ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BÁO CÁO TÓM TẮT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

MỘT SỐ MỞ RỘNG CỦA LỚP MÔĐUN COHEN-MACAULAY

Mã số: ĐH2016-TN04-08

Chủ nhiệm đề tài: ThS. LƯU PHƯƠNG THẢO

THÁI NGUYÊN, 12/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BÁO CÁO TÓM TẮT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

MỘT SỐ MỞ RỘNG CỦA LỚP MÔĐUN COHEN-MACAULAY

Mã số: ĐH2016-TN04-08

Xác nhận của tổ chức chủ trì	**Chủ nhiệm đề tài**
(*Ký, họ tên, đóng dấu*)	(*Ký, họ tên*)

ThS. LƯU PHƯƠNG THẢO

THÁI NGUYÊN, 12/2018

DANH SÁCH NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI VÀ ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

1. Thành viên thực hiện đề tài

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao
1	ThS. Lưu Phương Thảo	Khoa Toán, trường ĐHSP	Chủ nhiệm
2	TS. Trần Đỗ Minh Châu	Khoa Toán, trường ĐHSP	Cộng tác viên
3	ThS. Nguyễn Thị Ánh Hằng	Khoa Toán, trường ĐHSP	Cộng tác viên
4	TS. Nguyễn Hữu Quân	Phòng KHCN-HTQT, trường ĐHSP	Thư ký

2. Đơn vị phối hợp chính

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị
Trường ĐHKH - ĐHTN	Tư vấn, định hướng nghiên cứu	GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn

Mục lục

Thông tin kết quả nghiên cứu **iii**

Information on research results **vi**

Mở đầu **1**

1 Kiến thức chuẩn bị **3**

1.1 Tính catenary của vành 3

1.2 Môđun đối đồng điều địa phương 3

1.3 Biểu diễn thứ cấp và chiều của môđun Artin 3

1.4 Môđun Cohen-Macaulay 3

2 Đối đồng điều địa phương qua mở rộng phẳng và quỹ tích không Cohen-Macaulay **4**

2.1 Tập các iđêan nguyên tố gắn kết 5

2.2 Mối liên hệ về chiều của $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và $H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P})$ 7

2.3 Quỹ tích không Cohen-Macaulay qua chuyển phẳng 8

3 Môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s **9**

3.1 Môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s 9

3.2 Quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s 11

Kết luận **13**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung:

Tên đề tài: Một số mở rộng của lớp môđun Cohen-Macaulay

Mã số: ĐH2016-TN04-08

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Lưu Phương Thảo

Tổ chức chủ trì: Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Thời gian thực hiện: 30 tháng (từ 06/2016 đến 12/2018)

2. Mục tiêu:

Mục tiêu của đề tài là nghiên cứu một số mở rộng của lớp môđun Cohen-Macaulay trên vành giao hoán mà cụ thể là nghiên cứu về lớp môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s và tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng đồng thời nghiên cứu về quỹ tích không Cohen-Macaulay, quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.

3. Tính mới và sáng tạo:

Đề tài đã đưa ra những kết quả mới về tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng đồng thời mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua các tập giả giá chiều lớn hơn s.

4. Kết quả nghiên cứu:

- Kết quả chính đầu tiên của đề tài là đưa ra được mối liên hệ về tập các iđêan nguyên tố gắn kết và chiều của các môđun đối đồng điều địa phương Artin qua chuyển phẳng. Từ đó xét tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng.

- Kết quả chính thứ hai của đề tài là đưa ra mô tả quỹ tích không Cohen - Macaulay chiều lớn hơn s thông qua các tập giả giá thứ i chiều lớn hơn s. Ngoài ra, chúng tôi còn đưa ra công thức tính chiều của quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.

5. Sản phẩm:

5.1. Sản phẩm khoa học:

- Đăng 01 bài báo quốc tế thuộc danh mục SCI

Le Thanh Nhan, Luu Phuong Thao, Tran Nguyen An (2018), "Local cohomology modules via certain flat extension rings", *Journal of Algebra, 503,* pp. 340-355.

- Đăng 01 bài báo trong nước

Lưu Phương Thảo (2018), "Non Cohen-Macaulay in dimension more than s locus", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ - Đại học Thái Nguyên,* tập 192, số 16, trang 23-28.

