên sơ thuần nhất của vành $R \ltimes M$ như sau

Định lý 3.1.1. *Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M. Khi đó $I \times N$ là iđêan nguyên sơ nếu và chỉ nếu thỏa mãn một trong hai điều kiện sau*

(i) $N = M$ và I là iđêan nguyên sơ của R.

(ii) $N \subsetneq M$, $IM \subseteq N$ và I, N là các $\mathfrak{p}$-nguyên sơ với $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$.

Trong cả hai trường hợp, $I \times N$ là $\sqrt{I} \times M$-nguyên sơ.

Chứng minh. (i) Giả sử rằng $N = M$. Từ đẳng cấu (2.1) của Định lý 2.1.4, $I \times M$ là nguyên sơ nếu và chỉ nếu I là nguyên sơ. Do đó ta có $I \times N$ là nguyên sơ của $R \ltimes M$ nếu và chỉ nếu $N = M$ và I là iđêan nguyên sơ của R.

(ii) Giả sử rằng $N \subsetneq M$ và $I \times N$ là iđêan của $R \ltimes M$. Khi đó, ta có $IM \subseteq N$. Bằng cách chuyển qua vành thương $(R \ltimes M)/(I \times N)$, ta có thể giả thiết rằng $I = 0$ và $N = 0$. Do đó ta chỉ cần chứng minh 0×0 là iđêan nguyên sơ của $R \ltimes M$ nếu và chỉ nếu 0 là iđêan $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của R và 0 cũng là môđun con $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của M với $\mathfrak{p} = \sqrt{0}$. Ta có 0×0 là nguyên sơ nếu và chỉ nếu $Z(R \ltimes M) = \mathrm{Nil}(R \ltimes M)$, theo Định lý 2.1.7, điều này tương đương với $(Z(R) \cup Z(M)) \oplus M = \sqrt{0} \times M$ hay $Z(R) \cup Z(M) = \sqrt{0}$. Vì $\sqrt{0}$ là giao của tất cả các iđêan nguyên tố của R, hơn nữa $Z(R)$ và $Z(M)$ đều là hợp của các iđêan nguyên tố của R nên ta có $Z(R) \cup Z(M) = \sqrt{0}$ nếu và chỉ nếu $Z(R) = Z(M) = \sqrt{0} = \mathfrak{p}$. Do đó 0 là iđêan $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của R và 0 cũng là môđun con $\mathfrak{p}$-nguyên sơ của M.

Theo Định lý 2.1.4,(iii), trong cả hai trường hợp ta đều có

$$\sqrt{I \times N} = \sqrt{I} \times M$$

hay $I \times N$ là $\sqrt{I} \times M$-nguyên sơ. □

Mục này trình bày kết quả mới. Trong suốt mục này ta giả sử R là một vành Noether và M là R-môđun hữu hạn sinh. Giả sử I là iđêan của R và N là môđun con M. Nhắc lại một phân tích nguyên sơ $N = N_1 \cap \cdots \cap N_t$ của N là thu gọn nếu

(i) các iđêan nguyên tố $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/N_1)}$, ..., $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/N_t)}$ phân biệt và

(ii) với mọi $j = 1, ..., t$, $N \neq \bigcap_{i \neq j} N_i$.

Trong trường hợp iđêan, phân tích nguyên sơ $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$ của I là thu gọn nếu $\sqrt{Q_1}, ..., \sqrt{Q_s}$ phân biệt và $I \neq \bigcap_{i \neq j} Q_i$ với mọi $j \in \{1, ..., n\}$.

Ta có phân tích nguyên sơ thu gọn nếu tồn tại phân tích nguyên sơ. Hơn nưa, nếu R là Noether và M là R-môđun hữu hạn sinh thì tồn tại phân tích nguyên sơ thu gọn của I và của N.

Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$. Bổ đề sau là kết quả mới cho ta phân tích nguyên sơ thu gọn của I và N. Đây là công cụ hữu hiệu để mô tả phân tích nguyên sơ của $I \times N$.

Bổ đề 3.1.2. *Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$. Giả sử $\mathrm{Ass}(R/I) = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_s\}$, $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{q}_1, ..., \mathfrak{q}_t\}$, $\mathrm{Ass}(R/I) \cap \mathrm{Ass}(M/N) \neq \emptyset$, và $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i, i = 1, ..., r$, $1 \leq r \leq \min\{s, t\}$. Khi đó tồn tại phân tích nguyên sơ thu gọn của I và N*

$$I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i; N = \bigcap_{i=1}^{t} N_i$$

thỏa mãn $Q_iM \subseteq N_i$*, với mọi* $i = 1, ..., r$.

