ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

BÁO CÁO TÓM TẮT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

NGHIỆM HỮU HIỆU VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ

Mã số: **ĐH2015 - TN07 - 02**

Chủ nhiệm đề tài: **Đinh Diệu Hằng**

Mở đầu

Trong những năm gần đây, điều kiện tối ưu cho bất đẳng thức biến phân vec tơ và bài toán cân bằng vec tơ đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Bài toán cân bằng vec tơ với ràng buộc cân bằng (hay còn gọi là các ràng buộc bù) bao gồm bài toán bất đẳng thức biến phân vec tơ và bài toán tối ưu vec tơ với ràng buộc cân bằng như các trường hợp đặc biệt. Điều kiện chính quy và điều kiện tối ưu cho các bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả.

Việc tìm các điều kiện chính quy thích hợp để dẫn các điều kiện Kuhn–Tucker cho bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng là đề tài thu hút sự quan tâm nghiên cứu rộng rãi của nhiều tác giả trong những năm gần đây. Các bài toán tối ưu phi tuyến với ràng buộc cân bằng không thỏa mãn hầu hết các điều kiện chính quy thông thường cho các bài toán quy hoạch toán học, trừ ra điều kiện chính quy Guignard. M.L. Flegel và C. Kanzow đã thiết lập các điều kiện cần kiểu Fritz John và Kuhn–Tucker với điều kiện chính quy kiểu Mangasarian–Fromovitz cho bài toán tối ưu vô hướng với ràng buộc cân bằng. M.L. Flegel và C. Kanzow chứng minh các điều kiện cần cấp 1 cho bài toán vô hướng với ràng buộc cân bằng với điều kiện chính quy Guignard, và chỉ ra mốt số điều kiện đủ cho điều kiện chính quy Guignard.

Nội dung chính mà chúng tôi trình bày là các điều kiện cần Fritz John cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vec tơ không trơn với ràng buộc cân bằng dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarke; các điều kiện cần Kuhn–Tucker với các điều kiện chính quy thích hợp; các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu với vác giả thiết về tính lồi suy rộng; áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vec tơ. Đề tài gồm có 4 chương:

- *Chương 1:* Trình bày một số kiến thức cần dùng cho các chương sau.

- *Chương 2:* Trình bày điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ với ràng buộc cân bằng.
- *Chương 3:* Áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân vec tơ và bài toán tối ưu vec tơ; Trình bày điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ qua phần trong tựa tương đối; Thiết lập điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương 1 trình bày các khái niệm và kiến thức cần sử dụng trong các chương sau bao gồm: Phát biểu bài toán cân bằng vec tơ và các bài toán có liên quan, các định lý tách các tập lồi không tương giao, một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân hàm lồi, dưới vi phân Clarke, dưới vi phân Michel–Penot và dưới vi phân Dini, một số tính chất của phần trong tựa tương đối và định lý tách, một số lớp hàm lồi suy rộng.

- Mục 1.1 phát biểu bài toán cân bằng vec tơ và các bài toán có liên quan như bài toán bất đẳng thức vec tơ và bài toán tối ưu vec tơ.
- Mục 1.2 trình bày các dưới vi phân Clarke, dưới vi phân Michel–Penot, dưới vi phân Dini và một số kết quả bổ trợ
- Mục 1.3 trình bày về khái niệm phần trong tựa tương đối, các tính chất và định lý tách của Cammaroto–Bella [9].

Chương 2

Điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ với ràng buộc cân bằng

3.1. Điều kiện cần tối ưu Fritz John

3.1.1. Phát biểu bài toán Giả sử X là không gian Banach, $F : X \times X \to \mathbb{R}^n$, $g : X \to \mathbb{R}^m$, $h : X \to \mathbb{R}^p$, $G : X \to \mathbb{R}^r$, $H : X \to \mathbb{R}^r$. Giả sử C là tập đóng của X, Q là nón lồi đóng nhọn trong $\mathbb{R}^n$ với $\text{int}Q \neq \emptyset$. Đặt

$$K := \{x \in C : g(x) \leq 0, h(x) = 0, G(z) \geq 0, H(x) \geq 0, G(x)^T H(x) = 0\},$$

trong đó $G(x)^T$ là chuyển vị của $G(x)$.

Xét bài toán cân bằng (VEPEC): Tìm $x \in K$ sao cho

$$F(x, y) \notin -P \setminus \{0\}, \tag{2.1}$$

trong đó P là nón lồi trong $\mathbb{R}^n$ (VEPEC trên K). Nếu $P = \text{int}Q$ thì $x \in K$ thỏa mãn (2.1) được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC).