5.2. Sản phẩm đào tạo:

- Hướng dẫn 03 đề tài NCKH sinh viên

1. Đoàn Thị Kim Hồng (2016), *Biểu diễn thứ cấp của môđun Artin,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

2. Vũ Thị Oanh (2017), *Điều kiện xích của môđun,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

3. Phạm Thị Thoa (2018), *Iđêan nguyên tố trong một số lớp vành đặc biệt,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

- Hướng dẫn 03 luận văn tốt nghiệp sinh viên

1. Đoàn Thị Kim Hồng (2017), *Dãy đối chính quy và độ rộng của môđun Artin,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

2. Đoàn Thị Thanh Hoa (2017), *Môđun nội xạ và bao nội xạ,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

3. Vũ Thị Oanh (2018), *Chiều của môđun trên vành giao hoán,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu:

- Các bài báo khoa học là sản phẩm nghiên cứu của đề tài được xuất bản trên các tạp chí trong và ngoài nước.

- Các bài báo khoa học được phổ biến tới các độc giả thông qua thư viện truyền thống và thư viện điện tử. Các bài báo đó là tiền đề nghiên cứu tiếp theo cho các nhà toán học nghiên cứu về Đại số và Lý thuyết số.

- Các kết quả của đề tài cũng là tài liệu tham khảo cho sinh viên, học viên cao học, giảng viên, nghiên cứu sinh và các nhà toán học nghiên cứu về Đại số và Lý thuyết số.

Ngày ... tháng 12 năm 2018

Tổ chức chủ trì	**Chủ nhiệm đề tài**
(ký, họ tên, đóng dấu)	*(ký, họ tên)*
	Lưu Phương Thảo

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

Project title: On some generalizations of Cohen-Macaulay modules

Code number: ĐH2016–TN04–08

Coordinator: Ms. Luu Phuong Thao

Implementing institution: Thai Nguyen University of Education - TNU

Duration: 06/2016 - 12/2018.

2. Objective(s):

The objective of the research is to study some of the extensions of the Cohen-Macaulay module class on the commutative ring, namely, the study of the Cohen-Macaulay modules in dimension more than s and the Cohen-Macaulayness, the Cohen-Macaulayness in dimension more than s via flat extension and research on non-Cohen-Macaulay locus, non-Cohen-Macaulay in dimension more than s locus.

3. Creativeness and innovativeness:

The research gave new results on the Cohen-Macaulayness, the Cohen-Macaulayness in dimension more than s via flat extension and describes the non-Cohen-Macaulay in dimension more than s locus through the pseudo supports in dimension more than s.

4. Research results:

- The first main result of this research project gives some relations between the Artinian local cohomology modules via certain flat extension. Some applications of this result to study the Cohen-Macaulayness, the Cohen-Macaulayness in dimension more than s via flat extension.

- The second main result of this research project gives a description the non Cohen-Macaulay in dimension more than s locus via the pseudo supports in dimension more than s.

5. Products:

5.1. Scientific products:

- **Publish 01 SCI paper**

Le Thanh Nhan, Luu Phuong Thao, Tran Nguyen An (2018), "Local cohomology modules via certain flat extension rings", *Journal of Algebra, 503,* pp. 340-355.

- **Publish 01 paper in Vietnam**

Luu Phuong Thao (2018), "Non Cohen-Macaulay in dimension more than s locus", *Journal of Science and Technololy - TNU*, Vol. 192, No. 16, pp. 23-28.

5.2. Training products:

- **03 scientific research students**

1. Doan Thi Kim Hong (2016), *Secondary representation of Artinian modules,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

2. Vu Thi Oanh (2017), *Chain conditions on modules,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

3. Pham Thi Thoa (2018), *Prime ideals in some special classes of rings,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

- **03 undergraduate thesis**

1. Doan Thi Kim Hong (2017), *Regular cosequence and width of Artinian modules,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

2. Doan Thi Thanh Hoa (2017), *Injective modules and injective hull,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

3. Vu Thi Oanh (2018), *Dimension of modules in commutative rings,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

6. Transfer alternatives, application institutions, impacts and benefits of reserach results:

- Scientific articles are research articles of the topic published in domestic and foreign magazines.

