

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ
THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

BÁO CÁO TÓM TẮT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

XỬ LÝ SONG SONG TRONG PHƯƠNG PHÁP RBF-FD
GIẢI BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT

Mã số: ĐH2015-TN07-03

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Ngô Mạnh Tường

Thái Nguyên, tháng 3 năm 2019

DANH SÁCH THÀNH VIÊN THAM GIA ĐỀ TÀI

TT	Họ tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nhiệm vụ
1	Đặng Thị Oanh	Đơn vị công tác: Bộ môn Khoa học máy tính - Trường ĐH Công nghệ thông tin và Truyền thông Chuyên môn: Công nghệ thông tin	Cố vấn chuyên môn
2	Trịnh Minh Đức	Đơn vị công tác: Bộ môn Mạng và An toàn thông tin - Trường ĐH Công nghệ thông tin và Truyền thông Chuyên môn: Công nghệ thông tin	Cài đặt thuật toán
3	Dương Thị Nhung	Đơn vị công tác: Phòng KH-CN&HTQT-Trường ĐH Công nghệ thông tin và Truyền thông Chuyên môn: Công nghệ thông tin	Thư ký hành chính

ĐƠN VỊ PHỐI HỢP

TT	Tên đơn vị	Nội dung phối hợp	Họ và tên người đại diện	Ghi chú
1	Trường ĐH Giessen, Germany	Thảo luận chuyên môn, viết chung bài báo quốc tế	GS. Oleg Davydov	

Mục lục

PHẦN MỞ ĐẦU	1
Chương 1. Kiến thức cơ sở	3
1.1. Bài toán truyền nhiệt dừng	3
1.2. Nội suy dữ liệu phân tán	3
1.3. Hàm cơ sở bán kính	4
1.4. Ma trận xác định dương, hàm xác định dương	4
1.5. Nội suy hàm cơ sở bán kính	5
1.6. Một số kiến thức cơ bản về lý thuyết xử lý song song	5
Chương 2. Tính toán song song cho phương pháp RBF-FD trong không gian hai chiều	6
2.1. Véc tơ trọng số trong công thức vi phân số	6
2.2. Rời rạc bài toán truyền nhiệt dừng	6
2.3. Thuật toán chọn tâm	6
2.4. Song song hóa việc chọn tâm và tính véc tơ trọng số	7
2.5. Thử nghiệm số	8
2.6. Kết luận	9
Chương 3. Phương pháp không lưới RBF-FD trong không gian ba chiều	11
3.1. Phương pháp không lưới RBF-FD	11
3.2. Thuật toán chọn tâm dựa trên các góc khối	11
3.3. Thử nghiệm số	12
3.4. Kết luận	14
KẾT LUẬN	15

Danh sách hình vẽ

2.1	Lưu đồ song song hóa thuật toán hỗ trợ chọn tâm ODP và tính véc tơ trọng số.	9
2.2	Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 2: (a) Miền Ω của phương pháp RBF-FD. (b) Phân luồng dữ liệu chạy song song trên 4 bộ xử lý của phương pháp RBF-FD. (c) Các sai số <i>rms</i> của FEM và phương pháp RBF-FD. (d) Thời gian chạy của phương pháp RBF-FD trên các bộ xử lý.	10
3.1	Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 3. Hình (a) minh họa sai số RRMS trên các tâm trong miền. Hình (b) biểu diễn mật độ của ma trận thưa của hệ (3.3) ứng với phương pháp RBF-FD và của ma trận cứng ứng với FEM.	13
3.2	Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 4: (a) Các sai số RRMS trên các nút trong miền. (b) Mật độ của ma trận hệ số.	13
3.3	(a) Miền Ω được tạo bởi lệnh <code>pdegplot</code> trong MATLAB PDE Toolbox. (b)–(d) Đồ thị các sai số RRMS và mật độ của ma trận hệ số sử dụng các thuật toán RBF-FD 1, 2, 3 và FEM. (e)–(f) Đồ thị các sai số RRMS và mật độ của ma trận hệ số ứng với phương pháp RBF-FD chọn các tập tâm hỗ trợ tính trọng số có 16, 18 hoặc 20 điểm gần ζ nhất và FEM.	14

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Đơn vị: Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung

- Tên đề tài: Xử lý song song trong phương pháp RBF-FD giải bài toán truyền nhiệt.
- Mã số: ĐH2015-TN07-03.
- Chủ nhiệm đề tài: ThS. Ngô Mạnh Tường.
- Tổ chức chủ trì: Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông - Đại học Thái Nguyên
- Thời gian thực hiện: Từ tháng 1 năm 2015 đến tháng 12 năm 2016 (gia hạn đến tháng 12 năm 2018).

2. Mục tiêu

- Xây dựng được thuật toán song song nhằm mục đích song song hóa quá trình xác định véc tơ trọng số trong phương pháp RBF-FD;
- Đánh giá hiệu quả của giải pháp song song hóa bằng lý thuyết và thử nghiệm;
- Thử nghiệm số trên tập dữ liệu phân tán lớn.

3. Tính mới và sáng tạo

- Đề xuất 3 thuật toán mới;
- Thử nghiệm số trên các thuật toán mới để so sánh với các thuật toán đã công bố.

4. Kết quả nghiên cứu

- Đề xuất thuật toán tính toán song song cho phương pháp RBF-FD trong việc tìm tập các tâm hỗ trợ tính toán véc tơ trọng số và tính toán véc tơ trọng số;
- Đề xuất 2 thuật toán chọn tâm hỗ trợ phương pháp không lưới RBF-FD trong không gian 3 chiều.

5. Sản phẩm

Sản phẩm khoa học

- 01 bài báo đăng trên tạp chí quốc tế thuộc danh mục scopus;
- 02 bài báo đăng trên tạp chí chuyên ngành;
- 01 bài báo đăng trên kỷ yếu hội thảo Quốc gia.
 1. Oleg Davydov, Dang Thi Oanh and Ngo Mạnh Tuong (2019), " Octant-Based Stencil Selection for Meshless Finite Difference Methods in 3D", *Vietnam journal of mathematics*, đã có chấp nhận đăng.
 2. Đặng Thị Oanh, Ngô Mạnh Tường (2019), "Song song hóa việc chọn tâm và tính véc tơ trọng số cho phương pháp không lưới RBF-FD giải phương trình Poisson", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ - Đại học Thái Nguyên*, tập 195, số 02, tr. 69-74.
 3. Đặng Thị Oanh, Ngô Mạnh Tường, Trịnh Minh Đức (2017), " Nghiên cứu sự ảnh hưởng của điều kiện tách biệt trong thuật toán sinh tâm thích nghi cho phương pháp không lưới giải bài toán elliptic ", *Kỷ yếu Hội nghị Khoa học Công nghệ quốc gia lần thứ X (Fair 2017) về Nghiên cứu cơ bản và ứng dụng Công nghệ thông tin*, tr. 667-673.
 4. Ngô Mạnh Tường (2015), "Phương pháp không lưới RBF-FD sử dụng nội suy Hermite RBF giải phương trình Poisson", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ - Đại học Thái Nguyên*, tập 132, số 02, tr. 171-175.