Chứng minh. Giả sử

$$I = \bigcap_{i=1}^{s} Q'_i; N = \bigcap_{i=1}^{t} N'_i$$

là phân tích thu gọn của I và N. Vì $\mathfrak{p}_1 = \sqrt{\mathrm{Ann}(M/N'_1)}$, $N + \mathfrak{p}_1^n M \subseteq N'_1$ khi n đủ lớn. Đặt $N_1 = (N + \mathfrak{p}_1^n M)_{\mathfrak{p}_1} \cap M$ với n đủ lớn. Ta có $N \subseteq N_1 \subseteq N'_1$ và N_1 là môđun con $\mathfrak{p}_1$-nguyên sơ M. Vì $N = \bigcap_{i=1}^t N'_i \supseteq N_1 \bigcap (\bigcap_{i=2}^t N'_i) \supseteq N$ nên

$$N = N_1 \bigcap \left(\bigcap_{i=2}^{t} N'_i \right)$$

là phân tích nguyên sơ thu gọn của N. Đặt $Q_1 = (I + \mathfrak{p}_1^n) R_{\mathfrak{p}_1} \cap R$. Tương tự như trên ta phân tích nguyên sơ thu gọn của I

$$I = Q_1 \bigcap \left(\bigcap_{i=2}^{t} Q'_i \right).$$

Dễ kiểm tra được $Q_1M \subseteq N_1$. Tiếp tục sau r bước và đặt $N_i = N'_i, i = r+1, ..., t$, $Q_i = Q'_i, i = r+1, ..., s$ ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 3.1.3. *Cho* I *là một iđêan của* R *và* N *là môđun con của* M *thỏa mãn* $IM \subseteq N$*. Đặt* $\Lambda_1 = \{i | \, \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}(R/I) \cap \mathrm{Ass}(M/N)\}$, $\Lambda_2 = \{i | \, \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}(R/I) \setminus \mathrm{Ass}(M/N)\}$*, và*

$$\Lambda_3 = \{i | \, \mathfrak{q}_i \in \mathrm{Ass}(M/N) \setminus \mathrm{Ass}(R/I)\}.$$

Giả sử

$$I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i, N = \bigcap_{i=1}^{t} N_i$$

là phân tích nguyên sơ của I *và* N *thỏa mãn* $Q_iM \subseteq N_i$ *với mọi* $i \in \Lambda_1$*. Khi đó*

$$I \times N = \bigcap_{i \in \Lambda_1} (Q_i \times N_i) \bigcap_{i \in \Lambda_2} (Q_i \times M) \bigcap_{i \in \Lambda_3} (\mathrm{Ann}(M/N_i) \times N_i)$$

là phân tích nguyên sơ của $I \times N$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.2.1 ta có $Q_i \times N_i$ là $\mathfrak{p}_i \times M$-nguyên sơ nếu $i \in \Lambda_1$, $Q_j \times M$ là $\mathfrak{p}_j \times M$-nguyên sơ nếu $j \in \Lambda_2$, và $\mathrm{Ann}_R(M/N_k) \times N_k$ là $\mathfrak{p}_k \times M$-nguyên sơ nếu $k \in \Lambda_3$.Vì $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ phân biệt từng đôi nên các tập $\{\mathfrak{p}_i \ltimes M \mid i \in \Lambda_1\}$, $\{\mathfrak{p}_j \ltimes M \mid j \in \Lambda_2\}$, $\{\mathfrak{p}_k \ltimes M \mid k \in \Lambda_3\}$ cũng phân biệt từng đôi. Ta có $I \subseteq Q_i$ với mọi $i \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. Theo giả thiết $Q_i M \subseteq N_i$ với mọi $i \in \Lambda_3$. Khi đó $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(M/N_i)$ với mọi $i \in \Lambda_3$. Mặt khác $N \subseteq N_i$ với mọi $i \in \Lambda_1 \cup \Lambda_3$ và $N \subseteq M$. Điều này kéo theo

$$I \times N \subseteq \bigcap_{i\in\Lambda_1}(Q_i \times N_i) \bigcap_{i\in\Lambda_2}(Q_i \times M) \bigcap_{i\in\Lambda_3}(\mathrm{Ann}(M/N_i) \times N_i).$$

Ngược lại giả sử $(a, x) \in \bigcap_{i\in\Lambda_1}(Q_i \times N_i) \bigcap_{i\in\Lambda_2}(Q_i \times M) \bigcap_{i\in\Lambda_3}(\mathrm{Ann}(M/N_i) \times N_i)$. Khi đó

$$a \in \bigcap_{i\in\Lambda_1\cup\Lambda_2} Q_i \bigcap_{i\in\Lambda_3} \mathrm{Ann}_R(M/N_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{s} Q_i = I.$$

Mặt khác

$$x \in \bigcap_{i\in\Lambda_1\cup\Lambda_3} N_i \bigcap M = \bigcap_{i=1}^{t} N_i = N.$$

Điều này chứng tỏ $(a, x) \in I \times N$. Dễ thấy phân tích trên của $I \times N$ là thu gọn. $\square$

Kết quả sau mô tả các iđêan nguyên tố liên kết của $R \ltimes M$. Ta ký hiệu $\mathrm{Assh}(L) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(L) \mid \dim R/\mathfrak{p} = \dim L\}$ với mọi R-môđun L.