- Scientific articles are disseminated to readers through traditional libraries and electronic libraries. These articles are the basis for further research for mathematicians studying Algebra and Number Theory.

- The results of the thesis are also reference materials for students, graduate students, lecturers, fellows and mathematicians who study Algebra and Number Theory.

Mở đầu

1. Tính cấp thiết của đề tài

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán Noether địa phương với $\mathfrak{m}$ là iđêan cực đại duy nhất. Cho M là R-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$. Ta luôn có mối quan hệ giữa hai bất biến độ sâu và chiều của M cho bởi $\operatorname{depth} M \leq \dim M$. Nếu $\operatorname{depth} M = \dim M$ thì M được gọi là *môđun Cohen-Macaulay*. Khi R là R-môđun Cohen-Macaulay, thì ta nói R là *vành Cohen-Macaulay*. Vành và môđun Cohen-Macaulay là lớp vành và môđun quan trọng trong Đại số giao hoán. Lớp vành và môđun này có nhiều ứng dụng trong Hình học đại số, Lý thuyết bất biến và Tổ hợp. Nhiều mở rộng của lớp vành và môđun Cohen-Macaulay đã được giới thiệu và quan tâm nghiên cứu. Hai mở rộng đầu tiên là lớp vành (môđun) Buchsbaum được đưa ra bởi W. Vogel và J. Stuckrad năm 1973 và lớp vành (môđun) Cohen-Macaulay suy rộng được giới thiệu bởi N.T. Cường, P. Schenzel, N.V. Trung năm 1978. Ngoài ra còn rất nhiều các mở rộng khác của lớp vành và môđun này vẫn tiếp tục được giới thiệu và thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học như: lớp vành (môđun) Cohen-Macaulay chính tắc, lớp vành (môđun) Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc, lớp vành (môđun) Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s,... Như vậy, việc nghiên cứu về các mở rộng của lớp vành và môđun Cohen-Macaulay vẫn là những vấn đề thời sự, đang được quan tâm trong nước cũng như trên thế giới. Việc giải quyết những câu hỏi mở hay tìm ra những kết quả mới cho các vấn đề trên là cần thiết, thúc đẩy sự phát triển của Toán học, thúc đẩy sự hợp tác nghiên cứu Toán giữa cán bộ của ĐH Thái Nguyên và của các cơ sở đào tạo khác trong và ngoài nước, phục vụ đắc lực công tác đào tạo sau đại học ngành Toán của ĐH Thái Nguyên.

2. Mục tiêu của đề tài

Mục tiêu của đề tài là nghiên cứu một số mở rộng của lớp môđun Cohen-Macaulay trên vành giao hoán mà cụ thể là nghiên cứu về lớp môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s và tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng đồng thời nghiên cứu về quỹ tích không Cohen-Macaulay, quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.

3. Nội dung nghiên cứu của đề tài

Đề tài nghiên cứu về tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng. Ngoài ra chúng tôi còn nghiên cứu về quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s và mô tả quỹ tích này thông qua các giả giá chiều lớn hơn s. Cụ thể nội dung nghiên cứu của đề tài được trình bày trong báo cáo tổng kết gồm ba chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về môđun đối đồng điều địa phương, biểu diễn thứ cấp và chiều của môđun Artin, môđun Cohen-Macaulay nhằm phục vụ cho các chương sau. Chương 2 và 3 trình bày các kết quả chính của đề tài. Chương 2 đưa ra các kết quả về mối quan hệ của các tập iđêan nguyên tố gắn kết của các môđun đối đồng điều địa phương Artin, mối liên hệ về chiều của các môđun này. Từ đó đưa ra các kết quả nghiên cứu về tính Cohen-Macaulay và quỹ tích không Cohen-Macaulay qua chuyển phẳng. Chương 3 trình bày về môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng và mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua các tập giả giá thứ i chiều lớn hơn s.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Tính catenary của vành