Sản phẩm đào tạo: Hướng dẫn 02 luận văn thạc sĩ bảo vệ thành công:

1. Lâm Văn Trì, *Nghiên cứu sự ảnh hưởng của bộ tâm nội suy đến độ chính xác của xấp xỉ đạo hàm dựa trên nội suy hàm cơ sở bán kính*, Luận văn tốt nghiệp năm 2016, Quyết định số 812/QĐ-ĐHCNTT&TT ngày 18/10/2016, tại Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông - Đại học Thái Nguyên.
2. Vũ Huy Hoàng Đô, *Sự ảnh hưởng của bộ tâm được chọn trong phương pháp không lưới RBF-FD*, Luận văn tốt nghiệp năm 2016, Quyết định số 49/QĐ-ĐHCNTT&TT ngày 18/01/2016, tại Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông - Đại học Thái Nguyên.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu:

Các bài báo và các công trình công bố trong các hội thảo sẽ là tài liệu cho những nghiên cứu sâu hơn trong chủ đề này. Kết quả nghiên cứu của đề tài cũng là nguồn tài liệu tham khảo hữu ích cho công tác giảng dạy cho sinh viên tại trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông - Đại học Thái Nguyên.

Ngày tháng năm 2019

Tổ chức chủ trì

Chủ nhiệm đề tài ...

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

- Project title: Parallel Processing For RBF-FD Method to Solve Heat Transfer Problem
- Code number: ĐH2015-TN07-03.
- Coordinator: M.Sc. Ngo Manh Tuong.
- Implementing institution: TNU - University of Information and Communication Technology .
- Duration: From January 2015 to December 2016 (extended until December 2018).

2. Objective(s):

- Construct a parallel algorithm for goal to parallel of process determining weight vector for RBF-FD method;
- Evaluate the effectiveness of parallelization solutions by theory and experiment;
- Experiment on large scattered data.

3. Creativeness and innovativeness:

- Propose 3 new algorithms;
- Numerical test on the new algorithms to compare with published algorithms.

4. Research results:

- Propose a parallel computing algorithm for the RBF-FD method in finding stencil support selection and computing the weight vector;
- Propose two stencil support selection algorithms for RBF-FD method in 3D.

5. Products:

Scientific product

- A paper in scopus international journal;
- Two papers in national journal;

- A paper in proceedings of national conference.
 1. Oleg Davydov, Dang Thi Oanh and Ngo Manh Tuong (2019), Octant-Based Stencil Selection for Meshless Finite Difference Methods in 3D", *Vietnam journal of mathematics*, accepted to publication.
 2. Dang Thi Oanh, Ngo Manh Tuong (2019), "Parallelization in choose the centers and compute the weight vectors for the meshless RBF-FD to solve poisson equation", *TNU-Journal of science and technology*, Vol. 195, No. 02, p. 69 - 74.
 3. Dang Thi Oanh, Ngo Manh Tuong, Trinh Minh Duc (2017), "Research the influence of separate conditions in adaptive refinement algorithm for meshless method to solve elliptic problem, *Proceedings of national conference (Fair 2017)*, pp.667-673.
 4. Ngo Manh Tuong (2015), "The RBF-FD meshless method based on RBF Hermite interpolation for solving Poisson equation", *TNU-Journal of science and technology*, Vol. 132, No. 02, p. 171 - 175.

Product training: Graduate study guide 02 Master's theses.

1. Lam Van Tri, *Research the influence of the center interpolation to the accuracy of approximating the derivative based on the radial basis interpolation function*, Graduation thesis in 2016, number 812/QĐ-ĐHCNTT&TT,18/10/2016, at TNU - University of Information and Communication Technology.
2. Vu Huy Hoang Do, *The influence of stencils selection to meshless RBF-FD method*, Graduation thesis in 2016, number 49/QĐ-ĐHCNTT&TT,18/01/2016, at TNU - University of Information and Communication Technology.

6. Transfer alternatives, application institutions, impacts and benefits of research results:

Articles and work published in seminars will be the materials for further research in the topic. The research results of the project are also useful references for teaching students at Thai Nguyen University of Information & Communication Technology.

PHẦN MỞ ĐẦU

1. Tính cấp thiết của vấn đề nghiên cứu

Phương pháp RBF - FD [6, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 20, 22, 23] là phương pháp không lưới sử dụng nội suy hàm RBF (Radial Basis Function) với cách tiếp cận địa phương và dựa trên sự rời rạc hóa giống như phương pháp FD (finite different). Phương pháp này sử dụng các tập điểm rời rạc trong miền xác định để tính nghiệm tại các điểm này. Một lợi thế của kỹ thuật rời rạc không lưới là chỉ cần dựa trên tập điểm độc lập phân bố bất kỳ. Do đó, chi phí dành cho sinh lưới, duy trì lưới và cập nhật lưới được loại trừ.

Các nghiên cứu về phương pháp RBF-FD và ứng dụng giải phương trình đạo hàm riêng, đã được các nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm. Các kết quả trong hướng nghiên cứu này đã đạt được là: Xây dựng được một số cách tính véc tơ trọng số dựa trên ý tưởng của phương pháp FD và phương pháp phần tử hữu hạn FEM (finite element method), xây dựng thuật toán chọn tham số hình dạng tối ưu, xây dựng thuật toán chọn tâm nội suy, xây dựng thuật toán làm mịn thích nghi. Các kết quả thử nghiệm trong [10, 12, 18, 20, 23] cho thấy nghiệm xấp xỉ tìm được bởi phương pháp RBF-FD trên các bài toán mẫu chính xác hơn nhiều so với nghiệm xấp xỉ tìm được bởi phương pháp FD và FEM. Tuy nhiên, các nghiên cứu trước đây mới chỉ quan tâm đến độ chính xác của lời giải số.

