ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

NGHIỆM HỮU HIỆU VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ

Mã số: **ĐH2015 - TN07 - 02**

Xác nhận của tổ chức chủ trì **Chủ nhiệm đề tài**

Đinh Diệu Hằng

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt

$(VEPEC)$	Bài toán cân bằng vectơ với ràng buộc cân bằng
$(VVIEC)$	Bài toán bất đẳng thức vectơ với ràng buộc cân bằng
$(VOPEC)$	Bài toán tối ưu vectơ với ràng buộc cân bằng
$(VEPEC-CQ1)$	Điều kiện chính quy cho bài toán (VEPEC)
$(VVIEC-CQ1)$	Điều kiện chính quy cho bài toán (VVIEC)
$(VOPEC-CQ1)$	Điều kiện chính quy cho bài toán (VOPEC)
$(VEP),(VEP_1)$	Bài toán cân bằng vectơ không ràng buộc
$(CVEP),(CVEP_1)$	Bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc
$(VOP),(VOP_1)$	Bài toán tối ưu vectơ không ràng buộc
$(CVOP),(CVOP_1)$	Bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc
$(VVI),(VVI_1)$	Bất đẳng thức biến phân vectơ không ràng buộc
$(CVVI),(CVVI_1)$	Bất đẳng thức biến phân vectơ có ràng buộc
t.ư.,	tương ứng
X^*	Không gian tôpô đối ngẫu của X
$\langle \xi, x \rangle$	Giá trị của phiếm hàm $\xi \in X^*$ tại $x \in X$
$f^0(\bar{x}; v)$	Đạo hàm theo phương Clarke của f tại $\bar{x}$ theo phương v
$\partial f(\bar{x})$	Dưới vi phân Clarke của f tại $\bar{x}$
$f^\diamondsuit(\bar{x}; v)$	Đạo hàm Michel - Penot của f tại $\bar{x}$ theo phương v
$\partial^{MP} f(\bar{x})$	Dưới vi phân Michel - Penot của f tại $\bar{x}$
$\partial_D f(\bar{x})$	Dưới vi phân Dini của f tại $\bar{x}$
$f^+(\bar{x}; v)$	Đạo hàm Dini trên của f tại $\bar{x}$ theo phương v

$f^-(\overline{x}; v)$	Đạo hàm Dini dưới của f tại $\bar{x}$ theo phương v
$Df(\overline{x}; v)$	Đạo hàm Dini của f tại $\bar{x}$ theo phương v
$df(\overline{x}; v)$	Đạo hàm Hadamard của f tại $\bar{x}$ theo phương v
$\nabla_G f(\bar{x})$	Đạo hàm Gâteaux của f tại $\bar{x}$ theo phương v
$\nabla f(\bar{x})$	Đạo hàm Fréchet của f tại $\bar{x}$
$T(C; \overline{x})$	Nón tiếp tuyến Clarke của C tại $\bar{x}$
$T_C(\overline{x})$	Nón tiếp liên của C tại $\bar{x}$
$N(C; \overline{x})$	Nón pháp tuyến Clarke của C tại $\bar{x} \in C$
$N_C(\overline{x})$	Nón pháp tuyến của C tại $\bar{x} \in C$: cực của nón tiếp liên
D^*	Nón đối ngẫu của D
D^0	Nón cực của D
^{T}	Phép chuyển vị
T^*	Toán tử liên hợp của toán tử T
int$C$	Phần trong của C
ri$C$	Phần trong tương đối của C
qri$C$	Phần trong tựa tương đối của C
co$C$	Bao lồi của C
coneco$A$	Nón sinh ra bởi bao lồi của A
lin$A$	Bao tuyến tính của A.

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung

- Tên đề tài: Nghiệm hữu hiệu và điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ
- Mã số: ĐH2015 - TN07 - 02
- Chủ nhiệm đề tài: Th.S Đinh Diệu Hằng
- Tổ chức chủ trì: Trường Đại học Công nghệ thông tin và truyền thông Thái Nguyên
- Thời gian thực hiện: 06/2015 - 06/2017

2. Mục tiêu

- Thiết lập các điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ.
- Áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và tối ưu vectơ.

3. Tính mới và sáng tạo

- Tìm các điều kiện chính quy thích hợp để dẫn các điều kiện cần Kuhn-Tucker cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ không trơn với ràng buộc cân bằng qua dưới vi phân Clarke.
- Thêm vào các giả thiết lồi suy rộng đã thiết lập được các điều kiện đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ không trơn với ràng buộc cân bằng.