1.2 Môđun đối đồng điều địa phương

1.3 Biểu diễn thứ cấp và chiều của môđun Artin

1.4 Môđun Cohen-Macaulay

Chương 2

Đối đồng điều địa phương qua mở rộng phẳng và quỹ tích không Cohen-Macaulay

Trong toàn bộ chương này ta luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether và là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. M là một R-môđun hữu hạn sinh. Ký hiệu $\widehat{R}, \widehat{M}$ tương ứng là đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic của R và M. Cho $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$, đặt $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$ và $r_{\mathfrak{P}} = \dim\big(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\big)$. Khi đó, đồng cấu $\varphi : R_{\mathfrak{p}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ cảm sinh từ đồng cấu tự nhiên $R \to \widehat{R}$ là một đồng cấu phẳng địa phương và $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cong \widehat{M}_{\mathfrak{P}}$. Chú ý rằng với mỗi số nguyên bất kỳ $i \geq 0$ ta có $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ là $R_{\mathfrak{p}}$-môđun Artin và $H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$ là $\widehat{R}_{\mathfrak{P}}$-môđun Artin. Mục tiêu thứ nhất của chương là đưa ra mối liên hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết và chiều của các môđun đối đồng điều địa phương này qua đồng cấu phẳng φ. Mục tiêu thứ hai của chương là áp dụng các kết quả trên để nghiên cứu tính Cohen-Macaulay qua chuyển phẳng.

Trước hết chúng tôi trình bày về mối quan hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết của các môđun đối đồng điều địa phương nêu trên.

2.1 Tập các iđêan nguyên tố gắn kết

Cho A là R-môđun Artin. Ta đã biết rằng khi đó A có cấu trúc tự nhiên như $\widehat{R}$-môđun Artin và ta luôn có

$$\operatorname{Att}_R(A) = \{\mathfrak{P} \cap R \mid \mathfrak{P} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(A)\}.$$

Tổng quát hơn, L. T. Nhàn và P. H. Quý đã chứng minh được tính chất chuyển tập iđêan nguyên tố gắn kết của một môđun Artin qua đồng cấu phẳng địa phương trong trường hợp vành thớ có chiều bằng 0 như sau.

Bổ đề 2.1.1. . *Cho A là R-môđun Artin. Giả sử $(S, \mathfrak{n})$ là một vành địa phương Noether và $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ là một đồng cấu phẳng địa phương. Giả thiết thêm rằng* $\dim(S/\mathfrak{m}S) = 0$. *Khi đó $A \otimes_R S$ là S-môđun Artin và*

$$\operatorname{Att}_R A = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{S}) \mid \mathfrak{S} \in \operatorname{Att}_S(A \otimes_R S)\}.$$

Trường hợp vành thớ $S/\mathfrak{m}S$ là vành Cohen-Macaulay có chiều d ta có kết quả sau của M. Brodmann và R. Y. Sharp về các môđun đối đồng điều địa phương qua chuyển phẳng.

Bổ đề 2.1.2. *Cho $h : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ là đồng cấu phẳng địa phương giữa các vành địa phương sao cho $S/\mathfrak{m}S$ là vành Cohen-Macaulay có chiều d. Khi đó, với mỗi R-môđun N, và mỗi số nguyên j ta có*

$$H^{d+j}_{\mathfrak{n}}\big(N \otimes_R S\big) \cong H^d_{\mathfrak{n}}\big(H^j_m(N) \otimes_R S\big)$$

và $H^{d+j}_{\mathfrak{n}}\big(N \otimes_R S\big) \neq 0$ khi và chỉ khi $H^j_{\mathfrak{m}}(N) \neq 0$.

Như vậy, nếu ta xét đồng cấu phẳng địa phương $\varphi : R_{\mathfrak{p}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ ở trên trong trường hợp $r_{\mathfrak{P}} = 0$ thì do Định lý chuyển cơ sở phẳng $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cong H^i_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$ nên theo Bổ đề 2.1.1 ta có

$$\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big) = \big\{\varphi^{-1}(\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) \mid \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}\big(H^i_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})\big)\big\}.$$

Tuy nhiên, với $r_{\mathfrak{P}} > 0$ và giả sử $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$ thì $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ không là $\widehat{R}_{\mathfrak{P}}$-môđun Artin vì

$$\dim \operatorname{Supp}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} \left(H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}} \right) = r_{\mathfrak{P}} > 0.$$

Do đó $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}} \ncong H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$. Mặc dù vậy ta vẫn có đẳng cấu sau.