Ta có $F = (F_1, ..., F_n)$, $g = (g_1, ..., g_m)$, $h = (h_1, ..., h_p)$, $G = (G_1, ..., G_r)$, $H = (H_1, ..., H_r)$. Với $\bar{x} \in K$, đặt $F_{\bar{x}}(y) := F(\bar{x}, y)$ và $I(\bar{x}) := \{i \in \{1, .., m\} : g_i(\bar{x}) = 0\}$.

Giả thiết 2.1. *Các hàm $F_{\bar{x}}(.), g_1, ..., g_m, h_1, ..., h_p, G_1, ..., G_r, H_1, ..., H_r$ Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$.*

Với $\overline{x} \in K$, đặt

$$A := A(\bar{x}) := \{i \in \{1, ..r\} | G_i(\bar{x}) = 0, H_i(\bar{x}) > 0\},$$

$$B := B(\bar{x}) := \{i \in \{1,..r\} | G_i(\bar{x}) = 0, H_i(\bar{x}) = 0\},$$
$$D := D(\bar{x}) := \{i \in \{1,..r\} | G_i(\bar{x}) > 0, H_i(\bar{x}) = 0\}.$$

Với $\bar{x} \in K$, ta có $A \cup B \cup D = \{1, ..., r\}$. Xét một phân hoạch (B_1, B_2) của B, nghĩa là $B = B_1 \cup B_2$ và $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, đặt

$$K_1 := \{x \in C : g(x) \leq 0,\ h(x) = 0, G_{A \cup B_1}(x) = 0, G_{D \cup B_2}(x) \geq 0,$$
$$H_{A \cup B_1}(x) \geq 0, H_{D \cup B_2}(x) = 0\},$$

trong đó, $G_{A \cup B_1}(x)$ là vectơ con của $G(x)$, bao gồm các thành phần $G_i(x)$ với $i \in A \cup B_1$. Chú ý rằng K_1 phụ thuộc $\bar{x}$ và $K_1 \subseteq K$.

3.1.2. Điều kiện cần tối ưu Fritz John cho bài toán (VEPEC) Xét bài toán cân bằng vectơ (VEP1): Tìm $x \in K_1$ sao cho

$$F(x, y) \notin -intQ \quad (\forall y \in K_1).$$

Định lý 2.1. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC); $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$ và Giả thiết 2.1 thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $\bar{\tau} \geq 0$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$ không đồng thời bằng 0, và hàm dưới cộng tính thuần nhất dương liên tục $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (M):*

$$y_2 - y_1 \in intQ \Rightarrow \Lambda(y_2) < \Lambda(y_1)$$

sao cho

$$0 \in \bar{\tau}\partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$
$$- \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}), \tag{2.2}$$

trong đó $N(C, \bar{x})$ là nón pháp tuyến Clarke của C tại $\bar{x}$.

3.1.3. Điều kiện cần Fritz John với điều kiện chính quy (VEPEC-RC)

Điều kiện chính quy (VEPEC-RC):

$$0 \in \sum_{j=1}^{p} \mu_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k \in A \cup B} \nu_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \chi_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x})$$
$$\Rightarrow \mu_j = \nu_k = \chi_l = 0 \ (j = 1, ..., p;\ k \in A \cup B;\ l \in D \cup B).$$

Định lý 2.2. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC); $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$; Giả thiết 2.1 thỏa mãn và điều kiện chính quy (VEPEC-RC) thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $\bar{\tau} \geq 0$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$ với $(\bar{\tau}, \bar{\lambda}) \neq (0,0)$, và một hàm dưới cộng tính thuần nhất dương liên tục $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (M) sao cho*

$$0 \in \bar{\tau}\partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$

$$- \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}).$$

3.2. Điều kiện cần tối ưu Kuhn–Tucker

Điều kiện chính quy (VEPEC-CQ1):

(a) $0 \in \sum_{j=1}^{p} \mu_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k \in A \cup B} \nu_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \chi_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x})$

$$\Rightarrow \mu_j = \nu_k = \chi_l = 0 \ (j = 1, ..., p; k \in A \cup B; l \in D \cup B).$$

