ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

MỘT SỐ MỞ RỘNG CỦA LỚP MÔĐUN COHEN-MACAULAY

Mã số: ĐH2016-TN04-08

Chủ nhiệm đề tài: ThS. LƯU PHƯƠNG THẢO

THÁI NGUYÊN, 12/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

MỘT SỐ MỞ RỘNG CỦA LỚP MÔĐUN COHEN-MACAULAY

Mã số: ĐH2016-TN04-08

Xác nhận của tổ chức chủ trì	**Chủ nhiệm đề tài**
(*Ký, họ tên, đóng dấu*)	(*Ký, họ tên*)

ThS. LƯU PHƯƠNG THẢO

THÁI NGUYÊN, 12/2018

DANH SÁCH NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI VÀ ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

1. Thành viên thực hiện đề tài

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao
1	ThS. Lưu Phương Thảo	Khoa Toán, Trường ĐHSP	Chủ nhiệm
2	TS. Trần Đỗ Minh Châu	Khoa Toán, Trường ĐHSP	Cộng tác viên
3	ThS. Nguyễn Thị Ánh Hằng	Khoa Toán, Trường ĐHSP	Cộng tác viên
4	TS. Nguyễn Hữu Quân	Phòng KHCN-HTQT, Trường ĐHSP	Thư ký

2. Đơn vị phối hợp chính

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị
Trường ĐHKH - ĐHTN	Tư vấn, định hướng nghiên cứu	GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn

Mục lục

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung:

Tên đề tài: Một số mở rộng của lớp môđun Cohen-Macaulay

Mã số: ĐH2016-TN04-08

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Lưu Phương Thảo

Tổ chức chủ trì: Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Thời gian thực hiện: 30 tháng (từ 06/2016 đến 12/2018)

2. Mục tiêu:

Mục tiêu của đề tài là nghiên cứu một số mở rộng của lớp môđun Cohen-Macaulay trên vành giao hoán mà cụ thể là nghiên cứu về lớp môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s và tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng đồng thời nghiên cứu về quỹ tích không Cohen-Macaulay, quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.

3. Tính mới và sáng tạo:

Đề tài đã đưa ra những kết quả mới về tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng đồng thời mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua các tập giả giá chiều lớn hơn s.

4. Kết quả nghiên cứu:

- Kết quả chính đầu tiên của đề tài là đưa ra được mối liên hệ về tập các iđêan nguyên tố gắn kết và chiều của các môđun đối đồng điều địa phương Artin qua chuyển phẳng. Từ đó xét tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng.

- Kết quả chính thứ hai của đề tài là đưa ra mô tả quỹ tích không Cohen - Macaulay chiều lớn hơn s thông qua các tập giả giá thứ i chiều lớn hơn s. Ngoài ra, chúng tôi còn đưa ra công thức tính chiều của quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.

5. Sản phẩm:

5.1. Sản phẩm khoa học:

- Đăng 01 bài báo thuộc danh mục SCI

Le Thanh Nhan, Luu Phuong Thao, Tran Nguyen An (2018), "Local cohomology modules via certain flat extension rings", *Journal of Algebra, 503,* pp. 340-355.

- Đăng 01 bài báo trong nước

Lưu Phương Thảo (2018), "Non Cohen-Macaulay in dimension more than s locus", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ - Đại học Thái Nguyên,* tập 192, số 16, trang 23-28.

5.2. Sản phẩm đào tạo:

- Hướng dẫn 03 đề tài NCKH sinh viên

1. Đoàn Thị Kim Hồng (2016), *Biểu diễn thứ cấp của môđun Artin,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

2. Vũ Thị Oanh (2017), *Điều kiện xích của môđun,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

3. Phạm Thị Thoa (2018), *Iđêan nguyên tố trong một số lớp vành đặc biệt,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

- Hướng dẫn 03 luận văn tốt nghiệp sinh viên

1. Đoàn Thị Kim Hồng (2017), *Dãy đối chính quy và độ rộng của môđun Artin,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

2. Đoàn Thị Thanh Hoa (2017), *Môđun nội xạ và bao nội xạ,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

3. Vũ Thị Oanh (2018), *Chiều của môđun trên vành giao hoán,* Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu:

- Các bài báo khoa học là sản phẩm nghiên cứu của đề tài được xuất bản trên các tạp chí trong và ngoài nước.
- Các bài báo khoa học được phổ biến tới các độc giả thông qua thư viện truyền thống và thư viện điện tử. Các bài báo đó là tiền đề nghiên cứu tiếp theo cho các nhà toán học nghiên cứu về Đại số và Lý thuyết số.
- Các kết quả của đề tài cũng là tài liệu tham khảo cho sinh viên, học viên cao học, giảng viên, nghiên cứu sinh và các nhà toán học nghiên cứu về Đại số và Lý thuyết số.

Ngày ... tháng 12 năm 2018

Tổ chức chủ trì	**Chủ nhiệm đề tài**
(ký, họ tên, đóng dấu)	*(ký, họ tên)*
	Lưu Phương Thảo

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

Project title: On some generalizations of Cohen-Macaulay modules
Code number: ĐH2016–TN04–08
Coordinator: Ms. Luu Phuong Thao
Implementing institution: Thai Nguyen University of Education - TNU
Duration: 06/2016 - 12/2018.

2. Objective(s):

The objective of the research is to study some of the extensions of the Cohen-Macaulay module class on the commutative ring, namely, the study of the Cohen-Macaulay modules in dimension more than s and the Cohen-Macaulayness, the Cohen-Macaulayness in dimension more than s via flat extension and research on non-Cohen-Macaulay locus, non-Cohen-Macaulay in dimension more than s locus.

3. Creativeness and innovativeness:

The research gave new results on the Cohen-Macaulayness, the Cohen-Macaulayness in dimension more than s via flat extension and describes the non-Cohen-Macaulay in dimension more than s locus through the pseudo supports in dimension more than s.

4. Research results:

- The first main result of this research project gives some relations between the Artinian local cohomology modules via certain flat extension. Some applications of this result to study the Cohen-Macaulayness, the Cohen-Macaulayness in dimension more than s via flat extension.

- The second main result of this research project gives a description the non Cohen-Macaulay in dimension more than s locus via the pseudo supports in dimension more than s.

5. Products:

5.1. Scientific products:

- Publish 01 SCI paper

Le Thanh Nhan, Luu Phuong Thao, Tran Nguyen An (2018), "Local cohomology modules via certain flat extension rings", *Journal of Algebra, 503,* pp. 340-355.

- Publish 01 paper in Vietnam

Luu Phuong Thao (2018), "Non Cohen-Macaulay in dimension more than s locus", *Journal of Science and Technololy - TNU*, Vol. 192, No. 16, pp. 23-28.

5.2. Training products:

- 03 scientific research students

1. Doan Thi Kim Hong (2016), *Secondary representation of Artinian modules,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

2. Vu Thi Oanh (2017), *Chain conditions on modules,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

3. Pham Thi Thoa (2018), *Prime ideals in some special classes of rings,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

- 03 undergraduate thesis

1. Doan Thi Kim Hong (2017), *Regular cosequence and width of Artinian modules,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

2. Doan Thi Thanh Hoa (2017), *Injective modules and injective hull,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

3. Vu Thi Oanh (2018), *Dimension of modules in commutative rings,* Thai Nguyen University of Education - TNU.

6. Transfer alternatives, application institutions, impacts and

benefits of reserach results:

- Scientific articles are research articles of the topic published in domestic and foreign magazines.
- Scientific articles are disseminated to readers through traditional libraries and electronic libraries. These articles are the basis for further research for mathematicians studying Algebra and Number Theory.
- The results of the thesis are also reference materials for students, graduate students, lecturers, fellows and mathematicians who study Algebra and Number Theory.

Mở đầu

1. Tính cấp thiết của đề tài

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán Noether địa phương với $\mathfrak{m}$ là iđêan cực đại duy nhất. Cho M là R-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$. Ta luôn có mối quan hệ giữa hai bất biến độ sâu và chiều của M cho bởi $\operatorname{depth} M \leq \dim M$. Nếu $\operatorname{depth} M = \dim M$ thì M được gọi là *môđun Cohen-Macaulay*. Khi R là R-môđun Cohen-Macaulay, thì ta nói R là *vành Cohen-Macaulay*. Vành và môđun Cohen-Macaulay là lớp vành và môđun quan trọng trong Đại số giao hoán. Lớp vành và môđun này có nhiều ứng dụng trong Hình học đại số, Lý thuyết bất biến và Tổ hợp. Nhiều mở rộng của lớp vành và môđun Cohen-Macaulay đã được giới thiệu và quan tâm nghiên cứu. Hai mở rộng đầu tiên là lớp vành (môđun) Buchsbaum được đưa ra bởi W. Vogel và J. Stuckrad năm 1973 [40] và lớp vành (môđun) Cohen-Macaulay suy rộng được giới thiệu bởi N.T. Cường, P. Schenzel, N.V. Trung năm 1978 [37]. Ngoài ra còn rất nhiều các mở rộng khác của lớp vành và môđun này vẫn tiếp tục được giới thiệu và thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học như: lớp vành (môđun) Cohen-Macaulay chính tắc, lớp vành (môđun) Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc, lớp vành (môđun) Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s,... (có thể xem trong các công trình [31], [2], [17], [35]). Như vậy, việc nghiên cứu về các mở rộng của lớp vành và môđun Cohen-Macaulay vẫn là những vấn đề thời sự, đang được quan tâm trong nước cũng như trên thế giới.

Việc giải quyết những câu hỏi mở hay tìm ra những kết quả mới cho các vấn đề trên là cần thiết, thúc đẩy sự phát triển của Toán học, thúc đẩy sự hợp tác nghiên cứu Toán giữa cán bộ của ĐH Thái Nguyên và của các cơ sở đào tạo khác trong và ngoài nước, phục vụ đắc lực công tác đào tạo sau đại học ngành Toán của ĐH Thái Nguyên.

2. Mục tiêu của đề tài

Mục tiêu của đề tài là nghiên cứu một số mở rộng của lớp môđun Cohen-Macaulay trên vành giao hoán mà cụ thể là nghiên cứu về lớp môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s và tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng đồng thời nghiên cứu về quỹ tích không Cohen-Macaulay, quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.

3. Nội dung nghiên cứu của đề tài

Đề tài nghiên cứu về môđun đối đồng điều địa phương Artin qua chuyển phẳng mà cụ thể là đưa ra mối liên hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết của các môđun này qua chuyển phẳng, từ đó đưa ra mối liên hệ về chiều của chúng. Dựa trên những kết quả đó chúng tôi nghiên cứu tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng. Ngoài ra chúng tôi còn nghiên cứu về quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s và mô tả quỹ tích này thông qua các giả giá chiều lớn hơn s. Cụ thể, nội dung nghiên cứu của đề tài được trình bày trong báo cáo tổng kết này gồm ba chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về môđun đối đồng điều địa phương, biểu diễn thứ cấp và chiều của môđun Artin, môđun Cohen-Macaulay nhằm phục vụ cho các chương sau. Chương 2 và 3 trình bày các kết quả chính của đề tài. Chương 2 đưa ra các kết quả về mối quan hệ của các tập iđêan nguyên tố gắn kết của các môđun đối đồng điều địa phương Artin

(Định lý 2.1.6), mối liên hệ về chiều của các môđun này (Định lý 2.2.2). Từ đó đưa ra các kết quả nghiên cứu về tính Cohen-Macaulay và quỹ tích không Cohen-Macaulay qua chuyển phẳng (Mệnh đề 2.3.1, 2.3.2). Chương 3 trình bày về môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s, mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua các tập giả giá thứ i chiều lớn hơn s (Định lý 3.2.2), và cuối cùng là kết quả về chiều của quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng (Định lý 3.2.4).

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Tính catenary của vành

Tính catenary của các vành được quan tâm nghiên cứu đầu tiên bởi W. Krull từ năm 1937 [38]. Những công trình của W. Krull, M. Nagata, I. S. Cohen, D. Ferand và M. Raynaud, L. J. Ratliff, M. Brodmann, R. Heitmann, ... về tính catenary đã làm giàu đẹp lí thuyết này. Trước hết ta nhắc lại khái niệm *vành catenary*.

Định nghĩa 1.1.1. Cho $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ là các iđêan nguyên tố của R. Một dãy các iđêan nguyên tố $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ sao cho $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_{i+1}$, với mọi $i = 0, ..., n-1$, được gọi là một dãy iđêan nguyên tố *bão hoà* giữa $\mathfrak{q}$ và $\mathfrak{p}$ nếu với mọi i, không tồn tại một iđêan nguyên tố chèn giữa $\mathfrak{p}_i$ và $\mathfrak{p}_{i+1}$. Khi đó n được gọi là *độ dài* của dãy iđêan nguyên tố bão hòa trên. Ta nói vành R là *catenary* nếu với mọi cặp iđêan nguyên tố $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ của R thì mọi dãy iđêan nguyên tố bão hoà giữa $\mathfrak{q}$ và $\mathfrak{p}$ đều có chung độ dài.