Bổ đề 2.1.3. *Cho $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$ với $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. Nếu R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương thì*

$$H^i_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}}) \cong \begin{cases} H^{r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}\left(H^{i-r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes \widehat{R}_{\mathfrak{P}}\right) & \text{if } i \geq r_{\mathfrak{P}} \\ 0 & \text{if } i < r_{\mathfrak{P}}. \end{cases}$$

Hơn nữa, $H^i_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}}) \neq 0$ nếu và chỉ nếu $H^{i-r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$ với mọi $i \geq r_{\mathfrak{P}}$.

Theo T. Kawasaki, R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương nếu và chỉ nếu R là catenary phổ dụng và mọi thớ hình thức của R là Cohen-Macaulay. Do đó, ta có nguyên lý nâng địa phương và nguyên lý nâng đầy đủ cho iđêan nguyên tố gắn kết của các môđun đối đồng điều địa phương. Đây là công cụ chủ yếu để chứng minh kết quả chính của phần này.

Bổ đề 2.1.4. *Cho $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ và $i \geq 0$ là một số nguyên. Giả sử rằng R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó*

(a) $\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\right) = \left\{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\right\}$;

(b) $\operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^i_\mathfrak{m}(M)) = \bigcup\limits_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R(H^i_\mathfrak{m}(M))} \operatorname{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$.

Định lý sau đây là kết quả chính của phần này cho ta mối quan hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết của $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và của $H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$.

Định lý 2.1.5. *Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Giả sử $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$ và $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. Đặt $r_{\mathfrak{P}} = \dim\left(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\right)$. Khi đó với bất kỳ số nguyên $i \leq \dim M_\mathfrak{p}$, ta có*

(a) $\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}} H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \left\{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cap R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})\right\}$.

(b) $\operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}}) = \bigcup\limits_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}} H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})} \operatorname{Ass}\left(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\right)$.

(c) *Với mọi* $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$ *thỏa mãn* $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$ *và* $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap R$*, ta có* $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$ *nếu và chỉ nếu* $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ *và* $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$.

2.2 Mối liên hệ về chiều của $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ và $H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$

Như đã trình bày ở trên, cho A là R-môđun Artin thì A luôn có cấu trúc tự nhiên như $\widehat{R}$-môđun. Với cấu trúc này, một môđun con của A xét như R-môđun khi và chỉ khi nó là môđun con của A xét như $\widehat{R}$-môđun. Do đó A là $\widehat{R}$-môđun Artin. Đặt $\dim_R A := \dim(R/\operatorname{Ann}_R A)$. Nếu $A = 0$ thì chúng ta quy ước rằng $\dim A = -\infty$. Vì tập các iđêan nguyên tố tối thiểu của R chứa $\operatorname{Ann}_R A$ chính là tập các phần tử tối thiểu của $\operatorname{Att}_R A$ nên ta có thể thấy chiều của một môđun Artin có thể được tính bằng maximum của chiều của các iđêan nguyên tố gắn kết của nó

$$\dim_R A = \max\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R A\}.$$

Do đó, từ kết quả $\operatorname{Att}_R(A) = \{\mathfrak{P} \cap R \mid \mathfrak{P} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(A)\}$, ta luôn có $\dim_{\widehat{R}} A \leq \dim_R A$. Trường hợp A là môđun đối đồng điều địa phương Artin $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, ta có dấu đẳng thức ở trên xảy ra khi R là vành thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương.

Bổ đề 2.2.1. *Nếu R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương thì*

$$\dim_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \leq i$$

với mọi số nguyên $i \geq 0$.

Vì vậy ta có thể áp dụng Định lý 2.1.5 để so sánh chiều của các môđun đối đồng điều địa phương Artin $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ và $H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$. Cụ thể ta có định lý sau.

Định lý 2.2.2. *Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Giả sử $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$ với $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. Đặt $r_{\mathfrak{P}} = \dim \widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}$. Khi đó với bất kỳ số nguyên $i \geq 0$ ta có*

$$\dim_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}}) = \dim_{R_{\mathfrak{p}}} H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) + r_{\mathfrak{P}}.$$

2.3 Quỹ tích không Cohen-Macaulay qua chuyển phẳng

Quỹ tích không Cohen-Macaulay của M, kí hiệu $\mathrm{nCM}(M)$, là tập hợp tất cả iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ sao cho $M_{\mathfrak{p}}$ không là Cohen-Macaulay. Quỹ tích không Cohen-Macaulay đã được nghiên cứu bởi một số nhà toán học như R. Hartshorne, P. Schenzel, N. T. Cường khi vành cơ sở là thương của một vành Gorenstein. Trong đề tài này, chúng tôi quan tâm đến tính Cohen-Macaulay và các quỹ tích không Cohen-Macaulay qua chuyển phẳng.