4. Kết quả nghiên cứu

- Các điều kiện cần Fritz John cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vec tơ không trơn có ràng buộc cân bằng (VEPEC) dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarke.
- Các điều kiện cần Kuhn–Tucker cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC) dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarke với các điều kiện chính quy thích hợp.
- Các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC) với các giả thiết về tính lồi suy rộng.
- Áp dụng cho các bài toán bất đẳng thức biến phân vec tơ và bài toán tối ưu vec tơ.

5. Sản phẩm khoa học

- 01 bài báo đăng trên tạp chí quốc tế SCIE (không thu tiền tác giả).
- 02 bài báo đăng trên tạp chí Khoa học và công nghệ, Đại học Thái Nguyên.

1. D. V. Luu and D. D. Hang (2015), "On efficiency conditions for nonsmooth vector equilibrium problems with equilibrium constraints", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **36**, pp. 1622–1642 (SCIE).
2. Đinh Diệu Hằng (2015), "Điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ qua phần trong tựa tương đối", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Thái Nguyên*, **144**(14), tr. 223–227.
3. Đinh Diệu Hằng, Trần Văn Sự (2018), "Về điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Thái Nguyên*, **181**(05), tr. 237–242.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu

Trong những năm gần đây điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán cân bằng vectơ đã thu hút sự quan tâm của nhiều tác giả. Các bài báo và các công trình công bố sẽ là tài liệu cho những nghiên cứu sâu hơn trong chủ đề này. Kết quả nghiên cứu của đề tài là nguồn tài liệu tham khảo hữu ích cho CBGV và sinh viên quan tâm nghiên cứu về các vấn đề liên quan đến các bài toán tối ưu.

Xác nhận của tổ chức chủ trì **Chủ nhiệm đề tài**

Đinh Diệu Hằng

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information

- Project title: Efficent solutions and optimality conditions for vector equilibrium problems.
- Code number: ĐH2015 - TN07 - 02
- Coordinator: Dinh Dieu Hang
- Implementing institution: TNU - University of Information and Communication Technology.
- Duration: 06/2015 - 06/2017

2. Objective(s)

- Establish the optimality conditions for efficient solutions of vector equilibrium problems.
- The obtained results will be applied to vector variational inequalities and vector optimization problems.

3. Creativeness and innovativeness

- Establish Kuhn-Tucker necessary optimality conditions for weak efficient solutions of nonsmooth vector equilibrium problems with equilibrium constraints (VEPEC) via the Clarke subdifferentials under suitable constraint qualifications.
- Sufficient conditions for weak efficient solutions of nonsmooth vector equilibrium problems with equilibrium constraints (VEPEC) with assumptions on generalized convexity.

4. Research results

- Establish Fritz John necessary optimality conditions for weak efficient solutions of nonsmooth vector equilibrium problems with equilibrium constraints (VEPEC) via the Clarke subdifferentials.

- Establish Kuhn-Tucker necessary optimality conditions for weak efficient solutions of nonsmooth vector equilibrium problems with equilibrium constraints (VEPEC) via the Clarke subdifferentials under suitable constraint qualifications.
- Sufficient conditions for weak efficient solutions of nonsmooth vector equilibrium problems with equilibrium constraints (VEPEC) with assumptions on generalized convexity.
- The obtained results will be applied to vector variational inequalities and vector optimization problems.

5. Products

- A paper in ISI international journal.
- 02 papers in journal of science and technology - TNU.

1. D. V. Luu and D. D. Hang (2015), "On efficiency conditions for nonsmooth vector equilibrium problems with equilibrium constraints", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **36**, pp. 1622–1642 (SCIE).
2. Đinh Diệu Hằng (2015), "Điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ qua phần trong tựa tương đối", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Thái Nguyên*, **144**(14), tr. 223–227.
3. Đinh Diệu Hằng, Trần Văn Sự (2018), "Về điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Thái Nguyên*, **181**(05), tr. 237–242.

6. Transfer alternatives, application institutions, impacts and benefits of research results

In recent years the vector variational inequalities have attracted extensive attention because of their fields of application. Optimality conditions for vector variational inequalities and vector equilibrium problems have been studied by a lot of authors. Enhance research competence and contribute to the development of Mathematic theory.