Nhắc lại rằng năm 1937 W. Krull đã chứng tỏ rằng mọi đại số hữu hạn sinh trên một trường là catenary. Kết quả quan trọng thứ hai được chứng minh bởi I. Cohen năm 1946 rằng mọi vành địa phương đầy đủ là catenary. Sau đó M. Nagata đã chứng tỏ rằng mọi miền nguyên, địa phương tựa không trộn lẫn là catenary. Như vậy, hầu hết các vành được biết đến trong thực tế và trong những ứng dụng của Hình học đại số đều là catenary. Ví dụ đầu tiên về miền nguyên không catenary được đưa ra bởi M. Nagata năm 1956 (xem [22, Ví dụ 2, trang 203-205]). Ngoài ra bằng những lập luận đơn giản ta có nếu $\dim R \leqslant 2$ thì R là catenary; R là vành catenary nếu và chỉ nếu R/I là catenary với mọi iđêan I của R; R là catenary nếu và chỉ nếu $R_{\mathfrak{p}}$ là catenary với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R, ... Đặc trưng sau của tính catenary thường được sử dụng trong chứng minh những kết quả của đề tài.

Mệnh đề 1.1.2. (xem [29]) *Giả sử* $(R, \mathfrak{m})$ *là một vành địa phương Noether. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) R *là catenary;*

(ii) $\operatorname{ht} \mathfrak{p}/\mathfrak{q} = \dim R/\mathfrak{q} - \dim R/\mathfrak{p}$ *với mọi* $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$;

(iii) $\operatorname{ht} \mathfrak{p}_3/\mathfrak{p}_1 = \operatorname{ht} \mathfrak{p}_3/\mathfrak{p}_2 + \operatorname{ht} \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1$ *với mọi* $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 \in \operatorname{Spec} R$.

Từ định nghĩa vành catenary, ta dễ thấy rằng nếu R là miền nguyên địa phương catenary thì nó thoả mãn công thức chiều

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim R$$

với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R. Vì thế năm 1954, I. S. Cohen [12] đã hỏi rằng liệu một miền nguyên địa phương R thoả mãn công thức chiều $\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim R$ với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R thì R có là miền catenary? Câu trả lời khẳng định được R. J. Ratliff đưa ra vào năm 1972 [29, Định lý 2.2].

Hơn nữa năm 1977, S. McAdam và R. J. Ratliff đã mở rộng kết quả trên cho các vành địa phương đẳng chiều. Chú ý R được gọi là *đẳng chiều* nếu $\dim R/\mathfrak{p} = \dim R$ với mọi iđêan nguyên tố tối tiểu $\mathfrak{p}$ của R.

Định lý 1.1.3. (xem [20]) *Giả sử R là vành địa phương Noether đẳng chiều. Khi đó R là catenary nếu và chỉ nếu với mỗi iđêan nguyên tố* $\mathfrak{p}$ *của R ta có*

$$\operatorname{ht}\mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} = \dim R.$$

Định nghĩa 1.1.4. *Vành R được gọi là catenary phổ dụng nếu mỗi R-đại số hữu hạn sinh là catenary.*

Giả sử S là một R-đại số hữu hạn sinh, tức là tồn tại $a_1, \ldots, a_n \in S$ sao cho $S = R[a_1, \ldots, a_n]$. Khi đó tồn tại một toàn cấu vành $\varphi : R[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow S$, trong đó $R[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức n biến với hệ số trên R và $\varphi(x_i) = a_i, i = 1, \ldots, n$. Vì thế S đẳng cấu với một vành thương của vành đa thức $R[x_1, \ldots, x_n]$. Vì vành thương của vành catenary là catenary nên ta suy ra rằng vành R là catenary phổ dụng nếu và chỉ nếu mọi vành đa thức hữu hạn biến với hệ số trên R là catenary.

Sau đây là một số đặc trưng của vành catenary phổ dụng. Trước hết, ta nhắc lại theo M. Nagata [22] các khái niệm vành, môđun *tựa không trộn lẫn* (quasi-unmixed) và vành, môđun *không trộn lẫn* (unmixed).

Định nghĩa 1.1.5. Vành R được gọi là *tựa không trộn lẫn* (quasi-unmixed) nếu vành đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic $\widehat{R}$ của R là đẳng chiều, tức là $\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}} = \dim \widehat{R}$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in \min \operatorname{Ass} \widehat{R}$. Vành R được gọi là *không trộn lẫn* (unmixed) nếu $\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}} = \dim \widehat{R}$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass} \widehat{R}$. Một R-môđun hữu hạn sinh M được gọi là *tựa không trộn lẫn* (tương ứng *không trộn lẫn*) nếu vành $R/\operatorname{Ann}_R M$ là tựa không trộn lẫn (tương ứng không trộn lẫn).

Định lý 1.1.6. [19, Định lý 31.6] *Giả sử R là tựa không trộn lẫn. Khi đó*

(i) *R là catenary phổ dụng.*

(ii) $R_{\mathfrak{p}}$ *là tựa không trộn lẫn với mọi* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

(iii) *Nếu I là iđêan của R thì R/I là đẳng chiều nếu và chỉ nếu R/I là tựa không trộn lẫn.*

Định lý 1.1.7. [19, Định lý 31.7] *Các điều kiện sau là tương đương*

(i) *R là catenary phổ dụng;*

(ii) *$R[x]$ là catenary;*

(ii) *$R/\mathfrak{p}$ là tựa không trộn lẫn với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.*

Vì mỗi vành chiều 2 là catenary nên nếu $\dim R \leqslant 1$ thì

$$\dim R[x] = \dim R + 1 \leqslant 2,$$

do đó $R[x]$ là catenary. Vì vậy theo Định lý 1.1.7 ta thấy R là catenary phổ dụng nếu $\dim R \leqslant 1$.

1.2 Môđun đối đồng điều địa phương

Lý thuyết đối đồng điều địa phương được giới thiệu đầu tiên bởi A. Grothendieck vào những năm 1960 và nhanh chóng phát triển, thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới. Ngày nay, lý thuyết đối đồng điều địa phương đã trở thành công cụ không thể thiếu trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học như Đại số giao hoán, Hình học đại số, Đại số tổ hợp... Trong mục này chúng tôi nhắc lại khái niệm và một số tính chất quan trọng của môđun đối đồng điều địa phương. Trước tiên ta giới thiệu khái niệm hàm tử I-xoắn.

Định nghĩa 1.2.1. (Xem [3, Định nghĩa 1.1.1]) Cho I là iđêan của R. Với mỗi R-môđun N, đặt $\Gamma_I(N) = \bigcup\limits_{n \geq 0} (0 :_N I^n)$. Nếu $f : N \to N'$ là đồng cấu các R-môđun thì $f(\Gamma_I(N)) \subseteq \Gamma_I(N'))$. Do đó ta có đồng cấu $\Gamma_I(f) : \Gamma_I(N) \to \Gamma_I(N')$ được xác định bởi $\Gamma_I(f)(x) = f(x)$. Khi đó $\Gamma_I(-)$ là một hàm tử hiệp biến, khớp trái và nó được gọi là *hàm tử I-xoắn.*

Từ đó ta có định nghĩa môđun đối đồng điều địa phương như sau.

Định nghĩa 1.2.2. (Xem [3, Định nghĩa 1.2.1]) Với mỗi số nguyên $i \geq 0$, hàm tử dẫn xuất phải thứ i của $\Gamma_I(-)$ được gọi là *hàm tử đối đồng điều địa phương thứ i đối với I* và được kí hiệu là $H_I^i(-)$. Kết quả của tác động $H_I^i(-)$ vào R-môđun N được kí hiệu là $H_I^i(N)$ và được gọi là *môđun đối đồng điều địa phương thứ i của N với giá I.*

Sau đây là một số tính chất quan trọng của môđun đối đồng điều địa phương thường được dùng trong chứng minh các kết quả của đề tài. Định lý sau đây chỉ ra rằng môđun đối đồng điều địa phương không phụ thuộc vào vành cơ sở (xem [3, Định lý 4.2.1]). Chú ý rằng, nếu $f : R \to R'$ là một đồng cấu vành và N' là R'-môđun thì N' có cấu trúc R-môđun cảm sinh bởi f, trong đó phép nhân vô hướng của phần tử $r \in R$ với phần tử $m' \in N'$ là $f(r)m'$.

Định lý 1.2.3. (Tính độc lập với vành cơ sở). *Cho R' là R-đại số và N' là R'-môđun. Cho I là iđêan của R. Khi đó với mọi $i \geq 0$ ta có đẳng cấu các R-môđun $H^i_{IR'}(N') \cong H^i_I(N')$.*

Khi R' là R-đại số phẳng, ta có định lý sau (xem [3, Định lý 4.3.2]).

Định lý 1.2.4. (Định lý chuyển cơ sở phẳng). *Cho R' là R-đại số phẳng. Khi đó ta có R'-đẳng cấu $H^i_I(N) \otimes_R R' \cong H^i_{IR'}(N \otimes_R R')$ với mọi $i \geq 0$.*

Cho $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố bất kỳ của của R. Khi đó $R_\mathfrak{p}$ là R-đại số phẳng. Từ Định lý 1.2.4 ta luôn có $R_\mathfrak{p}$-đẳng cấu

$$H^i_I(N) \otimes_R R_\mathfrak{p} \cong H^i_{IR_\mathfrak{p}}(N \otimes_R R_\mathfrak{p}).$$

Hơn nữa, vì $N \otimes_R R_\mathfrak{p} \cong N_\mathfrak{p}$ với mọi R-môđun N nên

$$(H^i_I(N))_\mathfrak{p} \cong H^i_{IR_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}).$$

Một trong những kết quả quan trọng và có nhiều ứng dụng của lý thuyết đối đồng điều địa phương là tính triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương (xem [3, 6.1.2, 6.1.4])

Định lý 1.2.5. (Định lý triệt tiêu của Grothendieck) $H^i_I(N) = 0$ *với mọi* $i > \dim N$.

Định lý 1.2.6. (Định lý không triệt tiêu) *Giả sử* $(R, \mathfrak{m})$ *là vành địa phương và* M *là* R*-môđun hữu hạn sinh khác không có chiều* n*. Khi đó* $H^n_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$.

Mặc dù M là hữu hạn sinh nhưng nhìn chung môđun đối đồng điều địa phương $H^i_I(M)$ không là môđun hữu hạn sinh cũng không là môđun Artin. Trong trường hợp đặc biệt, môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại hoặc tại cấp cao nhất là các môđun Artin.

Định lý 1.2.7. *Giả sử rằng* $(R, \mathfrak{m})$ *là vành địa phương và* M *là* R*-môđun hữu hạn sinh. Khi đó*

(i) $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ *là* R*-môđun Artin với mọi số tự nhiên* i.

(ii) *Nếu* $\dim M = d$ *thì* $H^d_I(M)$ *là* R*-môđun Artin với mọi iđêan* I.

Phần còn lại của mục này dành để nhắc lại một số kiến thức về đối ngẫu Matlis và đối ngẫu địa phương. Ký hiệu $E(k)$ là bao nội xạ của R-môđun k với $k = R/\mathfrak{m}$. Ta kí hiệu $D_R(-)$ thay cho $\mathrm{Hom}(-, E(k))$. Với mỗi R-môđun M ta gọi $D_R(M)$ là *đối ngẫu Matlis* của M. Kết quả sau đây có thể xem trong [3, Định lý 10.2.12].

Định lý 1.2.8 (Định lý đối ngẫu Matlis)**.** *Cho* $(R, \mathfrak{m})$ *là vành giao hoán địa phương Noether đầy đủ và* M, A *là các* R*-môđun. Khi đó các mệnh đề sau là đúng.*

(i) *Nếu* M *là Noether thì* $D_R(M)$ *là Artin và* $M \cong D_R(D_R(M))$.

(ii) *Nếu* A *là Artin thì* $D_R(A)$ *là Noether và* $A \cong D_R(D_R(A))$.

Khi R là vành đầy đủ, Định lý đối ngẫu Matlis cho ta tương ứng giữa phạm trù các R-môđun Artin và phạm trù các R-môđun Noether, còn Định lý Đối ngẫu địa phương [3, Định lý 11.2.6] lại cho ta mối liên hệ giữa đối đồng điều địa phương và hàm tử Ext.

Định lý 1.2.9 (Định lý đối ngẫu địa phương). *Giả sử* $(R, \mathfrak{m})$ *là ảnh đồng cấu của một vành địa phương Gorenstein* $(R', \mathfrak{m}')$ *chiều* n' *và* $f : R' \to R$ *là toàn cấu vành. Giả sử* M *là một* R*-môđun hữu hạn sinh. Khi đó* $\mathrm{Ext}^j_{R'}(M, R')$ *là* R*-môđun hữu hạn sinh và ta có đẳng cấu:*

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong D_R(\mathrm{Ext}^{n'-i}_{R'}(M, R')).$$

1.3 Biểu diễn thứ cấp và chiều của môđun Artin

Lý thuyết biểu diễn thứ cấp cho các môđun được giới thiệu bởi I. G. Macdonald [18] có thể xem là đối ngẫu của lý thuyết phân tích nguyên sơ. Trong tiết này chúng ta nhắc lại một số khái niệm và kết quả về biểu diễn thứ cấp.