Kết quả sau đây cho ta tác động của đồng cấu phẳng lên tính Cohen-Macaulay.

Mệnh đề 2.3.1. *Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Giả sử $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\widehat{R})$ và $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. Đặt $r_{\mathfrak{P}} = \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$. Khi đó $M_{\mathfrak{p}}$ là Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu $\widehat{M}_{\mathfrak{P}}$ là Cohen-Macaulay.*

Cho $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\widehat{R})$ với $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. Mệnh đề sau đây cho ta mối liên hệ giữa các quỹ tích $\mathrm{nCM}(M_{\mathfrak{p}})$ và $\mathrm{nCM}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$.

Mệnh đề 2.3.2. *Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó*

(a) $\mathrm{nCM}(M_{\mathfrak{p}}) = \big\{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cap R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{nCM}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})\big\}$;

(b) $\mathrm{nCM}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}}) = \bigcup_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{nCM}(M_{\mathfrak{p}})} \mathrm{V}(\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$.

Chương 3

Môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s

Trong toàn bộ chương này ta luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là một vành địa phương, Noether và M là một R-môđun hữu hạn sinh với chiều Krull $\dim M = d$. Mục tiêu của chương này là nghiên cứu về một mở rộng khác của môđun Cohen-Macaulay, đó là lớp môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.

3.1 Môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s

Ta đã biết rằng lớp môđun Cohen-Macaulay là lớp môđun rất quen thuộc và đóng vai trò quan trọng trong Đại số giao hoán. Nhắc lại rằng một môđun hữu hạn sinh M trên vành địa phương Noether $(R, \mathfrak{m})$ là môđun Cohen-Macaulay nếu mọi hệ tham số của M là M-dãy chính quy. Có nhiều mở rộng của lớp môđun này đã được giới thiệu và thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học như: lớp môđun Buchsbaum, Cohen-Macaulay suy rộng, Cohen-Macaulay chính tắc, Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc, Cohen-Macaulay dãy, Cohen-Macaulay suy rộng dãy, ... Cho $s \geq -1$ là một số nguyên. Khái niệm M-dãy chính quy chiều lớn hơn s được giới thiệu bởi M. Brodmann và L. T. Nhàn là một mở rộng của khái niệm M-dãy chính quy quen thuộc và môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s được định nghĩa bởi N. Zamani cũng là một trong số những mở rộng của môđun Cohen-Macaulay.

Định nghĩa 3.1.1. Một phần tử $x \in \mathfrak{m}$ được gọi là *M-chính quy chiều lớn hơn s* nếu $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$ thỏa mãn $\dim(R/\mathfrak{p}) > s$. Một dãy $x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{m}$ được gọi là *M-dãy chính quy chiều lớn hơn s* nếu x_i là $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$-chính quy chiều lớn hơn s với mọi $i = 1, \ldots, t$. Ta nói rằng M là một *môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s* nếu mọi hệ tham số của M là M-dãy chính quy chiều lớn hơn s.

Dễ thấy rằng M-dãy chính quy chiều lớn hơn s với $s = -1, 0, 1$ tương ứng là M-dãy chính quy, f-dãy của M (theo thuật ngữ của Cường-Schenzel-Trung) và dãy chính quy suy rộng của M (theo L.T. Nhàn). Do đó, môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s với $s = -1, 0, 1$ tương ứng là môđun Cohen-Macaulay, f-môđun và f-môđun suy rộng.

Bổ đề sau là một kết quả về tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s của môđun khi chia cho một phần tử tham số.

Bổ đề 3.1.2. *Nếu M là môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s thì M/xM cũng là môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s, với mọi phần tử tham số x của M.*

Mệnh đề sau đây cho ta một đặc trưng đồng điều của môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.

Mệnh đề 3.1.3. *Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó M là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s nếu và chỉ nếu*

$$\operatorname{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \leq s$$

với mọi số nguyên $i < \dim M$.