(b) Tồn tại một vectơ $\upsilon \in T_C(\bar{x})$ sao cho

$$\langle \zeta_j, \upsilon \rangle = 0 \quad (\forall \zeta_j \in \partial h_j(\bar{x}), j = 1, ..., p),$$

$$\langle \eta_k, \upsilon \rangle = 0 \quad (\forall \eta_k \in \partial G_k(\bar{x}), \forall k \in A \cup B);$$

$$\langle \gamma_l, \upsilon \rangle = 0 \quad (\forall \gamma_l \in \partial H_k(\bar{x}), \forall l \in D \cup B);$$

$$\langle \xi_i, \upsilon \rangle < 0 \quad (\forall \xi_i \in \partial g_i(\bar{x}), \forall i \in I(\bar{x})).$$

Định lý 2.3. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC); $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$; Giả thiết 2.1 và điều kiện chính quy (VEPEC-CQ1) thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$, và một hàm dưới cộng tính thuần nhất dương liên tục $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (M) sao cho*

$$0 \in \partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$

$$- \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}).$$

3.2.1. Điều kiện cần Kuhn-Tucker cho trường hợp $F_{\bar{x}}(.)$ khả vi chặt

Định lý 2.4. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC) và các giả thiết của Định lý 2.3 thỏa mãn; $F_{\bar{x}}(.)$ khả vi chặt tại $\bar{x}$ với đạo hàm chặt $D_sF_{\bar{x}}(\bar{x})$. Khi đó, tồn tại $\bar{\rho} \in Q^* \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$ sao cho*

$$0 \in [D_sF_{\bar{x}}(\bar{x})]^*\bar{\rho} + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$

$$- \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}). \tag{2.3}$$

trong đó $[D_sF_{\bar{x}}(\bar{x})]^*$ là ánh xạ liên hợp của $D_sF_{\bar{x}}(\bar{x})$.

3.3. Điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu

3.3.1. Điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC)

Xét tập $K_2 = \{x \in C : g(x) \leq 0, h(x) = 0, \ G(x) \geq 0, H(x) \geq 0\}$. Để dẫn điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC), ta xét bài toán cân bằng vec tơ (VEP2): Tìm $x \in K_2$ sao cho

$$F(x, y) \notin -\text{int}Q \quad (\forall y \in K_2).$$

Nếu $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của (VEP2) thì $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC), bởi vì $K \subseteq K_2$. Đặt $I_G(\bar{x}) := \{k \in \{1, .., r\} : G_k(\bar{x}) = 0\}$, $I_H(\bar{x}) := \{l \in \{1, .., r\} : H_l(\bar{x}) = 0\}$. Khi đó, với $\bar{x} \in K$, ta có $A \cup B = I_G(\bar{x}), D \cup B = I_H(\bar{x})$.

Định lý 2.5. *Giả sử $\bar{x} \in K$, $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$ và Giả thiết 2.1 thỏa mãn, tồn tại $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in A \cup B)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in D \cup B)$, và một hàm dưới cộng tính thuần nhất dương liên tục $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (M) sao cho*

$$0 \in \partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$

$$- \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}). \tag{2.4}$$

C là tập lồi, ánh xạ $\Lambda \circ F_{\bar{x}}$ là $\partial-$giả lồi tại $\bar{x}$ trên C, các ánh xạ g_i $(i \in I(\bar{x}))$ là $\partial-$tựa lồi tại $\bar{x}$ trên C, G_k $(k \in A \cup B), H_l$ $(l \in D \cup B)$ là $\partial-$tựa lõm tại $\bar{x}$ trên C, h_j $(j = 1, ..., p)$ là $\partial-$tựa tuyến tính tại $\bar{x}$ trên C.
Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC).

Kết quả thu được trong chương này được áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ (VVIEC) và bài toán tối ưu vectơ (VOPEC); Thiết lập điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ là nội dung của Chương 4.

Chương 3

Áp dụng

3.1. Điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và tối ưu vectơ qua phân trong tựa tương đối

3.1.1 Điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ không có ràng buộc

Giả sử X là không gian Banach, K là tập đóng khác rỗng của X. F là ánh xạ từ $K \times K$ đến không gian Banach Y. Giả sử Q là nón lồi đóng nhọn trong Y. Xét bài toán cân bằng vectơ (VEP): Tìm $x \in K$ sao cho

$$F(x, y) \notin -Q \backslash \{0\} \ (\forall y \in K).$$

Véc tơ $\overline{x}$ thỏa mãn bao hàm thức trên được gọi là nghiệm hữu hiệu của bài toán (VEP). Đặt $F_{\overline{x}}(y) = F(\overline{x}, y)$.