Định nghĩa 1.3.1. (i) Một R-môđun N được gọi là *thứ cấp* nếu $N \neq 0$ và với mọi $x \in R$, phép nhân bởi x trên N là toàn cấu hoặc lũy linh. Trong trường hợp này, $\mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}_R N)$ là iđêan nguyên tố, chẳng hạn là $\mathfrak{p}$, và ta gọi N là $\mathfrak{p}$*-thứ cấp.*

(ii) Cho N là R-môđun. *Một biểu diễn thứ cấp* của N là một phân tích $N = N_1 + \ldots + N_n$ thành tổng hữu hạn các môđun con $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp N_i. Nếu $N = 0$ hoặc N có một biểu diễn thứ cấp thì ta nói N là *biểu diễn được*. Biểu diễn thứ cấp này được gọi là *tối thiểu* nếu các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_i$ là đôi một khác nhau và không có hạng tử N_i nào là thừa, với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Dễ thấy rằng nếu N_1, N_2 là các môđun con $\mathfrak{p}$-thứ cấp của N thì N_1+N_2 cũng là môđun con $\mathfrak{p}$-thứ cấp của N. Vì thế mọi biểu diễn thứ cấp của N đều có thể đưa được về dạng tối thiểu bằng cách ghép chung những thành phần thứ cấp ứng với cùng một iđêan nguyên tố và bỏ đi những thành phần thừa. Tập hợp $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ là độc lập với việc chọn biểu diễn thứ cấp tối thiểu của N và được gọi là *tập các iđêan nguyên tố gắn kết* của N, kí hiệu là $\operatorname{Att}_R N$. Các hạng tử $N_i, i = 1, \ldots, n$, được gọi là *các thành phần thứ cấp* của N. Nếu $\mathfrak{p}_i$ là tối thiểu trong tập $\operatorname{Att}_R N$ thì $\mathfrak{p}_i$ được gọi là *iđêan nguyên tố gắn kết cô lập* của N và N_i được gọi là *thành phần thứ cấp cô lập* của N.

Mệnh đề 1.3.2. *Giả sử N là một R-môđun biểu diễn được. Khi đó các khẳng định sau là đúng.*
(i) $\operatorname{Att}_R N \neq \emptyset$ *khi và chỉ khi* $N \neq 0$.
(ii) *Tập các iđêan nguyên tố tối thiểu của R chứa* $\operatorname{Ann}_R N$ *chính là tập các phần tử tối thiểu của* $\operatorname{Att}_R N$.
(iii) *Cho $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ là dãy khớp các R-môđun biểu diễn được. Khi đó ta có*

$$\operatorname{Att}_R N'' \subseteq \operatorname{Att}_R N \subseteq \operatorname{Att}_R N' \cup \operatorname{Att}_R N''.$$

Định lý sau đây cho ta một lớp các môđun biểu diễn được.

Định lý 1.3.3. [18, 5.2] *Mọi môđun Artin đều biểu diễn được.*

Cho A là R-môđun Artin và $\widehat{r} \in \widehat{R}, u \in A$. Gọi $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Côsi trong R đại diện cho lớp $\widehat{r}$. Vì Ru có độ dài hữu hạn nên tồn tại số tự nhiên k sao cho $\mathfrak{m}^k u = 0$. Chú ý rằng tồn tại n_0 sao cho $r_n - r_m \in \mathfrak{m}^k$ với mọi $m, n \geq n_0$. Suy ra $r_n u = r_{n_0} u$ với mọi $n \geq n_0$. Ta định nghĩa tích vô hướng $\widehat{r}u = r_{n_0}u$. Khi đó A có cấu trúc tự nhiên như $\widehat{R}$-môđun. Với cấu trúc này, một môđun con của A xét như R-môđun khi và chỉ khi nó là môđun con của A xét như $\widehat{R}$-môđun. Do đó A là $\widehat{R}$-môđun Artin. Nếu xem $\widehat{R}$-môđun A này như là R-môđun xác định bởi đồng cấu tự nhiên $R \to \widehat{R}$ thì ta được cấu trúc R-môđun ban đầu trên A. Như vậy, tập iđêan nguyên tố gắn kết của A trên R và $\widehat{R}$ luôn xác định và ta có mối liên hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết này như sau.

Mệnh đề 1.3.4. [3, 8.2.4 và 8.2.5] $\operatorname{Att}_R(A) = \{\mathfrak{P} \cap R \mid \mathfrak{P} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(A)\}$.

Kết quả sau đây, gọi là *tính chất dịch chuyển địa phương yếu*, thường được dùng trong các chứng minh các kết quả ở phần sau.

Định lý 1.3.5. [32, Định lý 4.8] *Giả sử* $M \neq 0$ *và* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M)$ *sao cho* $\dim R/\mathfrak{p} = t$. *Giả sử* $i \geqslant 0$ *là một số nguyên và* $\mathfrak{q}$ *là iđêan nguyên tố với* $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ *sao cho* $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}}(H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}))$. *Khi đó* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^{i+t}_\mathfrak{m}(M))$.

Từ Định lý 1.3.5 ta có hệ quả sau.

Hệ quả 1.3.6. [32, Hệ quả 4.9] *Giả sử* $M \neq 0$ *và* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$ *với* $\dim R/\mathfrak{p} = t$. *Khi đó* $H^t_\mathfrak{m}(M) \neq 0$ *và* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R H^t_\mathfrak{m}(M)$.

Theo Định lý 1.2.7, môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá cực đại là Artin, do đó nó có biểu diễn thứ cấp (xem Định lý 1.3.3). Tập iđêan nguyên tố gắn kết của $H^d_\mathfrak{m}(M)$ được cho bởi công thức sau.

Định lý 1.3.7. [21, Định lý 2.2] *Giả sử* $M \neq 0$ *và* $\dim M = d$. *Khi đó* $H^d_\mathfrak{m}(M) \neq 0$ *và* $\operatorname{Att}_R(H^d_\mathfrak{m}(M)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M \mid \dim(R/\mathfrak{p}) = d\}$.

Ký hiệu $\dim_R R/\operatorname{Ann}_R A$ là chiều Krull của vành $R/\operatorname{Ann}_R A$. Khi đó theo Mệnh đề 1.3.2(ii), ta có

$$\dim(R/\operatorname{Ann} A) = \max\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R A\}.$$

Năm 1975 R. N. Roberts [30] đã giới thiệu một khái niệm chiều khác cho môđun Artin mà sau đó được D. Kirby [16] năm 1990 đổi tên thành chiều Noether để tránh nhầm lẫn với khái niệm chiều Krull đã quen biết như đã đề cập ở trên. Trong suốt đề tài này, chúng tôi dùng thuật ngữ "chiều Noether" của Kirby [16].

Định nghĩa 1.3.8. *Chiều Noether* của A, kí hiệu bởi $\operatorname{N-dim}_R A$, được định nghĩa bằng quy nạp như sau: Khi $A = 0$, ta đặt $\operatorname{N-dim}_R A = -1$. Cho $d \geq 0$ là một số nguyên không âm. Ta đặt $\operatorname{N-dim}_R A = d$ nếu $\operatorname{N-dim}_R A < d$ là sai và với mỗi dãy tăng các môđun con $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots$ của A, tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho $\operatorname{N-dim}_R(A_n/A_{n-1}) < d$ với mọi $n > n_0$.

R. N. Roberts [30] và D. Kirby [16] đã chỉ ra nhiều tính chất của chiều Noether cho các môđun Artin tương tự như các tính chất về chiều Krull cho các môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương, đặc biệt là kết quả dưới đây cho ta các cách tính chiều Noether cho các môđun Artin.

Định lý 1.3.9. *Nếu $A \neq 0$ và $\mathfrak{q}$ là iđêan sao cho $\ell(0 :_A \mathfrak{q}) < \infty$ thì có một đa thức $Q(n)$ với hệ số hữu tỷ sao cho $\ell_R(0 :_A \mathfrak{q}^{n+1}) = Q(n)$ khi $n \gg 0$ và*

$$\begin{aligned}\operatorname{N-dim}_R A &= \deg(\ell_R(0 :_A \mathfrak{q}^{n+1})) \\ &= \inf\{t \geq 0 : \exists x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{m} : \ell_R(0 :_A (x_1, \ldots, x_t)R) < \infty\}.\end{aligned}$$

Sau đây ta sẽ đưa ra so sánh giữa chiều Krull và chiều Noether của môđun Artin A. Trong trường hợp đặc biệt, ta có $\operatorname{N-dim}_R A = 0$ nếu và chỉ nếu $\dim R/\operatorname{Ann}_R A = 0$, nếu và chỉ nếu A có độ dài hữu hạn, khác 0, nếu và chỉ nếu $R/\operatorname{Ann}_R A$ là vành Artin. Trong trường hợp tổng quát, N.T. Cường và L.T. Nhàn đã đưa ra câu trả lời năm 2002.

Mệnh đề 1.3.10. [10, Mệnh đề 2.5] $\operatorname{N-dim}_R A \leqslant \dim(R/\operatorname{Ann} A)$.

Hơn nữa, cũng trong bài báo đó họ còn chỉ ra ví dụ mà dấu đẳng thức là không xảy ra [10, Ví dụ 4.1]. Xét $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên địa phương Noether chiều 2 được xây dựng bởi D. Ferrand và M. Raynaud [36] thoả mãn tính chất tồn tại một iđêan nguyên tố nhúng $\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Ass} \widehat{R}$ với $\dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}} = 1$. Khi đó $A = H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ là môđun Artin. Ta có

$$\dim R/\operatorname{Ann}_R A = 2 > 1 = \text{N-}\dim_R A.$$

Tiếp theo ta nhắc lại một kết quả về chiều của môđun đối đồng điều địa phương.

Định lý 1.3.11. [10, Định lý 3.1, Hệ quả 3.6] *Các mệnh đề sau là đúng.*

(i) $\text{N-}\dim_R H^i_{\mathfrak{m}}(M) \leq i$.

(ii) $\dim_R H^d_{\mathfrak{m}}(M) = d = \text{N-}\dim_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$.

Định lý 1.3.9 cho phép ta định nghĩa khái niệm hệ tham số cho môđun Artin.

Định nghĩa 1.3.12. Một hệ $x_1, \ldots, x_s$ gồm $s = \text{N-}\dim A$ phần tử của $\mathfrak{m}$ được gọi là *hệ tham số của* A nếu $\ell(0 :_A (x_1, \ldots, x_s)R) < \infty$. Một hệ $x_1, \ldots, x_i$, với $i \leqslant s$, các phần tử của $\mathfrak{m}$ được gọi là *một phần hệ tham số* của A nếu ta có thể bổ sung thêm các phần tử $x_{i+1}, \ldots, x_s$ của $\mathfrak{m}$ sao cho $x_1, \ldots, x_s$ là hệ tham số của A. Một phần tử $x \in \mathfrak{m}$ được gọi là *phần tử tham số của* A nếu $\text{N-}\dim_R(0 :_A x) = \text{N-}\dim_R A - 1$.

Các mệnh đề sau đây, được chứng minh bởi Z. Tang và H. Zakeri [34], cho ta các kết quả về đặc trưng một phần tử $x \in \mathfrak{m}$ là phần tử tham số của môđun Artin A và sự tồn tại một phần hệ tham số của môđun Artin A trong một iđêan I của R.

Mệnh đề 1.3.13. [34, Bổ đề 2.14] *Cho* $\text{N-}\dim_R A = s$ *và* $A = A_1 + \ldots + A_n$ *là một biểu diễn thứ cấp tối tiểu của* A *với* A_i *là* $\mathfrak{p}_i$*-thứ cấp. Cho* $x \in \mathfrak{m}$*. Khi đó* x *là phần tử tham số của* A *nếu và chỉ nếu* $x \notin \mathfrak{p}_i$ *với mọi* i *thoả mãn tính chất* $\text{N-}\dim_R A_i = s$.

Mệnh đề 1.3.14. [34, Mệnh đề 2.10] *Cho I là iđêan của R sao cho* $\text{N-dim}_R(0 :_A I) = \text{N-dim}_R A - r$. *Khi đó tồn tại một phần hệ tham số của A trong I có độ dài r, và mọi phần hệ tham số của A trong I có độ dài r đều là phần hệ tham số tối đại của A trong I.*

1.4 Môđun Cohen-Macaulay

Môđun Cohen-Macaulay và môđun Cohen-Macaulay suy rộng là hai lớp môđun quen thuộc và quan trọng trong Đại số giao hoán. Trong tiết này chúng ta nhắc lại khái niệm và một số kết quả thường sử dụng trong luận án về hai lớp môđun này. Ta ký hiệu $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán, địa phương, Noether với $\mathfrak{m}$ là iđêan cực đại, M là R-môđun hữu hạn sinh chiều d.

Ta luôn có bất đẳng thức $\operatorname{depth} M \leq \dim M$ (xem [5, Mệnh đề 1.2.12]). Trường hợp dấu đẳng thức xảy ra, ta có định nghĩa vành và môđun Cohen-Macaulay như sau.

Định nghĩa 1.4.1. (Xem [19, Trang 134]) M là *môđun Cohen-Macaulay* nếu $M = 0$ hoặc $M \neq 0$ và $\operatorname{depth} M = \dim M$. Nếu R là môđun Cohen-Macaulay trên chính nó thì ta nói R là *vành Cohen-Macaulay.*

Sau đây là một số tính chất của môđun Cohen-Macaulay thường được sử dụng trong luận án (xem [19, Định lý 17.3], [19, Trang 137]).