Mở đầu

Trong những năm gần đây, điều kiện tối ưu cho bất đẳng thức biến phân vec tơ và bài toán cân bằng vec tơ đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu (xem chẳng hạn [6–9], [14–17], [21], [24], [25], và các tài liệu tham khảo trong các bài báo đó). Bài toán cân bằng vec tơ với ràng buộc cân bằng (hay còn gọi là các ràng buộc bù) bao gồm bài toán bất đẳng thức biến phân vec tơ và bài toán tối ưu vec tơ với ràng buộc cân bằng như các trường hợp đặc biệt. Điều kiện chính quy và điều kiện tối ưu cho các bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả (xem [4], [5], [12], [13], [16], [18–20], [23], [26], [27], và các tài liệu tham khảo trong các bài báo đó).

Việc tìm các điều kiện chính quy thích hợp để dẫn các điều kiện Kuhn–Tucker cho bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng là đề tài thu hút sự quan tâm nghiên cứu rộng rãi của nhiều tác giả trong những năm gần đây. Các bài toán tối ưu phi tuyến với ràng buộc cân bằng không thỏa mãn hầu hết các điều kiện chính quy thông thường cho các bài toán quy hoạch toán học, trừ ra điều kiện chính quy Guignard. M.L. Flegel và C. Kanzow [4] đã thiết lập các điều kiện cần kiểu Fritz John và Kuhn–Tucker với điều kiện chính quy kiểu Mangasarian–Fromovitz cho bài toán tối ưu vô hướng với ràng buộc cân bằng. M.L. Flegel và C. Kanzow [5] chứng minh các điều kiện cần cấp 1 cho bài toán vô hướng với ràng buộc cân bằng với điều kiện chính quy Guignard, và chỉ ra mốt số điều kiện đủ cho điều kiện chính quy Guignard.

Nội dung chính mà chúng tôi trình bày là các điều kiện cần Fritz John cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vec tơ không trơn với ràng buộc cân bằng dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarke; các điều kiện cần Kuhn–Tucker với các điều kiện chính quy thích hợp; các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu với vác giả thiết về tính lồi suy rộng; áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân vec tơ và bài toán tối ưu vec tơ. Các kết quả trình bày trong đề tài được tham khảo trong công trình của Đ.D. Hằng [1] và D.V.Luu, D.D.Hang [17]. Đề tài gồm có 3 chương:

- *Chương 1:* Trình bày một số kiến thức cần dùng cho các chương sau.
- *Chương 2:* Trình bày điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ với ràng buộc cân bằng.
- *Chương 3:* Áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân vec tơ và bài toán tối ưu vec tơ; Trình bày điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ qua phần trong tựa tương đối; Thiết lập điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ.

Đề tài đã nêu một số vấn đề liên quan đến bài toán cân bằng vectơ là một trong những lý thuyết rộng của lý thuyết tối ưu. Kính mong các Thầy, Cô và các bạn đồng nghiệp đóng góp ý kiến để đề tài được nhoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2019

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương 1 trình bày các khái niệm và kiến thức cần sử dụng trong các chương sau bao gồm: Bài toán cân bằng vectơ và các bài toán có liên quan, các định lý tách các tập lồi không tương giao, một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân hàm lồi, dưới vi phân Clarke, dưới vi phân Michel – Penot và dưới vi phân Dini, một số tính chất của phần trong tựa tương đối và định lý tách, một số lớp hàm lồi suy rộng. Nội dung của Chương 1 được tham khảo trong các tài liệu [1], [2], [3], [4]

1.1. Bài toán cân bằng

Giả sử X là không gian Banach, M là một tập con của X, F là ánh xạ từ $X \times X$ vào $\mathbb{R}^m$. Khi đó, $F = (F_1, \ldots, F_m)$. Giả sử P là nón lồi đóng nhọn trong $\mathbb{R}^m$. Xét bài toán cân bằng vec tơ (VEP) sau đây: Tìm $\overline{x} \in M$ sao cho với mọi $y \in M$,

$$F(\overline{x}, y) \notin -P \setminus \{0\}.$$

Vec tơ $\overline{x}$ được gọi là nghiệm hữu hiệu (efficient solution) của (VEP) nếu bao hàm thức trên đúng với mọi $y \in M$. Trong trường hợp $\mathrm{int}P \neq \emptyset$, $\overline{x}$ được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu (weak efficient solution) của (VEP) nếu với mọi $y \in M$,

$$F(\overline{x}, y) \notin -\mathrm{int}P.$$

Đặt $F_{\overline{x}}(y) := F(\overline{x}, y), F_{k,\overline{x}}(y) := F_k(\overline{x}, y)(k \in J := \{1, \ldots, m\})$. Giả sử $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$. Trong trường hợp $P = \mathbb{R}^m_+$, điểm $\overline{x} \in M$ là nghiệm hữu hiệu (t.ư.