Trong phương pháp RBF-FD [10, 12, 18, 20, 23], với mỗi tâm nằm trong miền ta cần xác định một véc tơ trọng số, véc tơ này được xác định khi xác định được bộ tâm nội suy nằm trong lân cận của nó và véc tơ trọng số là nghiệm của hệ phương trình với ma trận hệ số là ma trận thưa. Công đoạn xác định véc tơ trọng số là tốn kém thời gian và hoàn toàn độc lập nhau, chính vì vậy vấn đề song song hóa trong phương pháp RBF-FD là khả thi và cấp thiết để làm giảm đáng kể chi phí về mặt thời gian.

2. Mục tiêu, đối tượng, phạm vi, cách tiếp cận, phương pháp nghiên cứu

- Mục tiêu

- Xây dựng được thuật toán song song nhằm mục đích song song hóa quá trình xác định véc tơ trọng số trong phương pháp RBF-FD;
- Đánh giá hiệu quả của giải pháp song song hóa bằng lý thuyết và thử nghiệm;
- Thử nghiệm số trên tập dữ liệu phân tán lớn.

- Đối tượng nghiên cứu: Đề tài tập trung vào việc song song hoá quá trình chọn tâm và tính véc tơ trọng số của phương pháp RBF-FD.

- Phạm vi nghiên cứu: Bài toán toán truyền nhiệt dừng.

- Cách tiếp cận:

Do các vấn đề có liên quan là những vấn đề trên thế giới đang nghiên cứu và phát triển nên công việc đầu tiên cần phải tiến hành là thu thập và hệ thống hóa các tài liệu chuyên môn liên quan đến những kết quả gần đây nhất về phương pháp RBF-FD và các kỹ thuật xử lý song song.

Các bước tiến hành sẽ tuân theo quy trình: nghiên cứu, phân tích, thiết kế giải pháp, cài đặt. Việc hợp tác với các tập thể và cá nhân trong và ngoài nước sẽ được đặc biệt quan tâm, tận dụng tối đa chất xám và công nghệ mới, nâng cao chất lượng và hiệu quả thực hiện đề tài.

- Phương pháp nghiên cứu: Phương pháp nghiên cứu của đề tài được lựa chọn là lý thuyết kết hợp với thực nghiệm. Quá trình được tiến hành dựa trên việc tìm hiểu tài liệu, cài đặt thử nghiệm sau đó đánh giá kết quả thực nghiệm và cải tiến nhằm nâng cao chất lượng.

Chương 1

Kiến thức cơ sở

1.1. Bài toán truyền nhiệt dừng

Phương trình truyền nhiệt một chiều [2] có dạng

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad k = \text{const} > 0. \quad (1.1)$$

Khi nhiệt độ không thay đổi theo thời gian thì $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ và ta có phương trình truyền nhiệt dừng một chiều là $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad a < x < b.$

Phương trình truyền nhiệt dừng hai chiều có dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1.2)$$

Phương trình truyền nhiệt dừng ba chiều là

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega.$$

1.2. Nội suy dữ liệu phân tán

Cho bộ dữ liệu $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n, x_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \mathbb{R}$, trong đó x_i là các vị trí đo, y_i là các kết quả tại vị trí đo. Giả sử u_1, u_2, \dots, u_n là các hàm cơ sở của không gian tuyến tính các hàm d biến liên tục [22]. Ký hiệu

$$F = \text{span} \{u_1, u_2, \dots, u_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k u_k, \quad c_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bài toán nội suy: Tìm hàm $P_f \in F$ thỏa mãn

$$P_f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Vì $P_f \in F$ nên

$$P_f(x) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.4)$$

từ (1.3) và (1.4) ta có

$$Ac = y. \quad (1.5)$$

Định nghĩa 1.2.1. (Không gian Haar) Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ chứa ít nhất n điểm và $F \subset C(\Omega)$ là không gian tuyến tính n chiều. Ta nói F là không gian Haar n chiều trên Ω nếu với bất kỳ các điểm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$ và $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{R}$, thì tồn tại hàm $s \in F$ sao cho $s(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ [22].

Định lý 1.2.1. F là không gian Haar n chiều khi và chỉ khi với bất kỳ các điểm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$ và cơ sở u_1, u_2, \dots, u_n của F , ta luôn có $\det(A) \neq 0$ [22].

Định lý 1.2.2. (Mairhuber Curtis) Giả sử rằng $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, chứa một điểm trong. Khi đó không tồn tại không gian Haar của các hàm liên tục trên Ω [22].

1.3. Hàm cơ sở bán kính

Định nghĩa 1.3.1. Một hàm $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm cơ sở bán kính (RBF) nếu ở đó tồn tại một hàm $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $\phi(x) = \varphi(\|x\|_2)$, trong đó $\|x\|_2$ là chuẩn Euclid [22].

1.4. Ma trận xác định dương, hàm xác định dương

Ma trận xác định dương

Định nghĩa 1.4.1. Ma trận thực, đối xứng $A = [A_{ij}]_{n \times n}$ được gọi là xác định dương nếu dạng toàn phương tương ứng không âm, tức là

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_j c_k A_{ij} \geq 0, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

hay

$$c^T A c \geq 0 \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $c = (0, 0, \dots, 0)^T$ [22].

Hàm xác định dương

Định nghĩa 1.4.2. Hàm $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, được gọi là xác định dương trên \mathbb{R}^d nếu và chỉ nếu nó là hàm chẵn và với mọi bộ tâm phân biệt từng đôi một $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$, với mọi véc tơ $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ thì dạng toàn phương

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j c_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0. \quad (1.6)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi c là véc tơ 0 [22, 13].

Định nghĩa 1.4.3. Hàm một biến $\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là xác định dương trên \mathbb{R}^d nếu hàm nhiều biến tương ứng $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^d$, là xác định dương [22, 13].

Hàm bán kính xác định dương

Định nghĩa 1.4.4. Một hàm được gọi là hàm bán kính xác định dương nếu nó vừa là hàm bán kính vừa đồng thời xác định dương [22, 13].

1.5. Nội suy hàm cơ sở bán kính

Giả sử có bộ tâm $\{x_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ và hàm $\Phi(x)$ sao cho

$$\Phi_k(x) = \Phi(x - x_k) = \varphi(\|x - x_k\|), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Khi đó, nội suy hàm số dựa trên các hàm cơ sở bán kính là tìm hàm

$$P_f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi(\|x - x_k\|)$$

thỏa mãn điều kiện nội suy (1.3).

1.6. Một số kiến thức cơ bản về lý thuyết xử lý song song

Định nghĩa 1.6.1. Xử lý song song là quá trình xử lý gồm nhiều tiến trình được kích hoạt đồng thời và cùng tham gia giải quyết một vấn đề, nói chung là thực hiện trên những đa bộ xử lý [1].