Hệ quả 3.1.4. *Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$. Khi đó $\mathrm{Ass}(R \ltimes M) = \{\mathfrak{p} \times M \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R) \cup \mathrm{Ass}(M)\}$, và $\mathrm{Assh}(R \ltimes M) = \{\mathfrak{p} \times M \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Assh}(R)\}$.*

Chứng minh. Đặt $\Lambda_1 = \{i \mid \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}(R) \cap \mathrm{Ass}(M)\}$,

$$\Lambda_2 = \{i \mid \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}(R) \setminus \mathrm{Ass}(M)\},$$

$$\Lambda_3 = \{i |\, \mathfrak{q}_i \in \operatorname{Ass}(M) \setminus \operatorname{Ass}(R)\}.$$

Theo Bổ đề 3.1.2, ta có thể giả sử

$$0_R = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i; 0_M = \bigcap_{i=1}^{t} N_i$$

là phân tích nguyên sơ thu gọn của I và N thỏa mãn $Q_iM \subseteq N_i$ với mọi $i \in \Lambda_1$. Khi đó theo Định lý 3.1.3, ta có

$$0_{R\ltimes M} = \bigcap_{i\in\Lambda_1}(Q_i \times N_i) \bigcap_{i\in\Lambda_2}(Q_i \times M) \bigcap_{i\in\Lambda_3}(\operatorname{Ann}(M/N_i) \times N_i)$$

là phân tích thu gọn của $0_{R\ltimes M}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Giả sử L là R-môđun. Ta ký hiệu $U_0(L)$ là môđun con lớn nhất của L có chiều nhỏ hơn $\dim L$. Ta có

$$U_0(L) = \cap_{\mathfrak{p}_i\in \operatorname{Assh}(L)} I(\mathfrak{p}_i),$$

trong đó $0 = \cap I(\mathfrak{p}_i)$ là phân tích nguyên sơ tối tiểu của môđun con 0 trong L. Ta có thể tính $U_0(R \ltimes M)$ theo $U_0(R)$ và $U_0(M)$ như sau.

Hệ quả 3.1.5. *Nếu* $\dim M = \dim R$ *thì* $U_0(R \ltimes M) = U_0(R) \times U_0(M)$. *Nếu* $\dim M < \dim R$ *thì* $U_0(R \ltimes M) = U_0(R) \times M$.

Chứng minh. Với các ký hiệu như trong chứng minh Hệ quả 3.1.4, đặt $\Lambda_1' = \{i \in \Lambda_1 |\, \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Assh}(R) \cap \operatorname{Assh}(M)\}$, $\Lambda_2' = \{i \in \Lambda_2 |\, \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Assh}(R)\}$, $\Lambda_3' = \{i \in \Lambda_3 |\, \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Assh}(M)\}$. Khi đó

$$U_0(R \ltimes M) = \bigcap_{i\in\Lambda_1'}(Q_i \times N_i) \bigcap_{i\in\Lambda_2'}(Q_i \times M) \bigcap_{i\in\Lambda_3'}(\operatorname{Ann}(M/N_i) \times N_i).$$

Dễ thấy đó là $U_0(R) \times U_0(M)$.

Nếu $\dim M < \dim R$ thì $\operatorname{Assh}(R) \cap \operatorname{Assh}(M) = \emptyset$. Từ đó suy ra $\operatorname{Assh}(R \ltimes M) = \{\mathfrak{p}_i \times M | i \in \Lambda_2\}$ và $\operatorname{Assh}(R) = \{\mathfrak{p}_i\, | i \in \Lambda_2\}$. Khi đó

$$U_0(R \ltimes M) = (\bigcap_{i\in\Lambda_2} Q_i) \times M = U_0(R) \times M.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Kết quả trên là cơ sở để nghiên cứu lọc chiều của môđun. Lọc chiều là công cụ hữu hiệu trong việc nghiên cứu một số lớp môđun là mở rộng của môđun Cohen-Macaulay: môđun Cohen-Macaulay dãy, môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy (xem[10], [15]). Kế quả sau đưa ra mô tả lọc chiều của iđêan hóa của M.

Mệnh đề 3.1.6. *Giả sử $\{R_i\}_{i=0,...,d}$ và $\{M_i\}_{i=0,...,s}$ là lọc chiều của R và M tương ứng. Đặt $S = R \ltimes M, S_i = R_i \times M_i$ với $i = 0, ..., s$ và $S_i = R_i \times M$ với $i = s+1, ..., d$. Khi đó $\{S_i\}_{i=0,...,d}$ là lọc chiều của $R \ltimes M$.*