nghiệm hữu hiệu yếu) của (VEP) nếu không có điểm $y \in M$ nào thỏa mãn

$$\begin{aligned}
&F_{k,\overline{x}}(y) \leqslant 0 \quad (\forall\, k \in J),\\
&F_{s,\overline{x}}(y) < 0 \quad \text{với ít nhất một } s \in J,\\
&(\text{t.ư. } F_{k,\overline{x}}(y) < 0\ \forall k \in J).
\end{aligned}$$

Giả sử $\pounds(X;\mathbb{R}^m)$ là không gian các ánh xạ tuyến tính liên tục từ X vào $\mathbb{R}^m$, T là ánh xạ từ X vào $\pounds(X;\mathbb{R}^m)$. Bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ (VVI) sau đây là một trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng vectơ (VEP): Tìm $x \in M$ sao cho

$$(Tx)(y-x) \notin -P \setminus \{0\}\ (\forall y \in M).$$

Vec tơ $\overline{x}$ được gọi là nghiệm hữu hiệu của (VVI) nếu bao hàm thức trên đúng với mọi $y \in M$. Trong trường hợp $\mathrm{int}P \neq \emptyset$, $\overline{x}$ sẽ được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu của (VVI) nếu

$$(T\overline{x})(y-\overline{x}) \notin -\mathrm{int}P\ (\forall y \in M).$$

Chú ý rằng định nghĩa nghiệm hữu hiệu trong trường hợp $P = \mathbb{R}^m_+$ (t.ư. nghiệm hữu hiệu yếu trong trường hợp $P = \mathbb{R}^m_{++}$) như sau: Không tồn tại $y \in M$ sao cho

$$\begin{aligned}
&T(\overline{x})_k(y-\overline{x}) \leqslant 0 \quad \text{với mọi } k \in J,\\
&T(\overline{x})_s(y-\overline{x}) < 0 \quad \text{với ít nhất một } s \in J,\\
&\Big(\text{t.ư. } T(\overline{x})_k(y-\overline{x}) < 0 \quad \text{với mọi } k \in J\Big)
\end{aligned}$$

trong đó $T(\overline{x}) = (T(\overline{x})_1, \ldots, T(\overline{x})_m),\ T(\overline{x})_k : X \to \mathbb{R}\ (k \in J)$, $\mathbb{R}^m_{++} = \mathrm{int}\mathbb{R}^m_+$.

Nếu $F(x,y) = f(y) - f(x)\ (x, y \in M)$, trong đó $f : X \to \mathbb{R}^m$, bài toán cân bằng vec tơ (VEP) trở thành bài toán tối ưu vec tơ (VOP) sau đây:

$$\min\{f(x) :\ x \in M\}.$$

Khi đó, định nghĩa cực tiểu Pareto hay nghiệm hữu hiệu trong trường hợp $P = \mathbb{R}^m_+$ (t.ư. cực tiểu Pareto yếu hay nghiệm hữu hiệu yếu trong trường hợp $P = \mathbb{R}^m_{++}$) như sau: Không tồn tại $x \in M$ thỏa mãn

$$f_k(x) \leqslant f_k(\overline{x}) \quad (\forall\, k \in J),$$

$$f_s(x) < f_s(\overline{x}) \quad \text{với ít nhất một } s \in J,$$
$$(\text{t.ư. } f_k(x) < f_k(\overline{x})\ \forall k \in J).$$

1.2. Tách các tập lồi không tương giao và dưới vi phân hàm lồi

Các khái niệm và kết quả về giải tích lồi sau đây (xem [1], [23]) là cần thiết cho các chương sau.

Định nghĩa 1.1. *Cho X là không gian tôpô tuyến tính và các tập hợp $A, B \subset X$. Ta nói phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \neq 0$ tách A và B, nếu tồn tại số α sao cho:*

$$\langle x^*, y\rangle \leq \alpha \leq \langle x^*, x\rangle \quad (\forall x \in A, \forall y \in B).$$

Nếu bất đẳng thức trên có dạng:

$$\langle x^*, y\rangle < \alpha < \langle x^*, x\rangle \quad (\forall x \in A, \forall y \in B).$$

thì ta nói x^* *tách ngặt* A và B.