Định nghĩa 1.6.2. Cho $g(x), f(x)$ là hai hàm có giá trị dương. Ta nói một thuật toán có độ phức tạp tính toán $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ khi và chỉ khi tồn tại số C dương và số nguyên x_0 sao cho $0 \leq f(x) \leq C \times g(x)$, với mọi số lượng dữ liệu vào $x \geq x_0$.

Chương 2

Tính toán song song cho phương pháp RBF-FD trong không gian hai chiều

2.1. Véc tơ trọng số trong công thức vi phân số

Giả sử D là toán tử vi phân tuyến tính và $X = \{x_i\}_{i=0}^n$ là bộ tâm phân bố không đều trong \mathbb{R}^d . Ta tìm được công thức vi phân số của toán tử D

$$Du(x) \approx \sum_{i=0}^n w_i(x)u(x_i), \quad (2.1)$$

trong đó véc tơ $w = [w_0, \dots, w_n]^T$ được gọi là *stencil* hay còn gọi là *véc tơ trọng số* được tìm bởi công thức

$$\Phi_X w = D\Phi(x_0 - \cdot)|_X, \quad (2.2)$$

với $\Phi_X := [\Phi(x_i - x_j)]_{i,j=0}^n, D\Phi(x_0 - \cdot)|_X := [Ds(x_0 - x_i)]_{i=0}^n$.

2.2. Rời rạc bài toán truyền nhiệt dừng

Cho miền mở $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ và các hàm số f xác định trên Ω , g được xác định trên $\partial\Omega$. Tìm $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$\Delta u = f \text{ trên } \Omega, \quad (2.3)$$

$$u|_{\partial\Omega} = g. \quad (2.4)$$

Khi đó bài toán (2.3)–(2.4) được rời rạc thành hệ phương trình tuyến tính

$$\sum_{\xi \in \Xi_\zeta} w_{\zeta, \xi} \hat{u}(\xi) = f(\zeta), \quad \zeta \in \Xi_{\text{int}}, \quad (2.5)$$

$$\hat{u}(\xi) = g(\xi), \quad \xi \in \partial\Xi. \quad (2.6)$$

2.3. Thuật toán chọn tâm

Algorithm 1. [Thuật toán 1, [18]] Thuật toán ODP chọn tập các tâm hỗ trợ

Input: Ξ, ζ . *Output:* Ξ_ζ .

Các tham số: k (số điểm trong $\Xi_\zeta \setminus \{\zeta\}$), $\nu > 1.0$ (tham số góc đều), $c > 1.0$ (khoảng cách),

và $m > k$. Các giá trị tham số được sử dụng trong thử nghiệm số $k = 6$, $v = 2.5$, $c = 3.0$ và $m = 50$.

I. Tìm m điểm gần nhất ξ_1, \dots, ξ_m trong $\Xi \setminus \{\zeta\}$ đến ζ , sắp xếp theo chiều tăng dần về mặt khoảng cách đến ζ , tập ban đầu $\Xi_\zeta := \{\zeta, \zeta_1, \dots, \zeta_k\} = \{\zeta, \xi_1, \dots, \xi_k\}$ và $i := k + 1$.

II. While $i \leq m$:

1. Nếu $\|\zeta - \xi_i\| \geq \frac{c}{2k} \sum_{j=1}^k (\|\zeta_j - \zeta\| + \|\zeta_j - \zeta_{j+1}\|)$, thì STOP và trả về Ξ_ζ .

2. Tính các góc $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{k+1}$ được tạo bởi tập mở rộng $\{\zeta'_1, \dots, \zeta'_{k+1}\} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_k, \xi_i\}$. Nếu các góc giữa tia $\zeta \xi_i$ và hai tia lân cận của nó lớn hơn góc nhỏ nhất $\underline{\alpha}' := \underline{\alpha}(\zeta'_1, \dots, \zeta'_{k+1})$:

a. Tìm j sao cho $\alpha'_j = \underline{\alpha}'$. Chọn $p = j$ hoặc $p = j + 1$ phụ thuộc vào $\alpha'_{j-1} < \alpha'_{j+1}$ hoặc $\alpha'_{j-1} \geq \alpha'_{j+1}$.

b. Nếu $\mu(\{\zeta'_1, \dots, \zeta'_{k+1}\} \setminus \{\zeta'_p\}) < \mu(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$:

i) Cập nhật $\Xi_\zeta := \{\zeta, \zeta_1, \dots, \zeta_k\} = \{\zeta, \zeta'_1, \dots, \zeta'_{k+1}\} \setminus \{\zeta'_p\}$.

ii) Nếu $\bar{\alpha}(\zeta_1, \dots, \zeta_k) \leq v \underline{\alpha}(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$, thì STOP và trả về Ξ_ζ .

3. Nếu $i = m$:

Tìm m điểm gần nhất tiếp theo $\xi_{m+1}, \dots, \xi_{2m}$ trong $\Xi \setminus \{\zeta\}$ đến ζ , xếp theo chiều tăng dần về mặt khoảng cách đến ζ và đặt $m := 2m$.

4. Đặt $i := i + 1$.

Độ phức tạp của thuật toán 1: Giả sử tập các tâm rời rạc Ξ có q điểm và tập Ξ_{int} có n điểm. Khi đó độ phức tạp tính toán của thuật toán 1 là $\mathcal{O}(n \cdot m \cdot \log(q))$.

2.4. Song song hóa việc chọn tâm và tính véc tơ trọng số

Algorithm 2. [Thuật toán 2, [3]] Thuật toán tính toán song song

Input: Bộ tâm rời rạc Ξ, Ξ_{int}, N . *Output:* Tập các véc tơ trọng số $w_\zeta, \zeta \in \Xi_{int}$.

Các tham số: Các tham số của thuật toán ODP: k, v, c, m . Khởi tạo $w_\zeta := \emptyset$.

I. Phân hoạch dữ liệu cho N bộ xử lý

1. $n_1 := \lceil \frac{n}{N} \rceil; i := 1; j := 0$.

2. While $i \leq N$

- a. If $i = N$ then $n^{(i)} := n_1(1 - N) + n$
Else $n^{(i)} := n_1$;
- b. $\Xi_{\text{int}}^{(i)} := \left\{ \zeta_{j+1}, \zeta_{j+2}, \dots, \zeta_{j+n^{(i)}} \right\}$;
- c. $j := j + n^{(i)}$;
- d. $i := i + 1$.