Mệnh đề 1.4.2. *Các mệnh đề sau đây là đúng.*

(i) *Nếu M là môđun Cohen-Macaulay thì* $\dim R/\mathfrak{p} = \dim M$ *với mọi* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$. *Khi đó M không có iđêan nguyên tố nhúng.*

(ii) *Giả sử M là môđun Cohen-Macaulay. Khi đó $M_\mathfrak{p}$ là $R_\mathfrak{p}$-môđun Cohen-Macaulay với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R.*

(iii) *M là môđun Cohen-Macaulay khi và chỉ khi mọi hệ tham số của M đều là M-dãy chính quy.*

(iv) *R là vành Cohen-Macaulay khi và chỉ khi vành các chuỗi lũy thừa hình thức $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ là vành Cohen-Macaulay.*

Để nêu một số đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay, trước hết, chúng ta nhắc lại khái niệm số bội (xem [40, Trang 24]). Một hệ các phần tử $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_t)$ của R sao cho $\ell(M/(x_1, \ldots, x_t)M) < \infty$ được gọi là *hệ bội* của M. Khi đó *ký hiệu bội* $e(\underline{x}; M)$ của M đối với hệ bội $\underline{x}$ được định nghĩa qui nạp theo t như sau: Với $t = 0$, tức là $\ell(M) < \infty$ ta đặt $e(\emptyset; M) = \ell(M)$. Giả sử $t \geqslant 1$. Đặt $(0 :_M x_1) = \{m \in M \mid mx_1 = 0\}$. Khi đó $(x_2, \ldots, x_t)$ là hệ bội của M/x_1M và $(0 :_M x_1)$. Vì thế ta định nghĩa

$$e(\underline{x}; M) = e(x_2, \ldots, x_t; M/x_1M) - e(x_2, \ldots, x_t; 0 :_M x_1).$$

Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan của R sao cho $\ell(M/\mathfrak{q}M) < \infty$. Khi đó, ta có *hàm Hilbert-Samuel* $P_{\mathfrak{q}}(n) = \ell(M/\mathfrak{q}^{n+1}M)$. Chú ý rằng tồn tại một đa thức $p_{\mathfrak{q}}(n)$ bậc d sao cho với n đủ lớn, ta có $P_{\mathfrak{q}}(n) = p_{\mathfrak{q}}(n)$. Hơn nữa, tồn tại các số nguyên $e_0(\mathfrak{q}; M) > 0, e_1(\mathfrak{q}; M), \ldots, e_d(\mathfrak{q}; M)$ sao cho với n đủ lớn, ta có

$$P_{\mathfrak{q}}(n) = e_0(\mathfrak{q}; M)\binom{n+d}{d} + e_1(\mathfrak{q}; M)\binom{n+d-1}{d-1} + \ldots + e_d(\mathfrak{q}; M).$$

Hệ số $e_0(\mathfrak{q}; M)$ gọi là *số bội của M ứng với iđêan* $\mathfrak{q}$. Nếu $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ là hệ tham số của M và $\mathfrak{q} = (x_1, \ldots, x_d)R$ thì $e_0(\mathfrak{q}; M) = e(\underline{x}; M)$. Hơn nữa, ta luôn có $0 \leqslant e(\underline{x}; M) \leqslant \ell(M/\underline{x}M)$ (xem [40, Bổ đề 3.3]).

Sau đây là một số đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay (xem [19, Định lý 17.3, Định lý 17.5, Định lý 17.11], Định lý 1.2.5).

Mệnh đề 1.4.3. *Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *M là môđun Cohen-Macaulay.*

(ii) *Tồn tại hệ tham số $\underline{x}$ của M sao cho $e(\underline{x}; M) = \ell(M/\underline{x}M)$.*

(iii) *Với mọi hệ tham số $\underline{x}$ của M ta có $e(\underline{x}; M) = \ell(M/\underline{x}M)$.*

(iv) *$\widehat{M}$ là môđun Cohen-Macaulay.*

(vi) *M/xM là Cohen-Macaulay với mọi phần tử M-chính quy $x \in \mathfrak{m}$.*

(vii) *$H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ với mọi $i = 0, \ldots, d$.*

Chương 2

Đối đồng điều địa phương qua mở rộng phẳng và quỹ tích không Cohen-Macaulay

Trong toàn bộ chương này ta luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether và là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. M là một R-môđun hữu hạn sinh. Ký hiệu $\widehat{R}, \widehat{M}$ tương ứng là đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic của R và M. Cho $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$, đặt $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$ và $r_{\mathfrak{P}} = \dim\big(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\big)$. Khi đó, đồng cấu $\varphi : R_{\mathfrak{p}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ cảm sinh từ đồng cấu tự nhiên $R \to \widehat{R}$ là một đồng cấu phẳng địa phương và $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cong \widehat{M}_{\mathfrak{P}}$. Do đó, theo [19, Định lý 23.2] ta có mối quan hệ giữa các tập các iđêan nguyên tố liên kết của $M_{\mathfrak{p}}$ và $\widehat{M}_{\mathfrak{P}}$ như sau

$$\operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) \mid \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})\}$$
$$\operatorname{Ass}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}}) = \bigcup_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}} \operatorname{Ass}(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}).$$

Như đã giới thiệu ở Chương 1, tập các iđêan nguyên tố gắn kết của môđun Artin được định nghĩa bởi I. G. Macdonald [18] đóng vai trò quan trọng tương tự như tập các iđêan nguyên tố liên kết của môđun hữu hạn sinh. Chú ý rằng với mỗi số nguyên bất kỳ $i \geq 0$ ta có $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$

là $R_\mathfrak{p}$-môđun Artin và $H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P})$ là $\widehat{R}_\mathfrak{P}$-môđun Artin. Do đó, một câu hỏi hoàn toàn tự nhiên đặt ra là các tập iđêan nguyên tố gắn kết của các môđun đối đồng điều địa phương này có quan hệ với nhau như thế nào? Mục tiêu thứ nhất của chương là trả lời cho câu hỏi trên. Trên cơ sở đó chúng tôi đưa ra mối liên hệ về chiều của các môđun đối đồng điều địa phương này. Mục tiêu thứ hai của chương là áp dụng các kết quả trên để nghiên cứu tính Cohen-Macaulay qua chuyển phẳng. Các kết quả trình bày trong Chương này được lấy từ bài báo [28].

Trước hết chúng tôi trình bày về mối quan hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết của các môđun đối đồng điều địa phương nêu trên.

2.1 Tập các iđêan nguyên tố gắn kết

Nhắc lại rằng một R-môđun M được gọi là *môđun phẳng* nếu hàm tử tenxơ $M \otimes_R \square : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_R$ là khớp. Đồng cấu vành $f : R \to S$ được gọi là *đồng cấu phẳng* nếu S là R-môđun phẳng.

Tính chất sau đây cho ta mối liên hệ giữa chiều và độ sâu của các môđun qua chuyển phẳng (xem [19, Định lý 23.3], [5, Định lý A.11]).

Bổ đề 2.1.1. *Cho $f : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ là đồng cấu địa phương giữa các vành Noether địa phương, M, N tương ứng là các môđun hữu hạn sinh trên R và S, giả thiết thêm rằng N là phẳng trên R. Khi đó*

(a) $\dim_S(M \otimes_R N) = \dim_R M + \dim_S N/\mathfrak{m}N$.

(b) $\operatorname{depth}_S(M \otimes_R N) = \operatorname{depth}_R M + \operatorname{depth}_S N/\mathfrak{m}N$.

Cho A là R-môđun Artin. Ta đã biết rằng khi đó A có cấu trúc tự nhiên như $\widehat{R}$-môđun Artin và theo Mệnh đề 1.3.4 ta luôn có

$$\operatorname{Att}_R(A) = \{\mathfrak{P} \cap R \mid \mathfrak{P} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(A)\}.$$

Tổng quát hơn, L. T. Nhàn và P. H. Quý đã chứng minh được tính chất chuyển tập iđêan nguyên tố gắn kết của một môđun Artin qua đồng cấu phẳng địa phương trong trường hợp vành thớ có chiều bằng 0 như sau.

Bổ đề 2.1.2. [27, Bổ đề 2.3]. *Cho A là R-môđun Artin. Giả sử $(S, \mathfrak{n})$ là một vành địa phương Noether và $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ là một đồng cấu phẳng địa phương. Giả thiết thêm rằng* $\dim(S/\mathfrak{m}S) = 0$. *Khi đó $A \otimes_R S$ là S-môđun Artin và*

$$\operatorname{Att}_R A = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{S}) \mid \mathfrak{S} \in \operatorname{Att}_S(A \otimes_R S)\}.$$

Trường hợp vành thớ $S/\mathfrak{m}S$ là vành Cohen-Macaulay có chiều d ta có kết quả sau của M. Brodmann và R. Y. Sharp về các môđun đối đồng điều địa phương qua chuyển phẳng.

Bổ đề 2.1.3. [4, Định lý 2.1] *Cho $h : (R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ là đồng cấu phẳng địa phương giữa các vành địa phương sao cho $S/\mathfrak{m}S$ là vành Cohen-Macaulay có chiều d. Khi đó, với mỗi R-môđun N, và mỗi số nguyên j ta có*

$$H^{d+j}_{\mathfrak{n}}\big(N \otimes_R S\big) \cong H^d_{\mathfrak{n}}\big(H^j_m(N) \otimes_R S\big)$$

và $H^{d+j}_{\mathfrak{n}}\big(N \otimes_R S\big) \neq 0$ khi và chỉ khi $H^j_{\mathfrak{m}}(N) \neq 0$.

Như vậy, nếu ta xét đồng cấu phẳng địa phương $\varphi : R_{\mathfrak{p}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ ở trên trong trường hợp $r_{\mathfrak{P}} = 0$ thì do Định lý chuyển cơ sở phẳng (Định lý 1.2.4) $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cong H^i_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$ nên theo Bổ đề 2.1.2 ta có

$$\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}\left(H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\right) = \left\{\varphi^{-1}(\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) \mid \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}\left(H^i_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})\right)\right\}.$$

Tuy nhiên, với $r_{\mathfrak{P}} > 0$ và giả sử $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0$ thì $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ không là $\widehat{R}_{\mathfrak{P}}$-môđun Artin vì

$$\dim \operatorname{Supp}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}\left(H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}}\right) = r_{\mathfrak{P}} > 0.$$

Do đó $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_\mathfrak{P} \ncong H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P})$. Mặc dù vậy ta vẫn có đẳng cấu sau.

Bổ đề 2.1.4. *Cho $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$ với $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. Nếu R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương thì*

$$H^i_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P}) \cong \begin{cases} H^{r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}\big(H^{i-r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes \widehat{R}_\mathfrak{P}\big) & \text{if } i \geq r_\mathfrak{P} \\ 0 & \text{if } i < r_\mathfrak{P}. \end{cases}$$

Hơn nữa, $H^i_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P}) \neq 0$ nếu và chỉ nếu $H^{i-r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$ với mọi $i \geq r_\mathfrak{P}$.

Chứng minh. Do R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương nên thớ hình thức $\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{P}$ là Cohen-Macaulay. Vì vậy ta suy ra được $\operatorname{depth}(\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{P}) = \dim(\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{P}) = r_\mathfrak{P}$. Lại có $\varphi : R_\mathfrak{p} \to \widehat{R}_\mathfrak{P}$ là đồng cấu phẳng địa phương và $M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_\mathfrak{P} \cong \widehat{M}_\mathfrak{P}$ nên theo Bổ đề 2.1.1 ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{depth}_{\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P}) &= \operatorname{depth}_{\widehat{R}_\mathfrak{P}}(M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_\mathfrak{P}) \\ &= \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) + \operatorname{depth}(\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{P}) \\ &= \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) + r_\mathfrak{P} \geq r_\mathfrak{P}. \end{aligned}$$

Do đó $H^i_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P}) = 0$ với mọi $i < r_\mathfrak{P}$. Kết quả cho trường hợp $i \geq r_\mathfrak{P}$ suy ra ngay từ Bổ đề 2.1.3. □

Chú ý rằng R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương nếu và chỉ nếu R là catenary phổ dụng và mọi thớ hình thức của R là Cohen-Macaulay (xem [15, Hệ quả 1.2]). Do đó, theo [27, Định lý 3.7] ta có nguyên lý nâng địa phương và nguyên lý nâng đầy đủ cho iđêan nguyên tố gắn kết của các môđun đối đồng điều địa phương. Đây là công cụ chủ yếu để chứng minh kết quả chính của phần này.

Bổ đề 2.1.5. *Cho $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ và $i \geq 0$ là một số nguyên. Giả sử rằng R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó*

(a) $\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big) = \big\{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\big\}$;

(b) $\operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \displaystyle\bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))} \operatorname{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$.

Định lý sau đây là kết quả chính của phần này cho ta mối quan hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết của $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ và của $H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$.

Định lý 2.1.6. *Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Giả sử $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$ và $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. Đặt $r_{\mathfrak{P}} = \dim\big(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\big)$. Khi đó với bất kỳ số nguyên $i \leq \dim M_{\mathfrak{p}}$, ta có*

(a) $\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \big\{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cap R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})\big\}$.

(b) $\operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}}) = \displaystyle\bigcup_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}\in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})} \operatorname{Ass}\big(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\big)$.