Siêu phẳng đóng $H := \{x : \langle x^*, x\rangle = \alpha\}$ được gọi là *siêu phẳng tách* A và B. Các tập A và B gọi là *tách được.*

Định lý 1.1. *(Định lý tách thứ nhất) Hai tập lồi khác rỗng bất kì không tương giao trong không gian tôpô tuyến tính, một tập có điểm trong thì tách được.*

Định lý 1.2. *(Định lý tách thứ hai) Giả sử A, B là các tập đóng khác rỗng không tương giao trong không gian lồi địa phương và A compact. Khi đó A và B tách ngặt được.*

Từ Định lý tách thứ 2 ta suy ra rằng: Có thể tách ngặt một điểm với một tập lồi đóng không chứa điểm đó.

Từ hai định lý tách ta suy ra các kết quả sau:

Mệnh đề 1.1. *Giả sử nón K và tập A tách được bởi siêu phẳng H. Khi đó K và A cũng tách được bởi siêu phẳng H' đi qua đỉnh của nón và $H'//H$.*

Mệnh đề 1.2. *Giả sử K là một nón lồi đóng có đỉnh tại x_0 trong không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương X, L là một tia đi qua x_0 và $L \not\subset K$. Khi đó, K và L tách được.*

Định lý 1.3. *Giả sử K là nón lồi đỉnh tại 0, $intK \neq 0$, L là một không gian con, $intK \cap L \neq \emptyset$. Giả sử x^* là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên L thỏa mãn:*

$$\langle x^*, x\rangle \geq 0 \quad (\forall x \in K \cap L).$$

Khi đó, tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục x'^* trên X sao cho:

$$\langle x'^*, x\rangle = \langle x^*, x\rangle \quad (\forall x \in L),$$
$$\langle x'^*, x\rangle \geq 0 \quad (\forall x \in K).$$

Định nghĩa 1.2. *Nón liên hợp K^* của K được định nghĩa như sau:*

$$K^* := \{x^* \in X^* : \langle x'^*, x\rangle \geq 0, \forall x \in K\}.$$

Chú ý rằng K^* đóng *yếu và

$$K^* = (\overline{K})^* = (\overline{coK})^*,$$

trong đó co là ký hiệu bao lồi, $\overline{K}$ là bao đóng yếu của K.

Các kết quả sau về nón liên hợp là công cụ tốt để dẫn các điều kiện tối ưu.

Định lý 1.4. *Giả sử $K_1, K_2, \dots, K_n$ là các nón lồi mở (đỉnh tại 0), $\bigcap_{i=1}^n K_i \neq \emptyset$. Khi đó:*

$$\left(\bigcap_{i=1}^n K_i\right)^* = \sum_{i=1}^n K_i^*.$$

Định lý 1.5. *(Duboviskii - Milyutin) Giả sử $K_1, K_2, \dots, K_n, K_{n+1}$ là các nón lồi (đỉnh tại 0); các nón $K_1, K_2, \dots, K_n$ mở. Khi đó, $\bigcap_{i=1}^n K_i = \emptyset \iff \exists x_i^* \in K_i^* (i = 1, \dots, n+1)$ không đồng thời bằng 0 sao cho:*

$$x_1^* + x_2^* + \dots + x_n^* + x_{n+1}^* = 0.$$

Giả sử f là hàm lồi trên $D \subset X$. Miền hữu hiệu của hàm f, kí hiệu là $\mathrm{dom}f$, được định nghĩa như sau:

$$\mathrm{dom}f = \{x \in D : f(x) < +\infty\}.$$

Định nghĩa 1.3. *Hàm f được gọi là chính thường nếu $domf \neq \emptyset$ và $f(x) > -\infty$.*

Định nghĩa 1.4. *Dưới vi phân của hàm lồi f tại $\bar{x} \in X$ được định nghĩa như sau:*

$$\partial_C f(\bar{x}) = \{x^* : \langle x^*, x\rangle \le f(x) - f(\bar{x}) \ \forall x \in X\}.$$

Định lý 1.6. *(Moreau–Rockafellar) Giả sử $f_1, \dots, f_m$ là các hàm lồi chính thường trên X. Khi đó, với mọi $x \in X$,*

$$\partial_C(f_1 + \dots + f_m)(x) \supset \partial_C f_1(x) + \dots + \partial_C f_m(x).$$

Hơn nữa, nếu tại $x \in \bigcap_{i=1^m} dom f_i$, tất cả các hàm $f_1, \dots, f_m$ liên tục (có thể trừ ra một hàm), thì

$$\partial_C(f_1 + \dots + f_m)(x) = \partial_C f_1(x) + \dots + \partial_C f_m(x).$$

1.3. Dưới vi phân Clarke

Giả sử X là không gian Banach, X^* là không gian tôpô đối ngẫu của X, $\bar{x} \in X$ và f là hàm giá trị thực trong X.