II. Đối với mỗi bộ xử lý thứ $i \in N$

1. Với mỗi $\zeta_j \in \Xi_{\text{int}}^{(i)}$
 - a. Sử dụng thuật toán chọn tâm ODP, tìm các tập $\Xi_{\zeta_j}^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, n^{(i)}$;
 - b. Tính các véc tơ trọng số $w_{\zeta_j}^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, n^{(i)}$ bởi công thức (2.2) tương ứng với các tập $\Xi_{\zeta_j}^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, n^{(i)}$.
2. Lưu trữ các véc tơ trọng số vừa tính $w_{\zeta} := w_{\zeta} \cup \left\{ w_{\zeta_j}^{(i)} : j = 1, 2, \dots, n^{(i)} \right\}$.

Lưu đồ tính toán song song sử dụng thuật toán hỗ trợ chọn tâm ODP được biểu diễn trong hình (3.1).

Độ phức tạp tính toán của thuật toán 2 là $\mathcal{O}\left(\frac{n}{N} \cdot \log(n)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{n}{N} \cdot m \cdot \log(q)\right)$.

2.5. Thử nghiệm số

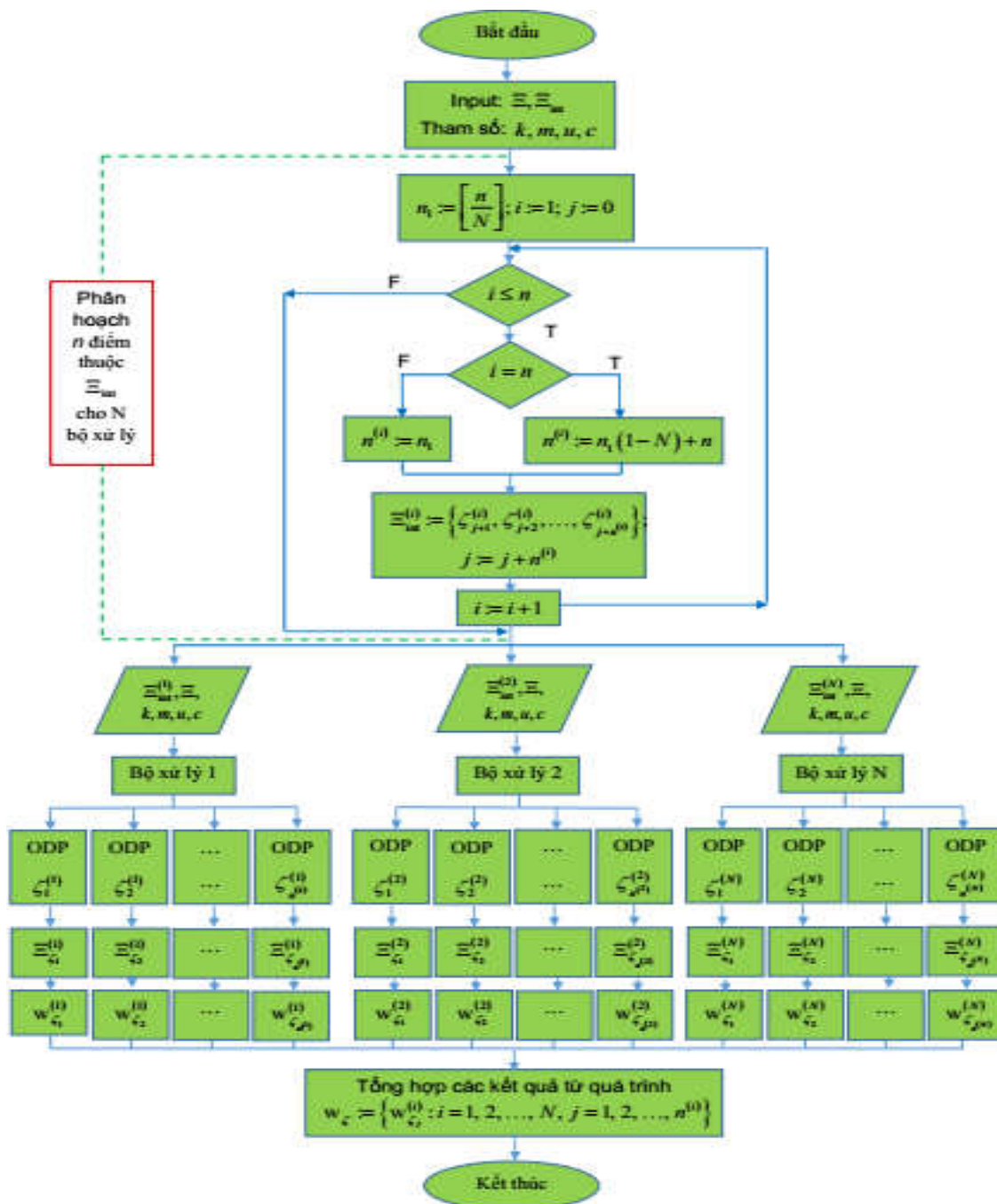
Để so sánh sự hiệu quả của phương pháp RBF-FD chúng tôi dùng công thức sai số trung bình bình phương *rms* (root mean square)

$$rms := \left(\frac{1}{\#\Xi_{\text{int}}} \sum_{\zeta \in \Xi_{\text{int}}} (\tilde{u}(\zeta) - u(\zeta))^2 \right)^{1/2},$$

trong đó $\#\Xi_{\text{int}}$ là số tâm trong miền.

Bài toán 1. Xét bài toán Dirichlet với phương trình Laplace $\Delta u = 0$ trong miền hình quạt Ω được xác định bởi bất phương trình $r < 1$, $-3\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$ trong tọa độ cực, điều kiện biên Dirichlet được cho bởi $u(r, \varphi) = \cos(2\varphi/3)$ dọc theo cung cong và $u(r, \varphi) = 0$ dọc theo hai đoạn thẳng. Nghiệm giải tích là $u(r, \varphi) = r^{2/3} \cos(2\varphi/3)$.