(c) *Với mọi $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$ thỏa mãn $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$ và $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap R$, ta có $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$ nếu và chỉ nếu $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ và $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$.*

Chứng minh. (a). Cho $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$. Vì R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương nên $R_{\mathfrak{p}}$ cũng là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Do đó, theo nguyên lý nâng địa phương (Bổ đề 2.1.5(a)) ta có

$$\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{q}}} H^{i-\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}).$$

Vì ánh xạ tự nhiên $R \to \widehat{R}$ là đồng cấu phẳng nên nó thỏa mãn tính chất going down. Do đó, từ giả thiết $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ và $\mathfrak{P} \cap R = \mathfrak{p}$ suy ra tồn tại $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ sao cho $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$. Theo Định lý chuyển cơ sở phẳng ta có

$$\begin{aligned}\Big(H^{i-\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}})\Big) \otimes_{R_{\mathfrak{q}}} \widehat{R}_{\mathfrak{Q}} &\cong H^{i-\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(M_{\mathfrak{q}} \otimes_{R_{\mathfrak{q}}} \widehat{R}_{\mathfrak{Q}})\\ &\cong H^{i-\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{Q}}).\end{aligned}$$

Lại do ánh xạ $\varphi : R_{\mathfrak{q}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{Q}}$ là một đồng cấu phẳng địa phương với $\dim\big(\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}\big) = 0$ nên theo Bổ đề 2.1.2, tồn tại một iđêan nguyên tố gắn kết $\mathfrak{Q}_1\widehat{R}_{\mathfrak{Q}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}} H^{i-\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{Q}})$ sao cho $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{Q}_1\widehat{R}_{\mathfrak{Q}} \cap R_{\mathfrak{q}}$. Suy ra $\mathfrak{Q}_1 \subseteq \mathfrak{Q}$ và $\mathfrak{Q}_1 \cap R = \mathfrak{q}$. Vì $\mathfrak{Q} \in \min \mathrm{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ nên ta có $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1$. Do đó $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}} H^{i-\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{Q}})$. Từ nguyên lý nâng địa phương ta có

$$\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i-\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})+\dim\left(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\right)}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}}).$$

Giả sử $\mathfrak{P}_1 \in \min \mathrm{V}(\mathfrak{p}\widehat{R})$ sao cho $\mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{P}$ và $r_{\mathfrak{P}} = \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) = \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}_1\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$. Vì R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương nên $R/\mathfrak{p}$ và $R/\mathfrak{q}$ là tựa không trộn lẫn (theo thuật ngữ của M. Nagata). Do vậy, $\dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) = \dim(R/\mathfrak{q})$ và $\dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}_1) = \dim(R/\mathfrak{p})$. Suy ra

$$r_{\mathfrak{P}} = \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}_1) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}) = \dim(R/\mathfrak{p}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}).$$

Chú ý rằng R và $\widehat{R}$ là catenary, bởi vậy ta có

$$\begin{aligned} i - \dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}) + \dim\left(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\right) &= i - \dim(R/\mathfrak{q}) + \dim(R/\mathfrak{p}) \\ &\quad + \dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}) \\ &= i + \dim(R/\mathfrak{p}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}) \\ &= i + r_{\mathfrak{P}}. \end{aligned}$$

Suy ra $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$ với $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cap R_{\mathfrak{p}}$. Như vậy,

$$\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \subseteq \left\{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cap R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})\right\}.$$

Ngược lại, giả sử $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$. Khi đó $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$. Theo Định lý chuyển cơ sở phẳng, với mỗi số nguyên $i \geq 0$, ta có đẳng cấu $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{m}\widehat{R}(\widehat{M})}$ các $\widehat{R}$-môđun. Do đó theo nguyên lý nâng địa phương ta thu được

$$\mathfrak{Q} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}+\dim(\widehat{R}/\mathfrak{P})}_{\mathfrak{m}\widehat{R}}(\widehat{M}) = \operatorname{Att}_{\widehat{R}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}+\dim(\widehat{R}/\mathfrak{P})}_{\mathfrak{m}}(M).$$

Vì R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương nên theo nguyên lý nâng đầy đủ (Bổ đề 2.1.2(b)) ta có $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R})$ với $\mathfrak{q}$ nào đó thuộc $\operatorname{Att}_R H_{\mathfrak{m}}^{i+r_{\mathfrak{P}}+\dim(\widehat{R}/\mathfrak{P})}(M)$. Lại theo nguyên lý nâng địa phương, ta suy ra được

$$\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}^{i+r_{\mathfrak{P}}+\dim(\widehat{R}/\mathfrak{P})-\dim(R/\mathfrak{p})}(M_{\mathfrak{p}}).$$

Từ tính không trộn lẫn của vành $R/\mathfrak{p}$, ta có thể kiểm tra được rằng $r_{\mathfrak{P}} = \dim(R/\mathfrak{p}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P})$. Suy ra $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$. Hơn nữa, vì $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R})$ nên ta có $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap R$ và $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$. Do tính phẳng của ánh xạ tự nhiên $R_{\mathfrak{p}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ nên ta có thể suy ra từ [19, Định lý 23.2(i)] rằng $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$. Từ đó khẳng định (a) được chứng minh.
(b). Giả sử $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$. Đặt $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap R$. Bằng cách chứng minh tương tự như trong phần cuối của (a), ta có thể chỉ ra rằng $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ và $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$.

Ngược lại, giả sử $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ và $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$. Khi đó $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$ và $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R})$. Vì $R/\mathfrak{q}$ là không trộn lẫn nên $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$. Hơn nữa, $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap R$ nên theo nguyên lý nâng địa phương ta có $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{q}}} H^{i-\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}})$. Vì $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ nên theo (a) ta được $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}} H^{i-\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})+r_{\mathfrak{Q}}}_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{Q}})$. Lại theo nguyên lý nâng địa phương ta được

$$\mathfrak{Q}R_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i-\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})+r_{\mathfrak{Q}}+\dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}}).$$

Vì $R/\mathfrak{q}$ là không trộn lẫn và $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R})$ nên $\dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) = \dim(R/\mathfrak{q})$. Suy ra $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ và do đó $r_{\mathfrak{Q}} = \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}) = 0$. Từ tính catenary của R và $\widehat{R}$ ta có

$$\begin{aligned}
i - &\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}) + r_{\mathfrak{Q}} + \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) \\
&= i - \dim(R/\mathfrak{q}) + \dim(R/\mathfrak{p}) + \dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}) \\
&= i + \dim(R/\mathfrak{p}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}) = i + r_{\mathfrak{P}}.
\end{aligned}$$

Suy ra $\mathfrak{Q}R_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$.

(c). Cho $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$ với $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$ và $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap R$. Theo (b) ta có $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$ nếu và chỉ nếu $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{q}}} H^{i}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ và $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$. Chú ý rằng $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$ nếu và chỉ nếu $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$ và $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R})$. Vì $R/\mathfrak{q}$ là không trộn lẫn nên $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R})$ nếu và chỉ nếu $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$. Suy ra $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$ nếu và chỉ nếu $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{q}}} H^{i}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ và $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$. □

2.2 Mối liên hệ về chiều của $H^{i}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ và $H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$

Như đã trình bày ở trên, cho A là R-môđun Artin thì A luôn có cấu trúc tự nhiên như $\widehat{R}$-môđun. Với cấu trúc này, một môđun con của A xét như R-môđun khi và chỉ khi nó là môđun con của A xét như $\widehat{R}$-môđun. Do đó A là $\widehat{R}$-môđun Artin. Đặt $\dim_R A := \dim(R/\operatorname{Ann}_R A)$. Nếu $A = 0$ thì chúng ta quy ước rằng $\dim A = -\infty$.

Từ Mệnh đề 1.3.2(ii) ta thấy chiều của một môđun Artin có thể được tính bằng maximum của chiều của các iđêan nguyên tố gắn kết của nó

$$\dim_R A = \max\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R A\}.$$

Do đó, theo Mệnh đề 1.3.4, ta luôn có $\dim_{\widehat{R}} A \leq \dim_R A$. Trường hợp A là môđun đối đồng điều địa phương Artin $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$, ta có dấu đẳng thức ở trên xảy ra khi R là vành thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương (xem [10, Hệ quả 3.2, 4.7] và [23, Mệnh đề 3.5]).

Bổ đề 2.2.1. *Nếu R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương thì*

$$\dim_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \dim_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \leq i$$

với mọi số nguyên $i \geq 0$.

Vì vậy ta có thể áp dụng Định lý 2.1.6 để so sánh chiều của các môđun đối đồng điều địa phương Artin $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và $H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P})$. Cụ thể ta có định lý sau.

Định lý 2.2.2. *Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Giả sử $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$ với $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. Đặt $r_\mathfrak{P} = \dim \widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{P}$. Khi đó với bất kỳ số nguyên $i \geq 0$ ta có*

$$\dim_{\widehat{R}_\mathfrak{P}} H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P}) = \dim_{R_\mathfrak{p}} H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) + r_\mathfrak{P}.$$

Chứng minh. Giả sử $i \geq 0$ là một số nguyên. Vì đồng cấu địa phương $R_\mathfrak{p} \to \widehat{R}_\mathfrak{P}$ là phẳng và vành $\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{P}$ là Cohen-Macaulay chiều $r_\mathfrak{P}$ nên từ Bổ đề 2.1.4 ta có $H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P}) = 0$ nếu và chỉ nếu $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 0$. Do đó, nếu $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 0$ thì cả hai vế đều bằng $-\infty$.

Giả sử rằng $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$. Đặt $k = \dim_{R_\mathfrak{p}} H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ thì $k \geq 0$. Theo Mệnh đề 1.3.2(ii), tồn tại một iđêan nguyên tố gắn kết $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}} H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ sao cho $k = \dim(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p})$. Vì $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ và $\mathfrak{P} \cap R = \mathfrak{p}$ nên tồn tại $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ sao cho $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$. Khi đó $\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_\mathfrak{P}} H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P})$ (theo Định lý 2.1.6(c)). Do đó, từ Mệnh đề 1.3.2(ii) ta có

$$\dim_{\widehat{R}_\mathfrak{P}} H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P}) \geq \dim(\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P}) = \dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}).$$

Vì $R/\mathfrak{q}$ và $R/\mathfrak{p}$ là không trộn lẫn và $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ nên ta có $\dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q})$ $= \dim(R/\mathfrak{q})$ và $r_\mathfrak{P} = \dim(R/\mathfrak{p}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P})$. Suy ra

$$\begin{aligned}\dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}) &= \dim(R/\mathfrak{q}) - \dim(R/\mathfrak{p}) + r_\mathfrak{P}\\ &= \dim(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}) + r_\mathfrak{P} = k + r_\mathfrak{P}.\end{aligned}$$

Ngược lại, đặt $t = \dim_{\widehat{R}_\mathfrak{P}} H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P})$ thì theo Bổ đề 2.1.4 ta có $t \geq 0$. Từ Mệnh đề 1.3.2(ii), tồn tại $\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_\mathfrak{P}} H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P})$ sao cho $t = \dim(\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P})$. Đặt $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap R$. Khi đó $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}} H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ (theo Định lý 2.1.6(c)). Do đó, từ Mệnh đề 1.3.2(ii) và do tính catenary của R và $\widehat{R}$, ta có

$$
\begin{aligned}
\dim_{R_\mathfrak{p}} H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) + r_\mathfrak{P} &\geq \dim(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}) + r_\mathfrak{P} \\
&= \dim(R/\mathfrak{q}) - \dim(R/\mathfrak{p}) + r_\mathfrak{P} \\
&= \dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}) \\
&= \dim(\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P}) = t.
\end{aligned}
$$

□

Hệ quả sau đây mô tả tính không triệt tiêu, tập các iđêan nguyên tố gắn kết và chiều của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^{r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}\Big(H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_\mathfrak{P}\Big)$.

Hệ quả 2.2.3. *Cho R là thương của vành Cohen-Macaulay địa phương, $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$ và $r_\mathfrak{P} = \dim(\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{P})$. Giả sử $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0$. Khi đó, môđun đối đồng điều địa phương $H^n_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_\mathfrak{P}) \neq 0$ khi và chỉ khi $n = r_\mathfrak{P}$.*

Hơn nữa, $H^{r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_\mathfrak{P})$ là $\widehat{R}_\mathfrak{P}$-môđun Artin có chiều bằng $r_\mathfrak{P} + \dim_{R_\mathfrak{p}}(H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}))$ và có tập iđêan nguyên tố gắn kết là

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Att}_{\widehat{R}_\mathfrak{P}}(H^{r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_\mathfrak{P})) \\
&\qquad = \{\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P} \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{q}\widehat{R}_\mathfrak{P}) \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R(H^{i+\operatorname{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})}_\mathfrak{m}(M))\}.
\end{aligned}
$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.1.4, $H^{r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_\mathfrak{P}) \cong H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M_\mathfrak{P}})$ nên $H^{r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}\Big(H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_\mathfrak{P}\Big)$ là $\widehat{R}$-môđun Artin. Chú ý rằng $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ là một $R_\mathfrak{p}$-môđun Artin nên nó là giới hạn thuận của một hệ thuận $\{A_n\}$, trong đó mỗi A_n là một $R_\mathfrak{p}$-môđun có độ dài hữu hạn. Vì ánh xạ tự nhiên $R_\mathfrak{p} \to \widehat{R}_\mathfrak{P}$ là hoàn toàn phẳng và vành $\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{P}$ là Cohen-Macaulay chiều $r_\mathfrak{P}$ nên mỗi môđun $A_n \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_\mathfrak{P}$ là một $\widehat{R}_\mathfrak{P}$-môđun hữu hạn sinh và là Cohen-Macaulay chiều $r_\mathfrak{P}$. Do đó $H^n_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(A_n \otimes_{R_\mathfrak{p}} \widehat{R}_\mathfrak{P}) = 0$ với mọi $n \neq r_\mathfrak{P}$. Vì tích tenxơ giao hoán với giới hạn thuận và hàm tử đối đồng điều địa phương cũng giao hoán với giới hạn thuận nên ta suy ra với mọi $n \neq r_{\mathfrak{P}}$ thì

$$\begin{aligned} H^n_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}}) &= H^n_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\varinjlim A_n \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}}) \\ &= H^n_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\varinjlim (A_n \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}})) \\ &= \varinjlim (H^n_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(A_n \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}})) = 0. \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 2.1.4 và Định lý 2.1.6, 2.2.2 ta có điều phải chứng minh. □

D. Kirby [16, Mệnh đề 2] đã chứng minh rằng có một đa thức Hilbert-Samuel của môđun Artin tương tự như đối với môđun hữu hạn sinh và ta có kết quả sau (xem [10, Hệ quả 2.5], [30, Định lý 6])

Bổ đề 2.2.4. *Cho A là một R-môđun Artin và I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Khi đó $\ell_R(0 :_A I^n)$ là một đa thức với $n \gg 0$, và*

$$\begin{aligned} \dim_{\widehat{R}} A &= \deg \ell_R(0 :_A I^n) \\ &= \inf \big\{ t \mid \exists x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{m} \textit{ sao cho } \ell_R(0 :_A (x_1, \ldots, x_t)R) < \infty \big\}. \end{aligned}$$

Giả sử $\dim_{\widehat{R}} A = t$ và a_t là hệ số cao nhất của đa thức $\ell_R(0 :_A I^n)$ với $n \gg 0$. Theo Brodmann và Sharp [4], *bội của A ứng với I* , ký hiệu $e'(I, A)$, được xác định như sau

$$e'(I, A) := a_t t!.$$

Chú ý rằng $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là một R-môđun Artin với mọi số nguyên $i \geq 0$ và nếu R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương thì

$$\begin{aligned} \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))} \mathrm{V}(\mathfrak{p}) &= \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R M \mid H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0\}, \end{aligned}$$

(xem [4, Mệnh đề 2.5]). Do đó theo [4, Định lý 2.4] ta có công thức bội liên kết của $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$.