Với tập con lồi C của X, phần trong tựa tương đối của C, kí hiệu là qri$C$, là tập của các phần tử $x \in C$ sao cho clcone$(C - x)$ là một không gian con tuyến tính của X. Phần trong tựa tương đối được ký hiệu là qri$C$. Chú ý rằng nếu dim$X < \infty$ and C là tập lồi khác rỗng thì ri$C \neq \emptyset$ và qri$C =$ ri$C$. Ký hiệu $N_C(\overline{x})$ là nón pháp tuyến của C tại $\overline{x}$ (cực của nón tiếp liên).

Định lý 3.1. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (VEP). Với $F_{\bar{x}} : X \to Y$ Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$ và $T_K(\bar{x})$ lồi; $qriF_{\bar{x}}(K) \neq \emptyset$, $qriQ \neq \emptyset$ và $clcone[qri(coF_{\bar{x}}(K)) + qriQ]$ không là một không gian con tuyến tính của X. Khi đó, tồn tại $\bar{\lambda} \in Q^* \backslash \{0\}$ sao cho*

$$0 \in \partial(\bar{\lambda} \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + N_K(\bar{x}).$$

Định lý 3.2. *Giả sử $\overline{x} \in K$. Giả sử rằng tồn tại $\overline{\lambda} \in Q_0^*$ sao cho*

$$0 \in \partial(\overline{\lambda} \circ F_{\overline{x}})(\overline{x}) + N_K(\overline{x}). \tag{3.1}$$

Giả sử K lồi, ánh xạ $\overline{\lambda} \circ F_{\overline{x}}$ là $\partial-$giả lồi tại $\overline{x}$ thuộc K. Khi đó, $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (VEP).

3.1.2 Điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc

Giả sử $X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$; $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^\ell$; Q là nón lồi đóng nhọn trong $\mathbb{R}^n$; C là tập con đóng không rỗng của $\mathbb{R}^p$. Khi đó $g = (g_1, \ldots, g_m), h = (h_1, \ldots, h_\ell)$, trong đó $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_\ell$ là các hàm giá trị thực xác định trên $\mathbb{R}^p$. Đặt $I = \{1, \ldots, m\}, L = \{1, \ldots, \ell\}$,

$$K = \{y \in C : g_i(y) \leqslant 0 \ (i \in I), h_j(y) = 0 \ (j \in L)\}.$$

Xét bài toán cân bằng vectơ (CVEP): Tìm $x \in K$ sao cho

$$F(x, y) \notin -Q \setminus \{0\} \ (\forall y \in K). \tag{3.2}$$

Điểm $\overline{x}$ thỏa mãn (3.2) được gọi là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVEP).

$$I(\overline{x}) = \{i \in I : g_i(\overline{x}) = 0\},$$
$$H = \{x \in \mathbb{R}^p : g_i(x) \leq 0 \ (\forall i \in I(\overline{x})), h_j(x) = 0 \ (\forall j \in L)\},$$
$$D(H) = \{v \in \mathbb{R}^p : D_{g_i}(\overline{x}; v) < 0 \ (\forall i \in I(\overline{x})), \langle \nabla h_j(\overline{x}), v \rangle = 0 \ (\forall j \in L)\}.$$

Giả sử T là ánh xạ từ $\mathbb{R}^p$ vào $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Với

$$F(x, y) = (Tx)(y - x) \ (x, y \in \mathbb{R}^p),$$

(CVEP) trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ, ký hiệu (CVVI).

Giả sử f là ánh xạ từ $\mathbb{R}^p$ vào $\mathbb{R}^n$. Với song hàm $F(x, y) = f(y) - f(x)$ $(x, y \in \mathbb{R}^p)$, (CVEP) trở thành bài toán tối ưu vectơ (CVOP):

$$\min\{f(x) : \ x \in K\}.$$

Định lý 3.3. *Giả sử $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVEP); $F_{\overline{x}}(.)$ Lipschitz địa phương tại $\overline{x}$, $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$; C lồi; h liên tục trong một lân cận của $\overline{x}$ và khả vi Fréchet tại $\overline{x}$ với đạo hàm Fréchet $\nabla h(\overline{x}) = (\nabla h_1(\overline{x}), \ldots, \nabla h_\ell(\overline{x}))$; Với mỗi $i \in I(\overline{x}), g_i$ là tựa lồi trong một lân cận của $\overline{x}$ và khả vi Dini tại $\overline{x}$,* *hoặc khả vi Hadamard tại $\overline{x}$, trong cả hai trường hợp đạo hàm đều lồi theo phương; Điều kiện chính quy (CQ1) thỏa mãn:*

$$(CQ1) \quad 0 \in \sum_{i\in I(\overline{x})} \mu_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j\in J} \gamma_j \nabla h_j(\overline{x}) + N_C(\overline{x}), \mu_i \geqslant 0 \ (\forall i \in I(\overline{x}))$$
$$\Rightarrow \mu_i = 0 \ (\forall i \in I(\overline{x})), \gamma_j = 0 \ (j \in L).$$