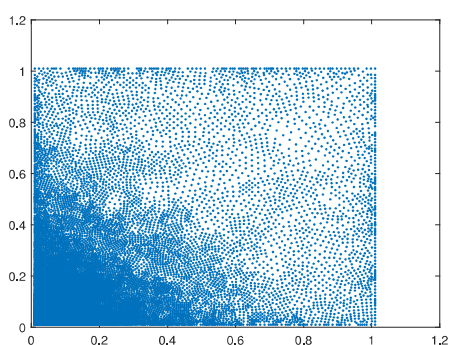
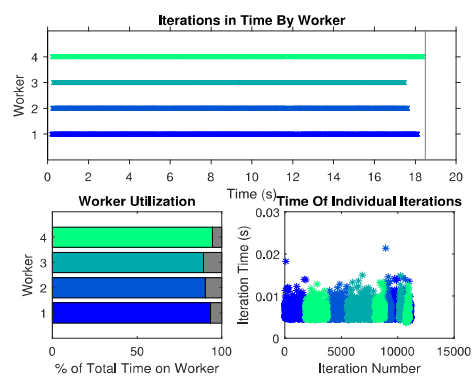
Bài toán 2. Xét bài toán Dirichlet với phương trình Laplace $\Delta u = 0$ trong miền $\Omega = (0.01, 1.01)^2$ với điều kiện biên Dirichlet được chọn thỏa mãn nghiệm giải tích $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.



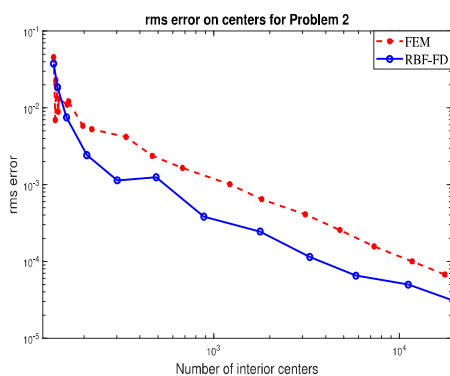
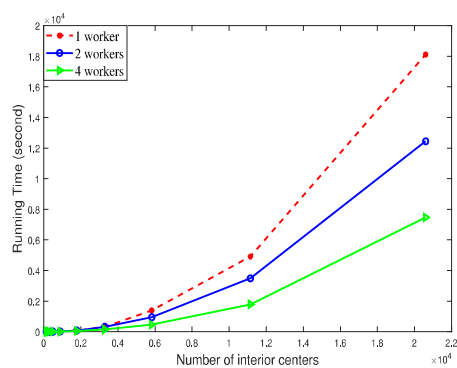
Hình 2.1: Lưu đồ song song hóa thuật toán hỗ trợ chọn tâm ODP và tính véc tơ trọng số.

2.6. Kết luận

Trong chương này chúng tôi đã trình bày thuật toán chọn tập các tâm hỗ trợ tuần tự và thuật toán song song hóa việc chọn bộ tâm hỗ trợ và tính véc tơ trọng số cho phương pháp RBF-FD cùng với các kết quả thử nghiệm trên các thuật toán. Các thử nghiệm số cho thấy thuật toán song song đã cải thiện được thời gian tính toán, điều đó chứng tỏ hiệu quả của thuật toán này.

(a) Miền (Ω) với (21680) tâm

(b) Phân luồng dữ liệu trên 4 bộ xử lý với (11146) tâm

(c) Các sai số rms 

(d) Thời gian chạy trên các bộ xử lý

Hình 2.2: Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 2: (a) Miền Ω của phương pháp RBF-FD. (b) Phân luồng dữ liệu chạy song song trên 4 bộ xử lý của phương pháp RBF-FD. (c) Các sai số rms của FEM và phương pháp RBF-FD. (d) Thời gian chạy của phương pháp RBF-FD trên các bộ xử lý.

Chương 3

Phương pháp không lưới RBF-FD trong không gian ba chiều

3.1. Phương pháp không lưới RBF-FD

Xét bài toán truyền nhiệt dừng trong không gian ba chiều như sau: Cho miền mở $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ và các hàm số f xác định trên Ω , g xác định trên $\partial\Omega$. Tìm hàm $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= g & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.1)$$

trong đó Δ là toán tử Laplace.

Phương pháp không lưới tính toán nghiệm xấp xỉ rời rạc \hat{u} của (3.1) trên tập các nút rời rạc hữu hạn $\Xi \subset \overline{\Omega}$ như sau. Gọi $\Xi_{\text{int}} := \Xi \cap \Omega$ là tập các tâm trong miền và $\partial\Xi := \Xi \cap \partial\Omega$ là tập các tâm trên biên. Với mỗi $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$, ta chọn được tập $\Xi_{\zeta} := \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\} \subset \Xi$ với $\xi_0 = \zeta$, và xấp xỉ $\Delta u(\zeta)$ bởi công thức vi phân

$$\Delta u(\zeta) \approx \sum_{\xi \in \Xi_{\zeta}} w_{\zeta, \xi} u(\xi), \quad \zeta \in \Xi_{\text{int}}. \quad (3.2)$$

Khi đó bài toán (3.1) được rời rạc hóa thành hệ phương trình

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in \Xi_{\zeta}} w_{\zeta, \xi} \hat{u}(\xi) &= f(\zeta), & \zeta \in \Xi_{\text{int}}, \\ \hat{u}(\xi) &= g(\xi), & \xi \in \partial\Xi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

trong đó $\hat{u}(\xi)$ là nghiệm xấp xỉ của nghiệm u của bài toán (3.1) tại các điểm $\xi \in \Xi$.

3.2. Thuật toán chọn tâm dựa trên các góc khối

Thuật toán 3. 8- góc khối.

Input: Ξ , $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$. *Output:* Ξ_{ζ} , Ξ'_{ζ} .

Tham số: $m \geq 16$ (số điểm được lựa chọn ban đầu gồm cả ζ). *Khởi tạo:* $\Xi_{\zeta} := \{\zeta\}$, $\Xi'_{\zeta} := \emptyset$.

- I. Tìm m điểm $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ thuộc $\Xi \setminus \{\zeta\}$ và gần ζ nhất.
- II. Phân hoạch các điểm $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ vào 8 góc khối $O_j = \{\xi_{j1}, \xi_{j2}, \dots\}$, $j = 1, 2, \dots, 8$, tương ứng với 8 góc khối, thỏa mãn $\|\xi_{j1} - \zeta\| \leq \|\xi_{j2} - \zeta\| \leq \dots$.

III. For $j = 1$ to 8

- a. If $\#O_j = 1$ then $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \cup \{\xi_{j1}\}$.
- b. ElseIf $\#O_j > 1$ then $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \cup \{\xi_{j1}, \xi_{j2}\}$.

IV. Với mỗi $\xi \in \Xi_\zeta \setminus \{\zeta\}$, xét đoạn thẳng $(\zeta, \xi) = \{\zeta + \alpha(\xi - \zeta) : 0 < \alpha < 1\}$.