Chứng minh. Với các ký hiệu như trong chứng minh Hệ quả 3.1.4, đặt $\Lambda_i^k = \{i \in \Lambda_i \mid \dim R \ltimes M/\mathfrak{p}_i \times M > k\}$, $i = 1, 2, 3$. Theo [4, Theorem 3.1] và [4, Theorem 3.2], $(R \ltimes M)/(Q_i \times N_i) \cong (R/Q_i) \times (M/N_i)$ và $\dim(R \ltimes M)/(Q_i \times N_i) = \dim R/Q_i = \dim M/N_i$ với mọi $i \in \Lambda_1$; $(R \ltimes M)/(Q_i \times M) \cong (R/Q_i) \times M$ và $\dim R \ltimes M/Q_i \times M = \dim R/Q_i$, với mọi $i \in \Lambda_2$; $(R \ltimes M)/(\operatorname{Ann}_R(M/N_i) \times N_i) \cong (R/\operatorname{Ann}_R(M/N_i)) \times M/N_i$ và $\dim(R \ltimes M)/(\operatorname{Ann}_R(M/N_i) \times N_i) = \dim R/\operatorname{Ann}_R(M/N_i) = \dim M/N_i$ với mọi $i \in \Lambda_3$. Vì vậy ta có

$$S_k = \bigcap_{i \in \Lambda_2^k} (Q_i \times M) = (\bigcap_{\dim R/\mathfrak{p}_i > k} Q_i) \times M = R_k \times M$$

nếu $k = s+1, ..., d$ và

$$\begin{aligned} S_k &= \bigcap_{i \in \Lambda_1^k} (Q_i \times N_i) \bigcap_{i \in \Lambda_2^k} (Q_i \times M) \bigcap_{i \in \Lambda_3^k} (\operatorname{Ann}_R(M/N_i) \times N_i) \\ &= (\bigcap_{\dim R/\mathfrak{p}_i > k} Q_i) \times (\bigcap_{\dim R/\mathfrak{p}_i > k} N_i) = R_i \times M_i \end{aligned}$$

nếu $k = 0, ..., s$. □

3.2 Phân tích bất khả quy

Định lý trong mục này cho ta phân tích bất khả quy của iđêan thuần nhất trong vành iđêan hóa.

Bổ đề 3.2.1. *Cho R là vành giao hoán, M là R-môđun. Cho I là một iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$. Khi đó $I \times N$ bất khả quy nếu và chỉ nếu*

(i) $N = M$ và I là iđêan bất khả quy của R hoặc

(ii) $N \subsetneq M$, $I = \mathrm{Ann}_R(M/N)$, và N là bất khả quy.

Chứng minh. (i) Mọi iđêan của $R \ltimes M$ chứa $I \times M$ có dạng $J \times M$ với $I \subseteq J$ nên ta có điều phải chứng minh.

(ii) Đã được chứng minh trong [2, Proposition 4.4]. $\square$

Định lý 3.2.2. *Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subsetneq N$. Giả sử*

$$I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i; N = \bigcap_{i=1}^{t} N_i$$

là phân tích bất khả quy của I và N. Khi đó

$$I \times N = \left[\bigcap_{i=1}^{s}(Q_i \times M)\right] \bigcap_{i=1}^{t}(\mathrm{Ann}(M/N_i) \times N_i)$$

là phân tích bất khả quy của $I \times N$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.2.1 ta có $Q_i \times M$, $i = 1, ..., s$ và $\mathrm{Ann}(M/N_i) \times N_i$, $i = 1, ..., t$ là bất khả quy. Đẳng thức là hiển nhiên nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

Cho L là môđun con của M. Ta đã biết rằng L có phân tích bất khả quy và số các thành phần xuất hiện trong phân tích bất khả quy thu gọn của L không phụ thuộc vào phân tích bất khả quy. Số này được gọi là *chỉ số bất khả quy* của L và được ký hiệu$n(L)$ [12]. Từ Định lý 3.2.2 ta có.

Hệ quả 3.2.3. $n(0_{R \ltimes M}) = n(0_R) + n(0_M)$.

3.3 Tập iđêan nguyên tố liên kết và lọc chiều

Tập iđêan nguyên tố liên kết của môđun là khái niệm nền tảng của Đại số giao hoán. Tập iđêan nguyên tố liên kết của R-môđun M được ký hiệu $\operatorname{Ass}_R(M)$ và định nghĩa là

$$\operatorname{Ass}_R M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid {}^{\exists} 0 \neq x \in R, \mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(x)\}.$$

Tập iđêan nguyên tố liên kết của vành iđêan hóa được mô tả như sau. Lưu ý kết quả này đã được tiếp cận cách khác thông qua phân tích nguyên sơ trong [3] và được trình bày trong mục 3.2.

Định lý 3.3.1. *Cho I là iđêan của R và N là môđun con của M thỏa mãn $IM \subseteq N$. Khi đó*

$$\operatorname{Ass}_{R\ltimes M}(I \ltimes N) = \{\mathfrak{p} \times M \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R I \cup \operatorname{Ass}_R N\}.$$