Đạo hàm suy rộng Clarke của f tại $\bar{x}$ theo phương v được xác định như sau (xem [4]):

$$f^0(\bar{x}; v) = \limsup_{x \to \bar{x}, t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Dưới vi phân Clarke (hay gradient suy rộng Clarke) của f tại $\bar{x}$ được xác định bởi:

$$\partial f(\bar{x}) = \left\{\xi \in X^* : \langle \xi, v\rangle \le f^0(\bar{x}; v), \ \forall v \in X\right\},$$

trong đó $\langle \xi, v\rangle$ là giá tri của phiếm hàm $\xi \in X^*$ tại $v \in X$. Chú ý rằng dưới vi phân Clarke của f được quy về đạo hàm thông thường khi f khả vi chặt.

Nếu f là Lipschitz địa phương với hằng số L, hàm $f^0(\bar{x}; .)$ là thuần nhất dương, dưới cộng tính trên X, Lipschitz với hằng số L trên X, và $\partial f(\bar{x})$ khác rỗng, lồi, compact *yếu của X^* và $||\xi|| \le L$ với mọi $\xi \in \partial f(\bar{x})$.

Nếu $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ là hàm Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, thì Jacobian suy rộng Clarke của f tại $\bar{x}$ được xác định bởi:

$$\partial f(\bar{x}) = co\left\{\lim_{i \to \infty} \nabla f(x_i) : x_i \to \bar{x}, \ x_i \in S\right\},$$

trong đó $\nabla f(x_i)$ là ma trận Jacobi của f tại x_i, *co* kí hiệu bao lồi, S là tập các điểm mà f khả vi. Trong trường hợp $n = 1$, Jacobian suy rộng Clarke của f tại $\bar{x}$ trùng với dưới vi phân Clarke của f tại $\bar{x}$.

Theo [4], nón tiếp tuyến Clarke của tập $C \subseteq X$ tại điểm $\bar{x} \in C$ được xác định bởi

$$T_C(\bar{x}) = \{v \in X : \forall x_n \in C, x_n \to \bar{x}, \forall t_n \downarrow 0, \exists v_n \to v$$

$$\text{sao cho } x_n + t_n v_n \in C, \forall n\}.$$

Nón pháp tuyến của C tại $\overline{x} \in C$ là tập:

$$N_C(\overline{x}) := \{\phi \in X^* : \langle \phi, v \rangle \leq 0, \forall v \in T_C(\bar{x})\}$$

Nón pháp tuyến $T_C(\bar{x})$ đóng khác rỗng, $N_C(\bar{x})$ đóng *yếu khac rỗng và cả hai nón này đều lồi. Nếu C lồi, $N_C(\bar{x})$ trùng với nón pháp tuyến theo nghĩa giải tích lồi (xem [3]):

$$N_C(\overline{x}) := \{\phi \in X^* : \langle \phi, x - \overline{x} \rangle \leq 0, \forall x \in C\}$$

Với nón $D \subseteq X$ thì nón liên hợp của D được định nghĩa bởi

$$D^* = \{\xi \in X^* : \langle \xi, v \rangle \geq 0, \forall v \in D\}.$$

Cực của nón D được xác định bởi

$$D^0 = \{\xi \in X^* : \langle \xi, v \rangle \leq 0, \forall v \in D\}.$$

Nón pháp tuyến của C tại $\bar{x}$ là nón cực của nón tiếp tuyến $T(C, \bar{x})$

1.4. Phần trong tựa tương đối

Định nghĩa 1.5. [8] Với tập con lồi C của X (X có thể vô hạn chiều), phần trong tựa tương đối (quasirelative interior) của C, kí hiệu là qri$C$, là tập của các phần tử $x \in C$ sao cho clcone$(C - x)$ là một không gian con tuyến tính của X. Phần trong tựa tương đối được ký hiệu là qri$C$.