If $(\zeta, \xi) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, then $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \setminus \{\xi\} \cup \{\xi'\}$ và $\Xi'_\zeta := \Xi'_\zeta \cup \{\xi'\}$, trong đó ξ' là điểm thuộc $(\zeta, \xi) \cap \partial\Omega$ gần ζ nhất.

Sau khi áp dụng Thuật toán 8 góc khối cho tất cả các điểm $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$, ta cập nhật tập Ξ bởi công thức

$$\Xi := \Xi \cup \bigcup_{\zeta \in \Xi_{\text{int}}} \Xi'_\zeta. \quad (3.4)$$

Thuật toán 4. 16-góc khối.

Input: $\Xi, \zeta \in \Xi_{\text{int}}$. *Output:* Ξ_ζ, Ξ'_ζ .

Tham số: $m \geq 16$ (số điểm được lựa chọn ban đầu gồm cả ζ). *Khởi tạo:* $\Xi_\zeta := \{\zeta\}, \Xi'_\zeta := \emptyset$.

- I. Tìm m điểm $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ thuộc $\Xi \setminus \{\zeta\}$ và gần ζ nhất.
- II. Phân hoạch các điểm $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ vào 16 tập $O_j = \{\xi_{j1}, \xi_{j2}, \dots\}$, $j = 1, 2, \dots, 16$, tương ứng với 16 góc khối, thỏa mãn $\|\xi_{j1} - \zeta\| \leq \|\xi_{j2} - \zeta\| \leq \dots$.
- III. For $j = 1$ to 16.
 - If $\#O_j \geq 1$ then $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \cup \{\xi_{j1}\}$.
- IV. Với mỗi $\xi \in \Xi_\zeta \setminus \{\zeta\}$, xét đoạn thẳng (ζ, ξ) .
 - If $(\zeta, \xi) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, then $\Xi_\zeta := \Xi_\zeta \setminus \{\xi\} \cup \{\xi'\}$ và $\Xi'_\zeta := \Xi'_\zeta \cup \{\xi'\}$, trong đó ξ' thuộc $(\zeta, \xi) \cap \partial\Omega$ và gần ζ nhất.

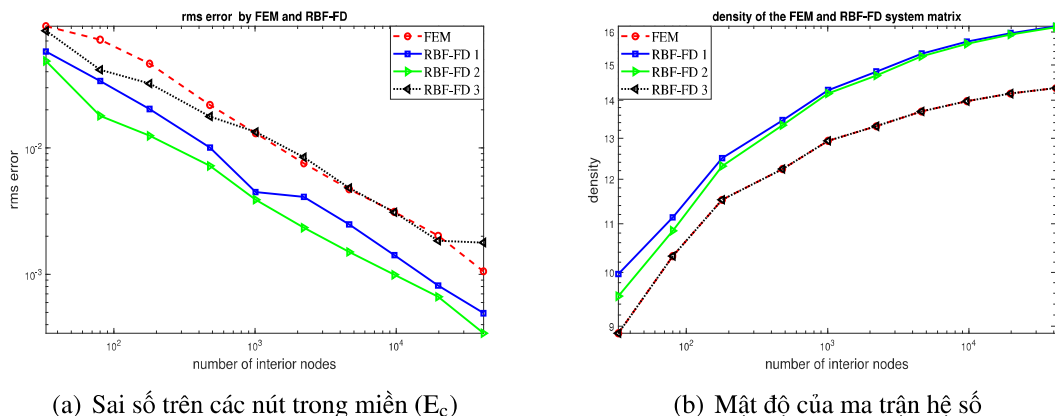
Sau khi áp dụng Thuật toán 16 góc khối cho tất cả các điểm $\zeta \in \Xi_{\text{int}}$, ta cập nhật Ξ bởi công thức (3.4).

3.3. Thử nghiệm số

Để đánh giá sự hiệu quả của các thuật toán, chúng tôi so sánh giá trị sai số tương đối trung bình bình phương RRMS (relative root mean square) được tính bởi công thức

$$E_c = \text{RRMS}(u, \hat{u}, \Xi_{\text{int}}) := \sqrt{\frac{\sum_{\zeta \in \Xi_{\text{int}}} (u(\zeta) - \hat{u}(\zeta))^2}{\sum_{\zeta \in \Xi_{\text{int}}} (u(\zeta))^2}}. \quad (3.5)$$

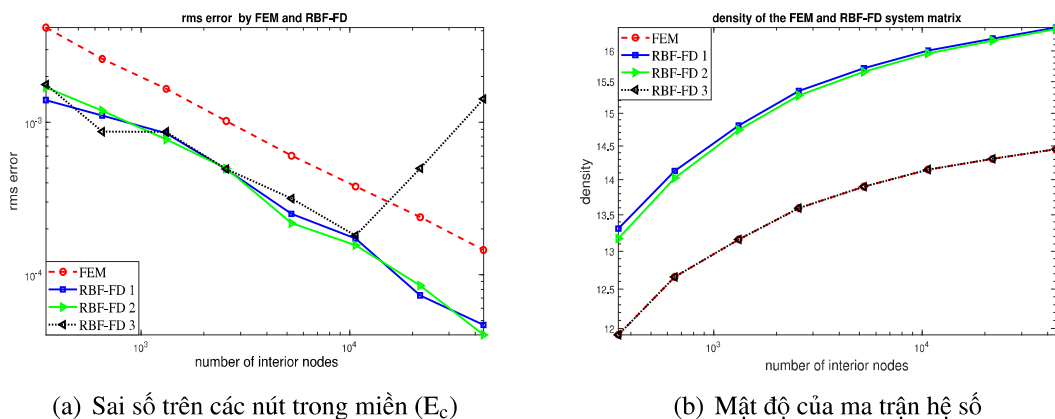
Bài toán 3. Xét phương trình Poisson $\Delta u = -3\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z$ trên miền $\Omega = [0, 1]^3$ với điều kiện biên Dirichlet đồng nhất $u|_{\partial\Omega} = 0$. Nghiệm chính xác của bài toán là $u(x, y, z) = \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z$.

(a) Sai số trên các nút trong miền (E_c)

(b) Mật độ của ma trận hệ số

Hình 3.1: Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 3. Hình (a) minh họa sai số RRMS trên các tâm trong miền. Hình (b) biểu diễn mật độ của ma trận thưa của hệ (3.3) ứng với phương pháp RBF-FD và của ma trận cứng ứng với FEM.