Đặc biệt,

$$\operatorname{Ass}_{R\ltimes M}(R \ltimes M) = \{\mathfrak{p} \times M \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R R \cup \operatorname{Ass}_R M\}.$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.1.4, các iđêan nguyên tố của $R \ltimes M$ có dạng $\mathfrak{p} \times M$. Giả sử $\mathfrak{p} \times M \in \operatorname{Ass}_{R\ltimes M}(I \times N)$. Khi đó $\mathfrak{p} \ltimes M = \operatorname{Ann}_{R\ltimes M}(a, n)$, với $a \in I, n \in N$. Lấy $r \in \mathfrak{p}$ ta có $(r, 0) \in \mathfrak{p} \times M$. Do đó $(0, 0) = (r, 0)(a, n) = (ra, rn)$. Điều này kéo theo $r \in \operatorname{Ann}_R(a) \cap \operatorname{Ann}_R(n)$. Vậy $\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Ann}_R(a) \cap \operatorname{Ann}_R(n)$. Lấy $r \in \operatorname{Ann}_R(a) \cap \operatorname{Ann}_R(n)$. Khi đó $0 = ra = rn$. Ta có $(r, 0)(a, n) = (0, 0)$. Do đó $(r, 0) \in \mathfrak{p} \times M$. Điều này kéo theo $r \in \mathfrak{p}$. Suy ra $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(a) \cap \operatorname{Ann}_R(n)$. Vì vậy $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(a)$ hoặc $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(n)$. Suy ra $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(R) \cup \operatorname{Ass}_R(M)$. Vậy

$$\operatorname{Ass}_{R\ltimes M}(I \ltimes N) \subseteq \{\mathfrak{p} \times M \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R I \cup \operatorname{Ass}_R N\}.$$

Lấy $\mathfrak{p} \times M$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(I) \cup \operatorname{Ass}_R(N)$. Giả sử $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(N)$. Khi đó $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(n)$, với $0 \neq n \in N$. Suy ra $(0, 0) \neq (0, n)$. Lấy $(r, m) \in \mathfrak{p} \times M$. Ta có $(r, m)(0, n) = (0, rn) = (0, 0)$. Suy ra $(r, m) \in \operatorname{Ann}_{R\ltimes M}(0, n)$. Ngược lại lấy $(r, m) \in \operatorname{Ann}_R(0, n)$. Kéo theo $rn = 0$. Suy ra $r \in \operatorname{Ann}_R(n)$. Vì vậy $(r, n) \in \mathfrak{p} \times M$ và $\mathfrak{p} \times M = \operatorname{Ann}_R(0, n)$. Do đó $\mathfrak{p} \times M \in \operatorname{Ass}_{R\ltimes M}(I \ltimes N)$.

Giả sử $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(I) \setminus \operatorname{Ass}_R(N)$. Khi đó tồn tại $a \in I$ thỏa mãn $aM = 0$ và $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(a)$. Dễ kiểm tra được $\mathfrak{p} \times M = \operatorname{Ann}_R(a, 0)$. Do đó $\mathfrak{p} \times M \in \operatorname{Ass}_{R \ltimes M}(I \ltimes N)$. □

Tập iđêan nguyên tố liên kết cho ta nhiều thông tin của môđun. Theo Herzog and Popescu [14] ta có thể mô tả lọc chiều của môđun. Với mỗi $0 \leq i \leq s$, đặt $\operatorname{Ass}^i_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M) | \dim R/\mathfrak{p} = i\}$. Herzog and Popescu đã đưa ra đặc trưng sau của lọc chiều.

Bổ đề 3.3.2. *[14, Proposition 1.1] Cho $\mathcal{F} : 0 \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{s-1} \subseteq M_s = M$ là một lọc các môđun con của M. Khi đó các điều kiện sau tương đương:*

(i) $\mathcal{F}$ là lọc chiều của M;

(ii) $\operatorname{Ass}_R(M_i/M_{i-1}) = \operatorname{Ass}^i_R(M)$ với mọi i.

Từ đó ta có mô tả lọc chiều của vành iđêan hóa $R \ltimes M$.

Mệnh đề 3.3.3. *Giả sử $\mathcal{F}_R : 0 \subseteq R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots \subseteq R_{d-1} \subseteq R_d = R$ và $\mathcal{F}_M : 0 \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{s-1} \subseteq M_s = M$ là các lọc chiều của R và M tương ứng. Đặt $S = R \ltimes M, S_i = R_i \times M_i$ với $i = 0, ..., s$ và $S_i = R_i \times M$ với $i = s + 1, ..., d$. Khi đó $\mathcal{F}_S : 0 \subseteq S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_{d-1} \subseteq S_d = S$ là lọc chiều của $R \ltimes M$. Hơn nữa, S_i là iđêan thuần nhất của $R \ltimes M$ với mọi i.*

Chứng minh. Cho i thỏa mãn $0 \leq i \leq s$. Theo Bổ đề 3.3.2, $\operatorname{Ass}_R(R_i/R_{i-1}) = \operatorname{Ass}^i_R(R)$ và $\operatorname{Ass}_R(M_i/M_{i-1}) = \operatorname{Ass}^i_R(M)$. Mặt khác

$$S_i/S_{i-1} \cong (R_i/R_{i-1}) \times (M_i/M_{i-1})$$

theo Định lý 3.1.4

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ass}_{R \ltimes M}(S_i/S_{i-1}) &= \operatorname{Ass}_{R \ltimes M}(R_i/R_{i-1} \times M_i/M_{i-1}) \\
&= \{\mathfrak{p} \times M | \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(R_i/R_{i-1}) \cup \operatorname{Ass}_R(M_i/M_{i-1})\} \\
&= \left\{\mathfrak{p} \times M | \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}^i_R(R) \cup \operatorname{Ass}^i_R(M)\right\} \\
&= \operatorname{Ass}^i_{R \ltimes M}(R \ltimes M).
\end{aligned}$$

Tương tự ta có $\operatorname{Ass}_{R \ltimes M}(S_i/S_{i-1}) = \operatorname{Ass}^i_{R \ltimes M}(R \ltimes M)$ với $s \leq i \leq d$. Theo Bổ đề 3.3.2 $\mathcal{F}_S : 0 \subseteq S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_{d-1} \subseteq S_d = S$ là lọc chiều của $R \ltimes M$.