Bổ đề sau cho ta thông tin về tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua đầy đủ hóa.

Bổ đề 3.1.4. *Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó M là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s nếu và chỉ nếu $\widehat{M}$ là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.*

3.2 Quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s

Nhắc lại rằng quỹ tích không Cohen-Macaulay của một R-môđun M, ký hiệu $\mathrm{nCM}(M)$, là tập hợp tất cả các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R sao cho $M_{\mathfrak{p}}$ không là Cohen-Macaulay. Cho $i \geq 0$ là một số nguyên. Theo M. Brodmann và R. Y. Sharp, *giả giá thứ i của M,* ký hiệu $\mathrm{Psupp}^i_R(M)$, được xác định là

$$\mathrm{Psupp}^i_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \mid H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0\}.$$

Năm 2010, N. T. Cường, L. T. Nhàn và N. T. K. Nga đã dùng giả giá để mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay của M như sau

$$\mathrm{nCM}(M) = \bigcup_{0 \leqslant i < j \leqslant d} (\mathrm{Psupp}^i_R(M) \cap \mathrm{Psupp}^j_R(M)).$$

Tương tự $\mathrm{nCM}(M)$ và giả giá $\mathrm{Psupp}^i_R(M)$, chúng tôi ký hiệu $\mathrm{nCM}_{>s}(M)$ và $\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M)$ tương ứng là quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s và giả giá thứ i chiều lớn hơn s của M. Mục đích của chúng tôi trong phần này là mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s thông qua giả giá thứ i chiều lớn hơn s của M. Trước hết chúng tôi đưa ra định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.2.1. (a) *Quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s của M* , ký hiệu $\mathrm{nCM}_{>s}(M)$, được xác định là tập tất cả các iđêan nguyên tố của R sao cho $M_{\mathfrak{p}}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.
(b) Cho $i \geq 0$ là một số nguyên. *Giả giá thứ i chiều lớn hơn s của M,* ký hiệu bởi $\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M)$, được định nghĩa là

$$\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \mid \mathrm{N\text{-}dim}_{R_{\mathfrak{p}}}\left(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\right) > s\}.$$

Chú ý rằng nếu $s = -1$ thì quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn -1 là quỹ tích không Cohen-Macaulay và giả giá thứ i chiều lớn hơn -1 của M chính là giả giá thứ i của M. Như vậy, chúng ta đã có mô tả trong trường hợp $s = -1$. Với $s \geq 0$ là một số nguyên, chúng tôi có định lý sau đây là kết quả chính của phần này.

Định lý 3.2.2.

$$\mathrm{nCM}_{>s}(M) \subseteq \bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant d} (\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M) \cap \mathrm{Psupp}^j_{>s}(M)).$$

Bao hàm thức ngược lại cũng đúng khi R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Hơn nữa, nếu M là đẳng chiều thì

$$\mathrm{nCM}_{>s}(M) = \bigcup_{1\leqslant i<d} \mathrm{Psupp}^i_{>s}(M).$$

Chú ý rằng khi R không là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương thì dấu đẳng thức trong Định lý 3.2.2 là không đúng.

Tiếp theo là kết quả về chiều của quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng.

Định lý 3.2.3. *Cho $s \geq -1$ là một số nguyên. Giả sử $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\widehat{R})$ với $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó*

(a) $\mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$ *nếu và chỉ nếu* $\dim \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}}) \geq r_{\mathfrak{P}}$

(b) *Nếu* $\mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$, *thì* $\dim \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}}) = \dim \mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}}) + r_{\mathfrak{P}}$.

KẾT LUẬN

Đề tài đã thu được các kết quả sau:

- Hệ thống các kiến thức về môđun đối đồng điều địa phương, biểu diễn thứ cấp và chiều của các môđun Artin, môđun Cohen-Macaulay, môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s, quỹ tích không Cohen-Macaulay.

- Đưa ra mối liên hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết, mối liên hệ về chiều của các môđun đối đồng điều địa phương Artin $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và $H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P})$ qua chuyển phẳng.

- Nghiên cứu tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng.

- Mô tả quỹ tích không Cohen - Macaulay chiều lớn hơn s qua các tập giả giá thứ i chiều lớn hơn s.