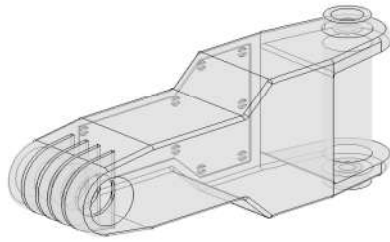
Bài toán 4. Xét phương trình Poisson $\Delta u = 3e^{x+y+z}$ trong khối cầu đơn vị $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ với điều kiện biên Dirichlet được chọn sao cho thỏa mãn nghiệm chính xác của bài toán là $u(x, y, z) = e^{x+y+z}$.

(a) Sai số trên các nút trong miền (E_c)

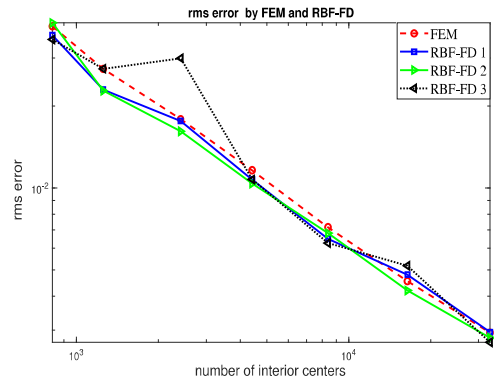
(b) Mật độ của ma trận hệ số

Hình 3.2: Kết quả thử nghiệm số của Bài toán 4: (a) Các sai số RRMS trên các nút trong miền. (b) Mật độ của ma trận hệ số.

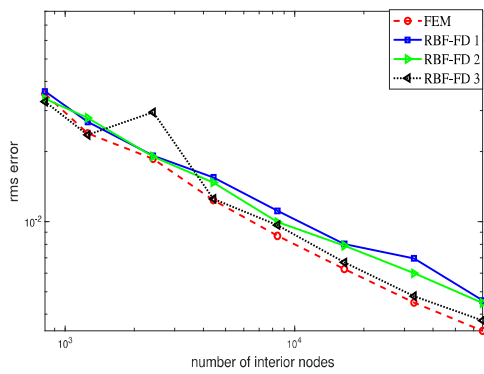
Bài toán 5 ([24, Section 3], Forearm Link). Xét phương trình Poisson $\Delta u = -10$ với điều kiện biên Dirichlet $u|_{\partial\Omega} = 0$ trên miền Ω trong Hình 3.3(a).



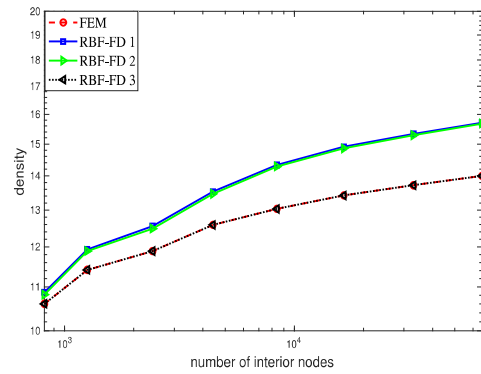
(a) Miền của bài toán



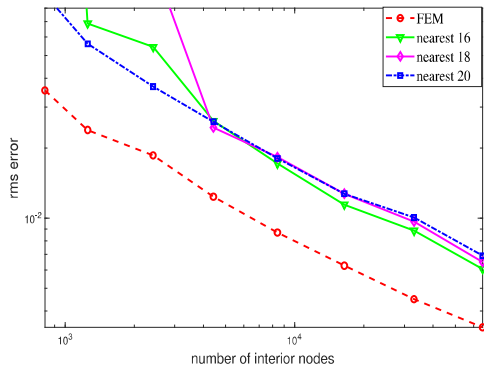
(b) Các sai số so với nghiệm của lần kế tiếp



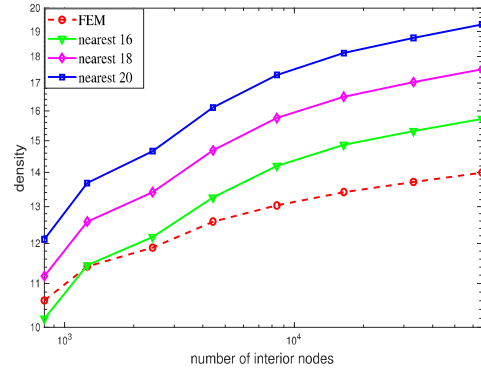
(c) Các sai số so với một nghiệm của FEM



(d) Mật độ của ma trận



(e) Các sai số so với một nghiệm của FEM



(f) Mật độ của ma trận

Hình 3.3: (a) Miền Ω được tạo bởi lệnh `pdegplot` trong MATLAB PDE Toolbox. (b)–(d) Đồ thị các sai số RRMS và mật độ của ma trận hệ số sử dụng các thuật toán RBF-FD 1, 2, 3 và FEM. (e)–(f) Đồ thị các sai số RRMS và mật độ của ma trận hệ số ứng với phương pháp RBF-FD chọn các tập tâm hỗ trợ tính trọng số có 16, 18 hoặc 20 điểm gần ζ nhất và FEM.

3.4. Kết luận

Trong chương đã trình bày 2 thuật toán chọn tâm mới cho phương pháp không lưới RBF-FD giải phương trình truyền nhiệt dừng trong không gian 3 chiều. Cụ thể, so sánh sự hiệu

quả của phương pháp RBF-FD sử dụng hàm cơ sở bán kính và 2 thuật toán chọn tâm với FEM trên các nút được tạo bởi lưới tiêu chuẩn. Nghiệm xấp xỉ của các phương pháp RBF-FD chính xác hơn nghiệm của FEM với các bài toán có miền là khối lập phương hoặc khối cầu (Bài toán 3, 4) và có độ chính xác tương đương với bài toán có miền phức tạp hơn (Bài toán 5).

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Đề tài đạt và vượt mức yêu cầu đối với sản phẩm đặt ra trong thuyết minh.

- Sản phẩm khoa học: Đề tài đề xuất 03 thuật toán mới, cụ thể là:
 - Đề xuất thuật toán song song hóa việc chọn bộ tâm hỗ trợ và tính véc tơ trọng số cho phương pháp RBF-FD trong không gian 2 chiều [3].
 - Đề xuất 2 thuật toán chọn bộ tâm hỗ trợ phương pháp không lưới RBF-FD trong không gian 3 chiều [12].
 - Thử nghiệm số đối với các thuật toán mới.
- Sản phẩm đào tạo: Hướng dẫn 02 luận văn thạc sĩ bảo vệ thành công.

Hướng phát triển nghiên cứu trong thời gian tới: Tiếp tục nghiên cứu phương pháp RBF-FD giải phương trình đạo hàm riêng trong không gian hai chiều và ba chiều.