Hiển nhiên $R_iM \subseteq M_i$ với $i = s, ..., d$. Lấy $0 \leq i < s$. Đặt $\mathfrak{a}_i = \operatorname{Ann}_R R_i$. Ta có $\dim_R(R_i) = \dim_R(R/\mathfrak{a}_i) \leq i$. Mặt khác $\mathfrak{a}_i \subseteq \operatorname{Ann}_R(R_iM)$. Vì vậy $\dim_R(R_iM) \leq i$. Theo tính tối đại của M_i, ta có $R_iM \subseteq M_i$. $\square$

Từ kết quả mô tả lọc chiều trên ta dễ dàng chứng minh kết quả sau, cho ta nghiên cứu về tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa.

Định lý 3.3.4. *Cho R là vành địa phương Noether, $M \neq (0)$ là R-môđun hữu hạn sinh. Đặt $S = R \ltimes M$ là iđêan hóa của M trên R. Khi đó các điều kiện sau là tương đương.*

(1) *$S = R \ltimes M$ là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy.*

(2) *$S = R \ltimes M$ là R-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

(3) *R vành địa phương Cohen-Macaulay dãy và M là R-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

3.4 Mở rộng môđun hữu hạn và tính Cohen-Macaulay dãy

Định nghĩa 3.4.1. *Cho $R \subseteq S$ là các vành. Vành S được gọi là mở rộng môđun hữu hạn (module finite extension) của R nếu S là R-môđun hữu hạn sinh.*

Ví dụ 3.4.2. *(i) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ là mở rộng môđun hữu hạn của $\mathbb{Z}$.*

(ii) Cho R là vành giao hoán, M là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó vành iđêan hóa $R \ltimes M$ là mở rộng môđun hữu hạn của R.

(iii) Let A be a Noetherian local ring, G a finite subgroup of $\operatorname{Aut} A$. Suppose that the order of G is invertible in A. Then A is a module-finite extension of $R = A^G$.

Từ đây một câu hỏi tự nhiên đặt ra là tìm hiểu tính Cohen-Macaulay dãy của khi qua mở rộng môđun hữu hạn của các vành. Lưu ý mục trước ta đã nghiên cứu trong trường hợp đặc biệt mở rộng vành bởi iđêan hóa.

Trong mục này ta luôn giả sử R là một vành địa phương với iđêan tối đại $\mathfrak{m}$, $M \neq (0)$ là R-môđun hữu hạn sinh chiều d. Khi đó tồn tại R-môđun con lớp nhất M_n của M thỏa mãn $\dim_R M_n \leq n$, với mọi $n \in \mathbb{Z}$ (chú ý ta quy ước $\dim_R(0) = -\infty$).

Bổ đề 3.4.3. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether, M và N là các R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó $[M \oplus N]_n = M_n \oplus N_n$ với mỗi $n \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh. Ta có $[M \oplus N]_n \supseteq M_n \oplus N_n$ vì

$$\dim_R(M_n \oplus N_n) = \max\{\dim_R M_n, \dim_R N_n\} \leq n.$$

Cho $p : L = M \oplus N \to M, (x, y) \mapsto x$ là phép chiếu lên thành phần thứ nhất. Khi đó $p(L_n) \subseteq M_n$, vì $\dim_R p(L_n) \leq \dim_R L_n \leq n$. Tương tự ta có $q(L_n) \subseteq N_n$, trong đó $q : M \oplus N \to N, (x, y) \mapsto y$ kí hiệu là phép chiếu lên thành phần thứ hai. Do đó $[M \oplus N]_n \subseteq M_n \oplus N_n$. □

Mệnh đề 3.4.4. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, M và N $(M, N \neq (0))$ là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó $M \oplus N$ là R-môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi M và N là các R-môđun Cohen-Macaulay dãy.