Giả sử $qriF_{\overline{x}}(K) \neq \emptyset$, $qriQ \neq \emptyset$ và $clcone[qri(coF_{\overline{x}}(K)) + qriQ]$ không là không gian con tuyến tính của $\mathbb{R}^p$. Khi đó, tồn tại $\overline{\lambda} \in Q^*\backslash\{0\}$, $\overline{\mu}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\overline{x})), \overline{\gamma}_j \in \mathbb{R}$ $(j \in L)$ sao cho

$$0 \in \overline{\lambda} \circ \partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) + \sum_{i\in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j\in J} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N_C(\overline{x})$$

Định lý 3.4. *Giả sử $\overline{x} \in K$; $F_{\overline{x}} : X \to Y$ Lipschitz địa phương tại $\overline{x}$, h khả vi Fréchet tại $\overline{x}$. Khi đó, tồn tại $\overline{\lambda} \in Q_0^*$, $\overline{\mu}_i \geq 0$ $(i \in I(\overline{x}))$, $\overline{\gamma}_j \in \mathbb{R}$ $(j \in L)$ sao cho*

$$0 \in \overline{\lambda} \circ \partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) + \sum_{i\in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j\in L} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N_C(\overline{x}). \tag{3.3}$$

Giả sử C lồi, ánh xạ $\overline{\lambda} \circ F_{\overline{x}}$ là $\partial-$giả lồi tại $\overline{x}$ trên C, các ánh xạ g_i $(i \in I(\overline{x}))$ ∂_D-tựa lồi tại $\overline{x}$ trên C, các ánh xạ $h_1, ..., h_l$ tựa tuyến tính tại $\overline{x}$ trên C. Khi đó, $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVEP).

Kết quả thu được trong phần này được áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ (CVVI) và bài toán tối ưu vectơ (CVOP)

Kết luận chung

Các kết quả chính mà Đề tài thu được bao gồm:

1) Chứng minh điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ dưới ngôn ngữ phần trong tựa tương đối. Bằng cách sử dụng định lý tách của Cammaroto–Bella (2005), chúng tôi chứng minh điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán không có ràng buộc dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarle. Sử dụng kết quả của Jiménez–Novo (2003) về nón của giao hai tập, chúng tôi chứng minh điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của bài toán có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập qua các dưới vi phân Clarke và Dini. Các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán đó được dẫn với các giả thiết về tính ∂-giả lồi và ∂_D-tựa lồi. Các kết quả đó được áp dụng để dẫn các điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức vectơ và bài toán tối ưu vectơ.

2) Chứng minh các điều kiện cần Fritz John cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vec tơ không trơn với ràng buộc cân bằng (VEPEC) dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarke. Với các điều kiện chính quy thích hợp cho bài toán với ràng buộc cân bằng, các điều kiện cần Kuhn–Tucker được thiết lập. Các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu với vác giả thiết về tính lồi suy rộng được chứng minh. Các kết quả được áp dụng áp cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ.

3) Đưa ra các ví dụ minh họa cho các kết quả đã nhận được.

Hướng nghiên cứu tiếp theo:

1) Nghiên cứu điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng với ràng buộc nón không trơn qua Jacobian suy rộng Clarke và Jacobian xấp xỉ.

2) Nghiên cứu điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng với ràng buộc cân bằng không trơn qua dưới vi phân suy rộng và Jacobian xấp xỉ.

3) Nghiên cứu điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp không trơn qua dưới vi phân Clarke và dưới vi phân Michel–Penot.

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến Đề tài

1. D. V. Luu and D. D. Hang (2015), "On efficiency conditions for nonsmooth vector equilibrium problems with equilibrium constraints", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **36**, pp.1622–1642 (SCIE).
2. Đinh Diệu Hằng (2015), "Điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ qua phần trong tựa tương đối", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ*, Đại học Thái Nguyên, Tập **144**(14), tr.223–227.
3. Đinh Diệu Hằng, Trần Văn Sự (2018), "Về điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ*, Đại học Thái Nguyên, Tập **181** (05), tr. 237–242.