Bổ đề 2.2.5. *Giả sử R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $i \geq 0$ là một số nguyên và I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. Khi đó*

$$e'(I, H^i_{\mathfrak{m}}(M)) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \\ \dim(R/\mathfrak{p}) = \dim_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M))}} \ell_{R_\mathfrak{p}}\big(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\big) e(I, R/\mathfrak{p}).$$

Tiếp theo chúng tôi sử dụng Định lý 2.1.6 và công thức bội liên kết trong Bổ đề 2.2.5 để đưa ra mối liên hệ giữa số bội của $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và của $H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P})$.

Định lý 2.2.6. *Giả sử rằng R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Cho $IR_\mathfrak{p}$ là một iđêan $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$-nguyên sơ của $R_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{J}\widehat{R}_\mathfrak{P}$ là iđêan của $\widehat{R}_\mathfrak{P}$ sao cho $\widehat{R}_\mathfrak{P}/(\mathfrak{J}\widehat{R}_\mathfrak{P} + \mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{P})$ có độ dài hữu hạn. Đặt $\mathfrak{L}\widehat{R}_\mathfrak{P} = I\widehat{R}_\mathfrak{P} + \mathfrak{J}\widehat{R}_\mathfrak{P}$. Khi đó $\mathfrak{L}\widehat{R}_\mathfrak{P}$ là một iđêan $\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}$-nguyên sơ của $\widehat{R}_\mathfrak{P}$ và*

$$e'(\mathfrak{L}\widehat{R}_\mathfrak{P}, H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P})) = e'(IR_\mathfrak{p}, H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})).e(\mathfrak{J}\widehat{R}_\mathfrak{P}, \widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{P}).$$

Chứng minh. Dễ thấy rằng $\mathfrak{L}\widehat{R}_\mathfrak{P}$ là một iđêan $\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}$-nguyên sơ của $\widehat{R}_\mathfrak{P}$. Đặt $k := \dim_{R_\mathfrak{p}} H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và

$$T = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}} H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \mid \dim(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}) = k\}.$$

Với mỗi $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in T$, đặt

$$T(\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P} \mid \mathfrak{Q} \in \min \mathrm{V}(\mathfrak{q}\widehat{R}), \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}\}.$$

Vì $R/\mathfrak{q}$ là không trộn lẫn nên ta có
$\dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) = \dim(R/\mathfrak{q}) = k + \dim R/\mathfrak{p}$, với mọi $\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P} \in T(\mathfrak{q})$. Suy ra

$$\dim(\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P}) = \dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}) = k + r_\mathfrak{P},$$

với mọi $\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P} \in T(\mathfrak{q})$. Do đó theo định lý 2.1.6(c) ta có

$$\bigcup_{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in T} T(\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_\mathfrak{P}} H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M}_\mathfrak{P}) \mid \dim(\widehat{R}_\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_\mathfrak{P}) = k + r_\mathfrak{P}\}.$$

Giả sử $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \bigcup\limits_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in T} T(\mathfrak{q})$. Theo Mệnh đề 1.3.2(iii) ta có

$$\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \min \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}}).$$

Suy ra $\operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}-\dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})}_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{M_{\mathfrak{Q}}}) = \{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}\}$ (theo Bổ đề 2.1.2(a)). Vì $\mathfrak{Q} \in \min \mathrm{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ và $R/\mathfrak{q}$ là không trộn lẫn nên

$$i + r_{\mathfrak{P}} - \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) = i - k.$$

Từ đó $\ell_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}\big(H^{i-k}_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{M_{\mathfrak{Q}}})\big) < \infty$ (theo Mệnh đề 1.3.2(ii)). Do $\mathfrak{Q} \in \min \mathrm{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ và ánh xạ $R_{\mathfrak{q}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{Q}}$ là hoàn toàn phẳng nên

$$\begin{aligned}\ell_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}\big(H^{i-k}_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{M_{\mathfrak{Q}}})\big) &= \ell_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}\Big(H^{i-k}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) \otimes_{R_{\mathfrak{q}}} \widehat{R}_{\mathfrak{Q}}\Big)\\ &= \ell_{R_{\mathfrak{q}}}\big(H^{i-k}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}})\big).\ell_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}).\end{aligned}$$

Do đó theo Bổ đề 2.2.5 ta có

$$\begin{aligned}&e'(\mathfrak{L}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}}))\\ &= \sum_{\substack{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})\\ \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) = k + r_{\mathfrak{P}}}} \ell_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}\big(H^{i+r_{\mathfrak{P}}-\dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})}_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{M_{\mathfrak{Q}}})\big).e(\mathfrak{L}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, \widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})\\ &= \sum_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in T} \sum_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in T(\mathfrak{q})} \ell_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}\big(H^{i-k}_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{M_{\mathfrak{Q}}})\big).e(\mathfrak{L}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, \widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}).\\ &= \sum_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in T} \ell_{R_{\mathfrak{q}}}\big(H^{i-k}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}})\big)\Big(\sum_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in T(\mathfrak{q})} \ell_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}})e(\mathfrak{L}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, \widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})\Big)\end{aligned}$$

Với mỗi $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in T$, chú ý rằng

$$\begin{aligned}\dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) &= \dim\Big(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}}\Big)\\ &= \dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}) + \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) = k + r_{\mathfrak{P}}.\end{aligned}$$

Do đó $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in T(\mathfrak{q})$ nếu và chỉ nếu $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$ và $\dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$ $= \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$. Do đó với mỗi $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in T$, từ công thức bội liên kết của

$\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ ứng với iđêan $\mathfrak{L}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}$, ta có

$$\sum_{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\in T(\mathfrak{q})} \ell_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}).e(\mathfrak{L}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, \widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) = e(\mathfrak{L}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, \widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}).$$

Vì ánh xạ $R_{\mathfrak{p}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ là hoàn toàn phẳng, bằng cách chứng minh tương tự [8, Bổ đề 6.2] ta có

$$\begin{aligned} e\big(\mathfrak{L}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, \widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\big) &= e\big(I\widehat{R}_{\mathfrak{P}} + \mathfrak{J}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}}\big) \\ &= e(IR_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}).e\big(\mathfrak{J}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, \widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\big). \end{aligned}$$

Do đó ta có công thức bội liên kết của $H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ ứng với $IR_{\mathfrak{p}}$

$$\begin{aligned} &e'(\mathfrak{L}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, H^{i+r_{\mathfrak{P}}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})) \\ &= \Big(\sum_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}\in T} \ell_{R_{\mathfrak{q}}}\big(H^{i-k}_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}})\big).e(IR_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})\Big)e\big(\mathfrak{J}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, \widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\big) \\ &= e'\big(IR_{\mathfrak{p}}, H^i_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\big).e\big(\mathfrak{J}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}, \widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\big). \end{aligned}$$

□

2.3 Quỹ tích không Cohen-Macaulay qua chuyển phẳng

Khi nghiên cứu về tính Cohen-Macaulay của vành và môđun thì những vấn đề về quỹ tích không Cohen-Macaulay cũng là một mảng đề tài thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Nhắc lại rằng M là môđun Cohen-Macaulay nếu $\operatorname{depth} M = \dim M$. Quỹ tích không Cohen-Macaulay của M, ký hiệu $\mathrm{nCM}(M)$, là tập hợp tất cả các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R sao cho $M_{\mathfrak{p}}$ không là $R_{\mathfrak{p}}$-môđun Cohen-Macaulay. Quỹ tích không Cohen-Macaulay đã được nghiên cứu bởi một số nhà toán học như R. Hartshorne, P. Schenzel, N. T. Cường khi vành cơ sở là thương của một vành Gorenstein. Các nghiên cứu tập trung chủ yếu vào tính chất đóng của quỹ tích theo tôpô Zariski (xem [14], [39]), chiều của quỹ tích (xem [6], [7]) và mô tả một số quỹ tích liên quan đến tính Cohen-Macaulay (xem [11], [26]). Trong đề tài này, chúng tôi quan tâm đến quỹ tích không Cohen-Macaulay qua chuyển phẳng.

Xét đồng cấu phẳng $\varphi : R_{\mathfrak{p}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$. Cho $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$, đặt $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$ và $r_{\mathfrak{P}} = \dim\big(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\big)$. Trước hết là một kết qủa về tác động của đồng cấu phẳng φ lên tính Cohen-Macaulay.

Mệnh đề 2.3.1. *Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó $M_{\mathfrak{p}}$ là Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu $\widehat{M}_{\mathfrak{P}}$ là Cohen-Macaulay.*

Chứng minh. Vì R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương nên $\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ là một vành Cohen-Macaulay chiều $r_{\mathfrak{P}}$. Do đó theo tính phẳng của đồng cấu tự nhiên $R_{\mathfrak{p}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$ và chú ý rằng $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cong \widehat{M}_{\mathfrak{P}}$ ta có $\dim_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} \widehat{M}_{\mathfrak{P}} = \dim_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} + r_{\mathfrak{P}}$ và $\operatorname{depth}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}} \widehat{M}_{\mathfrak{P}} = \operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} + r_{\mathfrak{P}}$. Suy ra $M_{\mathfrak{p}}$ là Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu $\widehat{M}_{\mathfrak{P}}$ là Cohen-Macaulay. $\square$

Kết quả tiếp theo cho ta mối liên hệ giữa $\operatorname{nCM}(M_{\mathfrak{p}})$ và $\operatorname{nCM}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$ qua chuyển phẳng.

Mệnh đề 2.3.2. *Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó*

(a) $\operatorname{nCM}(M_{\mathfrak{p}}) = \big\{\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cap R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{nCM}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})\big\}$;

(b) $\operatorname{nCM}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}}) = \bigcup_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{nCM}(M_{\mathfrak{p}})} \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$.

Chứng minh. (a). Giả sử $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{nCM}(M_{\mathfrak{p}})$. Khi đó $M_{\mathfrak{q}}$ không là Cohen-Macaulay. Lấy $\mathfrak{Q} \in \min \operatorname{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ sao cho $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$. Thế thì $\widehat{M}_{\mathfrak{Q}}$ không là Cohen-Macaulay theo Hệ quả 2.3.1(a). Suy ra $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{nCM}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$ and $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cap R_{\mathfrak{p}}$. Ngược lại, giả sử $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \operatorname{nCM}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})$ và $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cap R_{\mathfrak{p}}$. Khi đó $\widehat{M}_{\mathfrak{Q}}$ không là Cohen-Macaulay và do đó $M_{\mathfrak{q}}$ không là

Cohen-Macaulay theo Hệ quả 2.3.1(a). Suy ra $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{nCM}(M_{\mathfrak{p}})$.

(b). Giả sử $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{nCM}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$. Đặt $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \cap R_{\mathfrak{p}}$. Theo chứng minh (a) ở trên, ta có $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{nCM}(M_{\mathfrak{p}})$ và $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{V}(\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$. Ngược lại, giả sử $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{nCM}(M_{\mathfrak{p}})$ và $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{V}(\mathfrak{q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}})$. Let $\mathfrak{Q}_1 \in \min(\mathfrak{q}\widehat{R})$ sao cho $\mathfrak{Q}_1 \subseteq \mathfrak{Q}$. Khi đó $\mathfrak{Q}_1 \cap R = \mathfrak{q}$ và $\mathfrak{Q}_1\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{nCM}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$. Do đó, $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{nCM}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$. $\square$

Chương 3

Môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s

Trong toàn bộ chương này ta luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là một vành Noether địa phương, M là một R-môđun hữu hạn sinh với chiều Krull $\dim M = d$. Mục tiêu của chương này là nghiên cứu về một mở rộng khác của môđun Cohen-Macaulay, đó là lớp môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s, tập trung chủ yếu vào việc mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s và nghiên cứu chiều của quỹ tích này qua chuyển phẳng. Các kết quả trình bày trong Chương này được lấy từ bài báo [33] và một phần của bài báo [28].