Chứng minh. Ta đặt $L = M \oplus N$ và $\ell = \sharp\mathcal{S}(L)$. Khi đó $\mathcal{S}(L) = \mathcal{S}(M) \cup \mathcal{S}(N)$ hay $\operatorname{Ass}_R L = \operatorname{Ass}_R M \cup \operatorname{Ass}_R N$. Do đó nếu $\ell = 1$ thì $\mathcal{S}(L) = \mathcal{S}(M) = \mathcal{S}(N)$ và $\dim_R L = \dim_R M = \dim_R N$. Do vậy khi $\ell = 1$ thì L là R-môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi L là R-môđun Cohen-Macaulay dãy, và điều kiện thứ hai tương đương với R-môđun M và N là Cohen-Macaulay, nghĩa là M và N là các R-môđun Cohen-Macaulay dãy. Giả sử $\ell > 1$ và khẳng định của ta đúng với $\ell - 1$. Cho

$$D_0 = (0) \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \cdots \subsetneq D_\ell = L$$

là lọc chiều của $L = M \oplus N$, trong đó $\mathcal{S}(L) = \{d_1 < d_2 < \cdots < d_\ell\}$. Khi đó $\{D_i/D_1\}_{1 \leq i \leq \ell}$ là lọc chiều của L/D_1 và do vậy L là R-môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi D_1 là R-môđun Cohen-Macaulay dãy và L/D_1 là R-môđun Cohen-Macaulay dãy. Bởi vì

$$D_1 = \begin{cases} M_{d_1} \oplus (0) & (d_1 \in \mathcal{S}(M) \setminus \mathcal{S}(N)), \\ M_{d_1} \oplus N_{d_1} & (d_1 \in \mathcal{S}(M) \cap \mathcal{S}(N)), \\ (0) \oplus N_{d_1} & (d_1 \in \mathcal{S}(N) \setminus \mathcal{S}(M)) \end{cases}$$

theo Bổ đề 3.4.3, giả thiết với ℓ dễ dàng chứng tỏ cho khẳng định thứ hai nói rằng R-Môđun M và N là Cohen-Macaulay dãy. □

Từ đây ta giả sử S là vành địa phương và S là mở rộng môđun hữu hạn của R. Ta có kết quả chính của mục này như sau.

Định lý 3.4.5. *Cho $M \neq (0)$ là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó các phát biểu sau là đúng.*

(1) *M_n là S-môđun con lớn nhất của M thỏa mãn $\dim_A M_n \leq n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.*

(2) *Lọc chiều của M như S-môđun trùng với lọc chiều của M như R-môđun.*

(3) *M là S-môđun Cohen-Macaulay dãy nếu và chỉ nếu M là R-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

Chứng minh. Giả sử $n \in \mathbb{Z}$ và X ký hiệu S-môđun con lớn nhất của M thỏa mãn $\dim_A X \leq n$. Khi đó $X \subseteq M_n$, vì $\dim_R X = \dim_A X \leq n$. Đặt $Y = SM_n$. Khi đó $\dim_S Y \leq n$. Thật vậy, gọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R Y$. Vì $[M_n]_\mathfrak{p} \subseteq Y_\mathfrak{p} = S_\mathfrak{p} \cdot [M_n]_\mathfrak{p} \subseteq M_\mathfrak{p}$, ta có $[M_n]_\mathfrak{p} \neq (0)$. Vì vậy $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R M_n$. Kéo theo $\dim R/\mathfrak{p} \leq \dim_R M_n \leq n$. Vì vậy $\dim_S Y = \dim_R Y \leq n$. Suy ra $M_n \subseteq Y \subseteq X$. Điều này chứng tỏ $X = M_n$. Từ đó ta có khẳng định (1) và (2). Vì $\dim_S L = \dim_R L$ và $\operatorname{depth}_S L = \operatorname{depth}_R L$ với mọi S-môđun L ta có khẳng định (3). □

Từ đó ta có một số hệ quả.

Hệ quả 3.4.6. *S là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy nếu và chỉ nếu S là R-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

Hệ quả 3.4.7. *Cho M là S-môđun hữu hạn sinh. Giả sử R là một hạng tử trực tiếp của M như R-môđun. Nếu M là S-môđun Cohen-Macaulay dãy thì R là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy.*

Chứng minh. Giả sử $M = R \oplus N$ trong đó N là R-môđun con của M. Vì M là S-môđun Cohen-Macaulay dãy, theo Định lý 3.4.5 M là R-môđun Cohen-Macaulay dãy. Vì vậy theo Mệnh đề 3.4.4, R là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy. □

Hệ quả 3.4.8. *Giả sử R là hạng tử trực tiếp của S như R-môđun. Nếu S là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy thì R cũng là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy.*

Ta xét vành bất biến $R = A^G$.

Hệ quả 3.4.9. *Giả sử S là vành địa phương Noether, G là nhóm con của* $\operatorname{Aut} A$. *Giả sử cấp của G khả nghịch trong S. Nếu S là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy, thì vành bất biến $R = S^G$ của S là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy.*

Chứng minh. Vì cấp của G khả nghịch trong S nên S là mở rộng môđun hữu hạn của $R = S^G$ thỏa mãn R là hạng tử trực tiếp của S (xem [5]). Do đó kết quả được suy ra từ Hệ quả 3.4.8. □

Chú ý 3.4.10. *Với các giả thiết như trong Hệ quả 3.4.9, gọi $\{D_i\}_{0\le i\le \ell}$ là lọc chiều của S. Khi đó mọi D_i là iđêan G-ổn định của S (xem Định lý 3.4.5 (1)) và lọc chiều của R cho bởi $\{D_i^G\}_{0\le i\le \ell}$ khi bỏ các môđun trùng nhau.*

Từ trên ta có kết quả sau.