Khái niệm phần trong tựa tương đối là một mở rộng của khái niệm phần trong tương đối (relative interior) trong không gian hữu hạn chiều. Nón pháp tuyến của C tại $\overline{x} \in C$ là tập

$$N(C; \overline{x}) := \{\xi \in X^* : \langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$

Khi đó, nếu $\overline{x} \in C$ thì $\overline{x} \in \text{qri}C$ khi và chỉ khi $N(C; \overline{x})$ là không gian con tuyến tính của X^*. Chú ý rằng nếu $\dim X < \infty$ và C là tập lồi khác rỗng thì ri$C \neq \emptyset$ và qriC=ri$C$, trong đó ri ký hiệu phần trong tương đối.

Tính chất 1.1. *Giả sử C và D là hai tập lồi của X sao cho $qriC \neq \emptyset$ và $qriD \neq \emptyset$; $x_0 \in C$, $\overline{x} \in qriC, \alpha \in \mathbb{R}$ và $\lambda \in [0; 1)$. Khi đó,*

- $qriC + qriD \subseteq qri(C + D)$,
- $\alpha qriC = qri(\alpha C)$,
- $qri(C \times D) = qriC \times qriD$,
- $cl\ qriC = cl\ C$,
- $(1 - \lambda)x_0 + \lambda\overline{x} \in qriC$,
- $qriC = qri(qriC)$.

Định lý 1.7. *(Định lý tách Cammaroto–Bella [5]) Giả sử A và B là các tập lồi khác rỗng của X. Giả sử $qriA \neq \emptyset, qriB \neq \emptyset$ và $clcone(qriA - qriB)$ không là không gian con tuyến tính của X. Khi đó, tồn tại $0 \neq \zeta \in X^*$ sao cho*

$$\langle \zeta, x \rangle \leq \langle \zeta, y \rangle \ (\forall x \in A, \forall y \in B).$$

Nhận xét 1.1. Định lý 1.7 không cần điều kiện int$A \neq \emptyset$ hoặc int$B \neq \emptyset$. Điều kiện này được thay bởi qri$A \neq \emptyset$ hoặc qri$B \neq \emptyset$. Trong không gian hữu hạn chiều, điều này tự động thỏa mãn, bởi vì với A, B khác rỗng lồi thì qri$A$ = ri$A \neq \emptyset$ và qri$B$ = ri$B \neq \emptyset$.

Ví dụ sau đây minh họa cho Định lý 1.7.

Ví dụ 1.1. Cho $X = \mathbb{R}^p$, $A = \{(x_1, \ldots, x_{p-1}, 1) \in \mathbb{R}^p : \ 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, p-1\}$ và $B = \{(x_1, \ldots, x_{p-1}, 0) \in \mathbb{R}^p : \ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, p-1\}$. Khi đó, qri$A = \{(x_1, \ldots, x_{p-1}, 1) \in \mathbb{R}^p : \ 0 < x_i < 1, i = 1, \ldots, p-1\} \neq \emptyset$, qri$B = \{(x_1, \ldots, x_{p-1}, 0) \in \mathbb{R}^p : \ x_i > 0, i = 1, \ldots, p-1\} \neq \emptyset$ và clcone(qri$A$ − qri$B$) không là một không gian con tuyến tính của $\mathbb{R}^p$. Vì vậy, ta có thể áp dụng Định lý 1.7 để tách các tập A và B bởi một siêu phẳng.

1.5. Hàm lồi suy rộng

Hàm thực Lipschitz địa phương f trên X được gọi là $\partial-$giả lồi tại $\bar{x}$ trên C của X nếu (xem [23])

$$(\exists \xi \in \partial f(\bar{x}))\ \langle \xi, x-\bar{x}\rangle \geq 0 \Rightarrow f(x)-f(\bar{x}) \geq 0 \quad (\forall x \in C).$$

Nếu f khả vi Fréchet tại $\bar{x}$, f giả lồi tại $\bar{x}$ trên C, thì

$$\langle \nabla f(\bar{x}), x-\bar{x}\rangle \geq 0 \Rightarrow f(x)-f(\bar{x}) \geq 0 \quad (\forall x \in C).$$

Hàm thực Lipschitz địa phương f được gọi là $\partial-$tựa lồi tại $\bar{x}$ trên C của X nếu (xem [20])

$$f(x)-f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow \langle \xi, x-\bar{x}\rangle \leq 0 \quad (\forall \xi \in \partial f(\bar{x}), \forall x \in C).$$

Hàm f là $\partial-$tựa lõm tại $\bar{x}$ trên C nếu $-f$ là $\partial-$tựa lồi tại $\bar{x}$ trên C. Hàm f được gọi là $\partial-$tựa tuyến tính tại $\bar{x}$ trên C nếu f là $\partial-$tựa lồi và $\partial-$tựa lõm tại $\bar{x}$ trên C.