3.1 Môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s

Ta đã biết rằng lớp môđun Cohen-Macaulay là lớp môđun rất quen thuộc và đóng vai trò quan trọng trong Đại số giao hoán. Nhắc lại rằng một môđun hữu hạn sinh M trên vành địa phương Noether $(R, \mathfrak{m})$ là môđun Cohen-Macaulay nếu mọi hệ tham số của M là M-dãy chính quy. Có nhiều mở rộng của lớp môđun này đã được giới thiệu và thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học như: lớp môđun Buchsbaum, Cohen-Macaulay suy rộng, Cohen-Macaulay chính tắc, Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc, Cohen-Macaulay dãy, Cohen-Macaulay suy rộng dãy, ... Cho $s \geq -1$ là một số nguyên. Khái niệm M-dãy chính quy chiều lớn hơn s được giới thiệu trong [1] là một mở rộng của khái niệm M-dãy chính quy quen thuộc và môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s được định nghĩa bởi N. Zamani [35] cũng là một trong số những mở rộng của môđun Cohen-Macaulay.

Định nghĩa 3.1.1. (xem [1], [35]). Một phần tử $x \in \mathfrak{m}$ được gọi là *M-chính quy chiều lớn hơn s* nếu $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M$ thỏa mãn $\dim(R/\mathfrak{p}) > s$. Một dãy $x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{m}$ được gọi là *M-dãy chính quy chiều lớn hơn s* nếu x_i là $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$-chính quy chiều lớn hơn s với mọi $i = 1, \ldots, t$. Ta nói rằng M là một *môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s* nếu mọi hệ tham số của M là M-dãy chính quy chiều lớn hơn s.

Dễ thấy rằng M-dãy chính quy chiều lớn hơn s với $s = -1, 0, 1$ tương ứng là M-dãy chính quy, f-dãy của M (theo thuật ngữ của N. T. Cường-P. Schenzel-N. V. Trung [37]) và dãy chính quy suy rộng của M (theo L.T. Nhàn [24]). Do đó, môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s với $s = -1, 0, 1$ tương ứng là môđun Cohen-Macaulay, f-môđun định nghĩa trong [37] và f-môđun suy rộng được giới thiệu trong [25]. Cũng dễ dàng kiểm tra được rằng nếu M là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s thì M/xM cũng là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s, với mọi phần tử tham số x của M.

Bổ đề sau chỉ ra một số đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s (xem [35, Mệnh đề 2.4]).

Bổ đề 3.1.2. *Các phát biểu sau là tương đương:*

(a) *M là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.*

(b) *Với bất kỳ một phần hệ tham số* $x_1, \ldots, x_t$ *của* M *và bất kỳ iđêan nguyên tố* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M/(x_1, \ldots, x_t)M)$ *thỏa mãn* $\dim R/\mathfrak{p} > s$, *ta luôn có*

$$\dim R/\mathfrak{p} = d - t.$$

(c) *Với bất kỳ* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R M$ *thỏa mãn* $\dim R/\mathfrak{p} > s$, *ta luôn có*

$$\operatorname{depth} M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = d.$$

(d) *Với* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R M$ *thỏa mãn* $\dim R/\mathfrak{p} > s$, *ta có* $M_{\mathfrak{p}}$ *là Cohen-Macaulay và* $\dim M_{\mathfrak{p}} + \dim R/\mathfrak{p} = d$.

Bổ đề tiếp theo, có thể dễ dàng suy ra được từ [13, Định lý 3.7], [9, Bổ đề 3.1], cho ta một đặc trưng khác của môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s thông qua đối đồng điều địa phương.

Bổ đề 3.1.3. *Cho* R *là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó* M *là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn* s *nếu và chỉ nếu*

$$\operatorname{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \leq s$$

với mọi số nguyên $i < \dim M$.

Sau đây là một kết quả về tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua đầy đủ hóa.

Mệnh đề 3.1.4. *Cho* R *là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó* M *là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn* s *nếu và chỉ nếu* $\widehat{M}$ *là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn* s.

Chứng minh. Nếu R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương thì

$$\operatorname{N-dim}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M) = \dim_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M) = \operatorname{N-dim}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}\widehat{R}}(\widehat{M})$$

với mọi $i \geq 0$. Do đó, theo Bổ đề 3.1.3 ta có M là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s nếu và chỉ nếu $\operatorname{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \leq s$ với mọi số nguyên

$i < \dim M$, nếu và chỉ nếu $\text{N-dim}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}\widehat{R}}(\widehat{M}) \leq s$ với mọi số nguyên $i < \dim \widehat{M}$, nếu và chỉ nếu $\widehat{M}$ là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s. $\square$

3.2 Quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s

Nhắc lại rằng quỹ tích không Cohen-Macaulay của một R-môđun M, ký hiệu $\mathrm{nCM}(M)$, là tập hợp tất cả các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R sao cho $M_\mathfrak{p}$ không là Cohen-Macaulay. Cho $i \geq 0$ là một số nguyên. Theo M. Brodmann và R. Y. Sharp [4], *giả giá thứ i của M,* ký hiệu $\mathrm{Psupp}^i_R(M)$, được xác định là

$$\mathrm{Psupp}^i_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq 0\}.$$

Năm 2010, N. T. Cường, L. T. Nhàn và N. T. K. Nga (xem [11]) đã dùng giả giá để mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay của M như sau

$$\mathrm{nCM}(M) = \bigcup_{0\leqslant i<j\leqslant d} (\mathrm{Psupp}^i_R(M) \cap \mathrm{Psupp}^j_R(M)).$$

Tương tự $\mathrm{nCM}(M)$ và giả giá $\mathrm{Psupp}^i_R(M)$, chúng tôi ký hiệu $\mathrm{nCM}_{>s}(M)$ và $\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M)$ tương ứng là quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s và giả giá thứ i chiều lớn hơn s của M. Mục đích của chúng tôi trong phần này là mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s thông qua giả giá thứ i chiều lớn hơn s của M. Trước hết chúng tôi đưa ra định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.2.1. (a) *Quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s của M*, ký hiệu $\mathrm{nCM}_{>s}(M)$, được xác định là tập tất cả các iđêan nguyên tố của R sao cho $M_\mathfrak{p}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s.
(b) Cho $i \geq 0$ là một số nguyên. *Giả giá thứ i chiều lớn hơn s của M*, ký hiệu bởi $\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M)$, được định nghĩa là

$$\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}} \big(H^{i-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\big) > s\}.$$

Chú ý rằng nếu $s = -1$ thì quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn -1 là quỹ tích không Cohen-Macaulay và giả giá thứ i chiều lớn hơn -1 của M chính là giả giá thứ i của M. Như vậy, chúng ta đã có mô tả trong trường hợp $s = -1$. Với $s \geq 0$ là một số nguyên, chúng tôi có định lý sau đây là kết quả chính của phần này.

Định lý 3.2.2.

$$\mathrm{nCM}_{>s}(M) \subseteq \bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant d} (\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M) \cap \mathrm{Psupp}^j_{>s}(M)).$$

Bao hàm thức ngược lại cũng đúng khi R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Hơn nữa, nếu M là đẳng chiều thì

$$\mathrm{nCM}_{>s}(M) = \bigcup_{1\leqslant i<d} \mathrm{Psupp}^i_{>s}(M).$$

Chứng minh. Cho $\mathfrak{p} \in \mathrm{nCM}_{>s}(M)$. Khi đó $M_\mathfrak{p}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s. Theo Bổ đề 3.1.3 tồn tại $1 \leqslant t < \dim M_\mathfrak{p}$ sao cho $\text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^t_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\right) > s$. Đặt $i = t + \dim(R/\mathfrak{p})$, ta có

$$\text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\right) > s.$$

Suy ra $\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^i_{>s}(M)$. Đặt $k = \dim M_\mathfrak{p}$ thì $t < k$. Vì $M_\mathfrak{p}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s nên ta có $k > s$. Do đó theo Định lý 1.3.11 ta suy ra rằng

$$\text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}(H^k_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})) = k > s.$$

Đặt $j = k + \dim(R/\mathfrak{p})$ thì $\text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^{j-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\right) > s$. Điều này kéo theo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^j_{>s}(M)$. Như vậy

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^i_{>s}(M) \cap \mathrm{Psupp}^j_{>s}(M).$$

Vì $1 \leq t < k = \dim M_\mathfrak{p}$ nên $1 \leq i < j \leq d$. Khi đó

$$\mathrm{nCM}_{>s}(M) \subseteq \bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant d} (\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M) \cap \mathrm{Psupp}^j_{>s}(M)).$$

Ngược lại, giả sử $\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^i_{>s}(M) \cap \mathrm{Psupp}^j_{>s}(M)$, $1 \leq i < j \leq d$. Ta có

$$\text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^{j-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\right) > s \text{ và } \text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\right) > s.$$

Dễ thấy rằng $j - \dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim M_\mathfrak{p}$. Khi đó tồn tại $t = j - \dim(R/\mathfrak{p}) < \dim M_\mathfrak{p}$ thỏa mãn

$$\text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^{t}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\right) > s.$$

Vì R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương nên từ Bổ đề 3.1.3 ta suy ra $M_\mathfrak{p}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s. Do đó, $\mathfrak{p} \in \mathrm{nCM}_{>s}(M)$. Điều này cho ta bao hàm thức

$$\bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant d} (\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M) \cap \mathrm{Psupp}^j_{>s}(M)) \subseteq \mathrm{nCM}_{>s}(M).$$

Tiếp theo giả sử M là đẳng chiều. Khi đó $\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M) \subseteq \mathrm{Psupp}^d_{>s}(M)$, với mọi $i < d$. Thật vậy, lấy bất kỳ $p \in \mathrm{Psupp}^i_{>s}(M)$, ta có

$$\text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\right) > s.$$

Vì R là catenary và M là đẳng chiều nên $\dim M_\mathfrak{p} = d - \dim R/\mathfrak{p}$. Do đó, theo Định lý 1.3.11 ta có

$$\begin{aligned}\text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^{d-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\right) &= d - \dim R/\mathfrak{p} \geq i - \dim R/\mathfrak{p} \\ &\geq \text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\right) > s.\end{aligned}$$

Do đó, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Psupp}^d_{>s}(M)$. Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}\mathrm{nCM}_{>s}(M) &= \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant d} (\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M) \cap \mathrm{Psupp}^j_{>s}(M)) \\ &= \bigcup_{1 \leqslant i < d} (\mathrm{Psupp}^i_{>s}(M).\end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Chú ý rằng khi R không là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương thì dấu đẳng thức trong Định lý 3.2.2 là không đúng. Sau đây là một ví dụ.

Ví dụ 3.2.3. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là một miền nguyên Noether địa phương chiều 2 được xây dựng bởi Ferrand and Raynaud trong [36] sao cho đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic $\widehat{R}$ của R có iđêan nguyên tố liên kết $\widehat{q}$ chiều 1. Khi đó R không là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Xét trường hợp $s = 0$, ta có R là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn 0. Do đó, $\mathrm{nCM}_{>0}(R) = \emptyset$. Vì $\text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^0_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})\right) = 0$ nên ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Psupp}^1_{>0}(R) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^{1-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})\right) > 0\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \dim R/\mathfrak{p} = 0\} = \{\mathfrak{m}\}.\end{aligned}$$

Mặt khác, cho bất kỳ $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, $\dim R/\mathfrak{p} = 1$ ta có $\dim R_\mathfrak{p} = \dim R - \dim R/\mathfrak{p} = 1$. Suy ra $\text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^1_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})\right) = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathrm{Psupp}^2_{>0}(R) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \text{N-dim}_{R_\mathfrak{p}}\left(H^{2-\dim R/\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p})\right) > 0\} \\ &= \{\mathfrak{m}\} \cup \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \dim R/\mathfrak{p} = 1\}.\end{aligned}$$

Do đó $\quad \mathrm{nCM}_{>0}(R) \subsetneq (\mathrm{Psupp}^1_{>0}(R) \cap \mathrm{Psupp}^2_{>0}(R))$.

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu chiều của quỹ tích không Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng.

Định lý 3.2.4. *Cho $s \geq -1$ là một số nguyên. Giả sử $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$ với $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. Cho R là thương của một vành Cohen-Macaulay địa phương. Khi đó*

(a) $\mathrm{nCM}_{>s}(M_\mathfrak{p}) \neq \emptyset$ *nếu và chỉ nếu* $\dim \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_\mathfrak{P}}) \geq r_\mathfrak{P}$

(b) *Nếu* $\mathrm{nCM}_{>s}(M_\mathfrak{p}) \neq \emptyset$, *thì* $\dim \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_\mathfrak{P}}) = \dim \mathrm{nCM}_{>s}(M_\mathfrak{p}) + r_\mathfrak{P}$.

Chứng minh. (a) Giả sử rằng $\mathrm{nCM}_{>s}(M_\mathfrak{p}) \neq \emptyset$. Khi đó ta có thể chọn $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \in \mathrm{nCM}_{>s}(M_\mathfrak{p})$ sao cho $\dim \mathrm{nCM}_{>s}(M_\mathfrak{p}) = \dim(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p})$. Suy ra $M_\mathfrak{q}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s. Cho $\mathfrak{Q} \in \min \mathrm{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ sao cho $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$. Vì $r_\mathfrak{Q} = 0$ nên theo Hệ quả 2.3.1(b) ta có $\widehat{M_\mathfrak{Q}}$ không là

Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s. Suy ra $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$. Do đó

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}}) &\geq \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) = \dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P})\\ &= \dim(R/\mathfrak{q}) - \dim(R/\mathfrak{p}) + r_{\mathfrak{P}} = \dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}) + r_{\mathfrak{P}}\\ &= \dim \mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}}) + r_{\mathfrak{P}} \geq r_{\mathfrak{P}}.\end{aligned}$$

Ngược lại, giả sử rằng $\dim \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}}) \geq r_{\mathfrak{P}}$. Vì $r_{\mathfrak{P}} \geq 0$, ta có $\mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}}) \neq \emptyset$. Suy ra tồn tại $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$ sao cho $\dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) \geq r_{\mathfrak{P}}$. Chú ý rằng $\widehat{M_{\mathfrak{Q}}}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s. Do đó theo Bổ đề 3.1.2 ta suy ra rằng phải xảy ra một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Tồn tại $\mathfrak{Q}_1\widehat{R}_{\mathfrak{Q}} \in \min \mathrm{Ass}_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{M_{\mathfrak{Q}}})$ sao cho

$$s < \dim \left(\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}/\mathfrak{Q}_1\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}\right) < \dim \widehat{M_{\mathfrak{Q}}};$$

Trường hợp 2: Tồn tại $\mathfrak{Q}_1\widehat{R}_{\mathfrak{Q}} \in \mathrm{Supp}_{\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}}(\widehat{M_{\mathfrak{Q}}})$ sao cho
$\dim \left(\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}/\mathfrak{Q}_1\widehat{R}_{\mathfrak{Q}}\right) > s$ và $\widehat{M_{\mathfrak{Q}_1}}$ không là Cohen-Macaulay.