Hệ quả 3.4.11. *Cho R là vành địa phương Noether, $M \neq (0)$ là R-môđun hữu hạn sinh. Đặt $S = R \ltimes M$ là iđêan hóa của M trên R. Khi đó các điều kiện sau là tương đương.*

(1) *$S = R \ltimes M$ là vành địa phương Cohen-Macaulay dãy.*

(2) *$S = R \ltimes M$ là R-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

(3) *R vành địa phương Cohen-Macaulay dãy và M là R-môđun Cohen-Macaulay dãy.*

Kết luận

Trong đề tài, chúng tôi đã đạt được một số kết quả cơ bản sau:

- Hệ thống một số kiến thức cơ bản về phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy, lọc chiều của môđun, mô tả lọc chiều của môđun, môđun Cohen-Macaulay dãy.
- Tìm hiểu về iđêan hóa và một số tính chất cơ bản: mô tả các lớp iđêan đặc biệt, một số đẳng cấu thông dụng, một số phần tử đặc biệt; tìm hiểu về địa phương hóa của vành iđêan hóa.
- Đưa ra một ứng dụng của iđêan hóa trong việc mở rộng kết quả từ vành sang môđun.
- Nghiên cứu để đưa ra mô tả phân tích nguyên sơ, phân tích bất khả quy của iđêan thuần nhất trong vành iđêan hóa.
- Mô tả lọc chiều của vành iđêan hóa bằng cách sử dụng phân tích nguyên sơ và bằng tính tập iđêan nguyên tố liên kết.
- Nghiên cứu tính Cohen-Macaulay dãy của vành iđêan hóa, biến đổi tính Cohen-Macaulay dãy của vành qua mở rộng hữu hạn đặc biệt.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] An T. N. and Vinh N. H. (2017), "Tập iđêan nguyên tố liên kết và lọc chiều của vành iđêan hóa", *Tạp chí Giáo dục tháng 5*, tr. 33-36.

Tiếng Anh

[2] Albu T. and Smith P. F. (2009), "Primary, irreducibility, and complete irreducibility in modules over commutative rings", *Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 54*, pp. 275-286.

[3] An T. N. (2018), "Primary decomposition of homogeneous ideal in idealization of a module", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, pp. 1-8.

[4] Anderson D. D. and Winders M. (2009), "Idealization of a module", *J. Commutative Algebra (1)1*, pp. 1-55.

[5] Brewer J. W. and Rutter E. A. (1977), "Must R be Noetherian if R^G is Noetherian", *Comm. Algebra, 5*, pp. 969-979.

[6] Brodmann M. and Sharp R.Y. (1998), *Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications,* Cambridge University Press.

[7] Bruns W. and Herzog J. (1998), *Cohen-Macaulay rings,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 60. Cambridge University Press, Cambridge.

[8] Cuong N. T. and Nhan L. T. (2003), "Pseudo Cohen-Macaulay and pseudo generalized Cohen-Macaulay modules", *J. Algebra, 267*, pp. 156-177.

[9] Cuong N. T. and Cuong D. T. (2007), "On sequentially Cohen-Macaulay modules", *Kodai Math. J., 30*, pp. 409-428.

[10] Cuong N. T. and Nhan L. T. (2003), "Pseudo Cohen-Macaulay and pseudo generalized Cohen-Macaulay modules", *J. Algebra 267*, pp. 156-177.

[11] Goto S., Horiuchi Y. and Sakurai H.(2010), "Sequentially Cohen-Macaulayness versus parametric decomposition of powers of parameter ideals", *J. Comm. Algebra, 2*, pp. 37–54.

[12] Heinzer W. , Ratliff L. J. and Shah K. (1997), "On the irreducible components of an ideal", *Comm. Algebra, 25(5)*, pp. 1609-1634.

[13] Herzog J. and Sbarra E. (2001), "Sequentially Cohen-Macaulay modules and local cohomology", *in Arithmetic and Geometry, Proceed. of Intern. Coll. on Alg.*, pp. 327-340.

[14] Herzog J. and Popescu D. (2003), "Finite filtration of modules and shellable multicomplexes", *Manuscripta Mathematica*, **121(3)**, pp. 385-410.

[15] Matsumura H. (1986), *Commutative ring theory*, Cambridge University Press.

[16] Nagata M. (1962), *Local rings*, Interscience, New York.

[17] Schenzel P. (1998), "On the dimension filtration and Cohen-Macaulay filtered modules", *Proc. of the Ferrara Meeting in honour of Mario Fiorentini, University of Antwerp, Wilrijk, Belgium*, pp. 245-264.

[18] Stanley R. P. (1996), *Combinatorics and Commutative Algebra,* Second edition, Birkhauser Boston.

[19] Taniguchi N., Phuong T.T., Dung N.T. and An T. N (2018), "Topic on sequentially Cohen-Macaulay modules", *Journal of Commutative Algebra 10(2)*, to appear.