Giả sử trường hợp 1 xảy ra. Khi đó $\mathfrak{Q}_1\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \min \mathrm{Ass}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$. Vì $\dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) \geq r_{\mathfrak{P}}$, nên ta có

$$\begin{aligned}s + r_{\mathfrak{P}} \leq s + \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) &< \dim \left(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}_1\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\right)\\ &< \dim \widehat{M_{\mathfrak{Q}}} + \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) \leq \dim \widehat{M_{\mathfrak{P}}}.\end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{M_{\mathfrak{P}}}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn $s + r_{\mathfrak{P}}$ theo Bổ đề 3.1.2. Do đó $M_{\mathfrak{p}}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s theo Hệ quả 2.3.1(b). Do đó, $\mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$.

Giả sử trường hợp 2 xảy ra. Khi đó $\mathfrak{Q}_1\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{Supp}_{\widehat{R}_{\mathfrak{P}}}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$ sao cho

$$\dim \left(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}_1\widehat{R}_{\mathfrak{P}}\right) > s + \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) \geq s + r_{\mathfrak{P}}$$

và $\widehat{M_{\mathfrak{Q}_1}}$ không là Cohen-Macaulay. Suy ra $\widehat{M_{\mathfrak{P}}}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn $s + r_{\mathfrak{P}}$ theo Bổ đề 3.1.2. Theo chứng minh trên, ta có $\mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$.

(b) Vì $\mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$, nên ta có thể chọn $\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}})$ sao cho $\dim \mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}}) = \dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}})$. Khi đó $M_{\mathfrak{q}}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s. Giả sử $\mathfrak{Q} \in \min \mathrm{V}(\mathfrak{q}\widehat{R})$ sao cho $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$. Vì $r_{\mathfrak{Q}} = 0$, nên theo Hệ quả 2.3.1(b) ta suy ra $\widehat{M_{\mathfrak{Q}}}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s. Suy ra $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$. Do đó

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}}) &\geq \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) = \dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) - \dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}) \\ &= \dim(R/\mathfrak{q}) - \dim(R/\mathfrak{p}) + r_{\mathfrak{P}} = \dim \mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}}) + r_{\mathfrak{P}}.\end{aligned}$$

Tiếp theo ta chứng minh bao hàm thức ngược lại. Vì $\mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$ nên theo (a), tồn tại $\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})$ sao cho

$$\dim \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}}) = \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) \geq r_{\mathfrak{P}}.$$

Từ $\widehat{M_{\mathfrak{Q}}}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s suy ra rằng $\widehat{M_{\mathfrak{Q}}}$ không là Cohen-Macaulay. Đặt $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap R$. Theo Hệ quả 2.3.1(a) ta có $M_{\mathfrak{q}}$ không là Cohen-Macaulay. Đặt

$$k := \max_{i < \dim M_{\mathfrak{q}}} \dim_{R_{\mathfrak{q}}} H^i_{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}})$$

thì $k \geq 0$. Theo Bổ đề 3.1.3, $M_{\mathfrak{q}}$ là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn k và $M_{\mathfrak{q}}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn $k-1$. Từ Hệ quả 2.3.1(b) suy ra rằng $\widehat{M_{\mathfrak{Q}}}$ là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn $k+r_{\mathfrak{Q}}$. Do đó $s \leq k+r_{\mathfrak{Q}}-1$. Dễ dàng kiểm tra được rằng

$$\begin{aligned}\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}) &= \dim(R/\mathfrak{q}) - \dim(R/\mathfrak{p}) \\ &= \big(\dim(\widehat{R}/\mathfrak{Q}) + r_{\mathfrak{Q}}\big) - \big(\dim(\widehat{R}/\mathfrak{P}) + r_{\mathfrak{P}}\big) \\ &= \dim(\widehat{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{Q}\widehat{R}_{\mathfrak{P}}) - r_{\mathfrak{P}} + r_{\mathfrak{Q}} \\ &= \big(\dim \mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}}) - r_{\mathfrak{P}}\big) + r_{\mathfrak{Q}}.\end{aligned}$$

Vì $\dim\big(\mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})\big) - r_{\mathfrak{P}} \geq 0$ nên tồn tại một iđêan $\mathfrak{p}_1$ của R nằm giữa $\mathfrak{q}$ và $\mathfrak{p}$ sao cho $\dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_1R_{\mathfrak{p}}) = \dim\big(\mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M_{\mathfrak{P}}})\big) - r_{\mathfrak{P}}$ và $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_1/\mathfrak{q}) =$

$r_{\mathfrak{Q}}$. Do $M_{\mathfrak{q}}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn $k-1$ nên ta có thể áp dụng Bổ đề 3.1.2 để chỉ ra rằng $M_{\mathfrak{p}_1}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn $k-1+r_{\mathfrak{Q}}$. Vì $s \leq k-1+r_{\mathfrak{Q}}$ nên $M_{\mathfrak{p}_1}$ không là Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s. Suy ra $\mathfrak{p}_1 R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}})$. Do đó,

$$\dim\big(\mathrm{nCM}_{>s}(M_{\mathfrak{p}})\big) \geq \dim\big(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_1 R_{\mathfrak{p}}\big) = \dim\big(\mathrm{nCM}_{>s}(\widehat{M}_{\mathfrak{P}})\big) - r_{\mathfrak{P}}.$$

$\square$

KẾT LUẬN

Đề tài đã thu được các kết quả sau:

- Hệ thống các kiến thức về môđun đối đồng điều địa phương, biểu diễn thứ cấp và chiều của các môđun Artin, môđun Cohen-Macaulay, môđun Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s, quỹ tích không Cohen-Macaulay.

- Đưa ra mối liên hệ giữa các tập iđêan nguyên tố gắn kết, mối liên hệ về chiều của các môđun đối đồng điều địa phương Artin $H^i_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và $H^{i+r_\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}\widehat{R}_\mathfrak{P}}(\widehat{M_\mathfrak{P}})$ qua chuyển phẳng.

- Nghiên cứu tính Cohen-Macaulay, tính Cohen-Macaulay chiều lớn hơn s qua chuyển phẳng.

- Mô tả quỹ tích không Cohen - Macaulay chiều lớn hơn s qua các tập giả giá thứ i chiều lớn hơn s.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

[1] Brodmann M., Nhan L. T. (2008), "A finiteness result for associated primes of certain Ext-modules", *Comm. Algebra*, 36, pp. 1527-1536.

[2] Brodmann M., Nhan L. T. (2012), "On canonical Cohen-Macaulay modules", *J. Algebra*, 371, pp. 480-491.

[3] Brodmann M., Sharp R. Y. (1998), *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press.

[4] Brodmann M., Sharp R. Y. (2002), "On the dimension and multiplicity of local cohomology modules", *Nagoya Math. J.*,167, pp. 217-233.

[5] Bruns W., Herzog J. (1993), *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press.

[6] Cuong N. T. (1992), "On the least degree of polynomials bounding above the differences between lengths and multiplicities of certain systems of parameters in local rings", *Nagoya Math. J.*, 125, pp. 105-114.

[7] Cuong N. T. (1991), "On the dimension of the non Cohen-Macaulay locus of local rings admitting dualizing complexes", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 109, pp. 479-488.

[8] Cuong N. T., Cuong D. T., Truong H. L. (2010), "On a new invariant of finitely generated modules over local rings", *Journal of Algebra and Its Applications*, 9, pp. 959-976.

[9] Cuong N. T., Morales M., Nhan L. T. (2003), "On the length of generalized fractions", *J. Algebra*, 265, pp. 100-113.

[10] Cuong N. T., Nhan L. T. (2002), "On the Noetherian dimension of Artinian modules", *Vietnam J. Math.*, (2)30, pp. 121-130.

[11] Cuong N. T., Nhan L. T., Nga N. T. K. (2010), "On pseudo supports and non Cohen-Macaulay locus of a finitely generated module", *J. Algebra*, 323, pp. 3029-3038.

[12] Cohen I. S. (1954), "Length of prime ideal chains", *Amer. J. Math.*, 76, pp. 654-668.

[13] Goto S., Nhan L. T. (2018), "On the sequentially polynomial type of modules", *J. Math. Soc. Japan*, 70, pp.363-383.

[14] Hartshorne R. (1966), *Residues and duality*, Lect. Notes in Math., 20, Berlin Heidelberg New York, Springer-Verllog.

[15] Kawasaki T. (2002), "On arithmetic Macaulayfication of Noetherian rings", *Trans. AMS.*, 354, pp. 123-149.

[16] Kirby D. (1990), "Dimension and length of Artinian modules", *Quart. J. Math. Oxford*, (2)41, pp. 419-429.

[17] Loan N. T. H., Nhan L. T. (2013), "On generalized Cohen-Macaulay canonical modules", *Comm. Algebra,* 41, pp. 4453-4462.

[18] Macdonald I. G. (1973), "Secondary representation of modules over a commutative ring", *Symposia Mathematica*, 11, pp. 23-43.

[19] Matsumura H. (1986), *Commutative ring theory*, Cambridge University Press.

[20] McAdam S., Ratliff L. J. (1977), "Semi-local taut rings", *Indiana Univ. Math. J.*, 26, pp. 73-79.

[21] Macdonald I. G., Sharp R. Y. (1972), "An elementary proof of the non-vanishing of certain local cohomology modules", *Quart. J. Math. Oxford*, (2)23, pp. 197-204.

[22] Nagata M. (1962), "Local rings", *Tracts in Pure and Appl. Math.*, No. 13 (Interscience).

[23] Nhan L. T., Chau T. D. M., (2014) "Noetherian dimension and co-localization of Artinian modules over local rings", *Comm. Algebra.*

[24] Nhan L. T. (2005), "On generalized regular sequences and the finiteness for associated primes of local cohomology modules", *Comm. Algebra*, 33, pp. 793-806.

[25] Nhan L. T., Morales M. (2006), "Generalized f-modules and the associated prime of local cohomology modules", *Comm. Algebra*, 34, pp. 863-878.

[26] Nhan L. T., Nga N. T. K., Khanh P. H. (2014), "Non Cohen-Macaulay locus and non generalized Cohen-Macaulay locus", *Comm. Algebra*, 42, pp. 4414-4425.

[27] Nhan L. T., Quy P. H. (2014), "Attached primes of local cohomology modules under localization and completion", *J. Algebra*, 420, pp. 475-485.

[28] Nhan L. T., Thao L. P., An T. N. (2018), "Local cohomology modules via certain flat extension rings", *Journal of Algebra, 503,* pp. 340-355.

[29] Ratliff L. J. (1972), "Catenary rings and the altitude formula", *Amer. J. Math.*, 94, pp. 458-466.

[30] Roberts R. N. (1975), "Krull dimension for Artinian modules over quasi local commutative rings", *Quart. J. Math. Oxford*, (2)26, pp. 269-273.

[31] Schenzel P. (2004), "On Birational Macaulayfications and Cohen-Macaulay canonical modules", *J. Algebra*, 275, pp. 751-770.

[32] Sharp R. Y. (1975), "Some results on the vanishing of local cohomology modules", *Proc. London Math. Soc.*, 30, pp. 177-195.

[33] Thao L. P. (2018), "Non Cohen-Macaulay in dimension more than s locus", *Journal of Science and Technololy - TNU*, Vol. 192, No. 16, pp. 23-28.

[34] Tang Z. and Zakeri H. (1994), "Co-Cohen-Macaulay modules and modules of generalized fractions", *Comm. Algebra*, (6)22, pp. 2173-2204.

[35] Zamani N. (2009), "Cohen-Macaulay modules in dimension $> s$ and results on local cohomology", *Comm. Algebra*, 37, pp. 1297-1307.

Tiếng Pháp

[36] Ferrand D., Raynaud M. (1970), "Fibres formelles d'un anneau local Noetherian", *Ann. Sci. E'cole Norm. Sup.*, (4)3, pp. 295-311.

Tiếng Đức

[37] Cuong N. T., Schenzel P., Trung N. V. (1978), "Verallgeminerte Cohen-Macaulay moduln", *Math-Nachr.*, 85, pp. 156-177.

[38] Krull W. (1937), "Zum Dimensionsbegriff der idealtheiorie", *Math. Z.,* 42, pp. 745-766.

[39] Schenzel P. (1975), "Einige Anwendungen der lokalen dualität und verallgemeinerte Cohen-Macaulay moduln", *Math. Nachr.*, 69, pp. 227-242.

[40] Stückrad J., Vogel W. (1973), "Eine Verallgemeinerung der Multiplicitats theorie", *J. Math. Kyoto Univ.,* 13, pp. 513-528.