Tính lồi theo nón của một ánh xạ f từ tập A vào không gian Y được định nghĩa như sau.

Một ánh xạ $f : A \to Y$ được gọi là C-lồi trên A nếu với mọi $x, y \in A,\ t \in [0,1]$, ta có

$$tf(x)+(1-t)f(y) \in f(tx+(1-t)y)+C. \tag{1.1}$$

Trường hợp $Y=\mathbb{R}$, $C=\mathbb{R}_+$, quan hệ phụ thuộc trong (1.1) trở thành bất đẳng thức:

$$tf(x)+(1-t)f(y) \geq f(tx+(1-t)y), \tag{1.2}$$

và ánh xạ f được gọi là lồi trên A theo nghĩa thông thường.

Ví dụ 1.2. Các hàm số thực $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa tương ứng bởi $f(x)=x^2$ và $g(x)=|x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là lồi trên tập xác định của nó. Tuy nhiên, các hàm $-f$ và $-g$ là không lồi trên tập xác định của đó.

Ví dụ 1.3. Cho $A=\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$ và hàm số thực $f : A \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=-x^4+6x^2\ \ \forall x \in A$. Ta có f là lồi trên A bởi vì $f'(x)=-4x^3+12x$, $f''(x)=-12x^2+12=12(1-|x|)(1+|x|) \geq 0$ mọi $x \in A$.

Cho ánh xạ $f : A \to Y$ và điểm $\overline{x} \in A$. Khi đó,
(a) Với mỗi $h \in X$, nếu giới hạn sau:

$$Df(\overline{x})(h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\overline{x} + th) - f(\overline{x})}{t}$$

tồn tại, thì ta nói $Df(\overline{x})(h)$ là đạo hàm theo hướng của hàm f tại điểm $\overline{x}$ theo hướng h. Nếu giới hạn này tồn tại với mọi $h \in X$, thì f được gọi là khả vi theo hướng tại điểm $\overline{x}$.
(b) Với mỗi $\overline{x} \in A$ và mọi $h \in X$, nếu giới hạn sau:

$$D_G f(\overline{x})(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x} + th) - f(\overline{x})}{t}$$

tồn tại và $D_G f(\overline{x}) : X \to Y$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục, thì $D_G f(\overline{x})$ gọi là đạo hàm Gateaux của f tại điểm $\overline{x}$. Trường hợp này, hàm f được gọi là khả vi Gateaux tại điểm $\overline{x}$.

Mệnh đề 1.3. Các khẳng định sau là đúng:

(i) Nếu f khả vi Gateaux tại điểm $\overline{x}$ thì nó khả vi theo hướng tại điểm đó.

(ii) Nếu f là C-lồi trên X và khả vi theo hướng (tương ứng, khả vi Gateaux) tại mọi điểm $\overline{x} \in X$ thì $Df(\overline{x}) : X \to Y$ (tương ứng, $D_G f(\overline{x}) : X \to Y$) là C-lồi trên X.

Chứng minh. Trường hợp (i): Sử dụng định nghĩa, kết quả thu được là hiển nhiên.
Trường hợp (ii): Ta chỉ xét cho trường hợp ánh xạ f khả vi theo hướng tại mọi điểm $\overline{x} \in X$, và trường hợp còn lại được suy ra trực tiếp từ (i). Để chứng minh ta lấy tùy ý $x, y \in X,\ t \in (0, 1],\ \lambda \in [0, 1]$ và đặt $x(t) = \overline{x} + tx$, $y(t) = \overline{x} + ty$. Sử dụng tính C- lồi của hàm f trên không gian X, ta có biểu diễn sau:

$$\begin{aligned} &\frac{f(\overline{x} + t(\lambda x + (1-\lambda)y)) - f(\overline{x})}{t} = \\ &\frac{f(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t)) - f(\overline{x})}{t} \\ &\in \frac{\lambda f(x(t)) + (1-\lambda)f(y(t)) - f(\overline{x})}{t} - C \end{aligned}$$

$$\in \frac{\lambda[f(x(t)) - f(\overline{x})] + (1-\lambda)[f(y(t)) - f(\overline{x})]}{t}$$
$$-C$$
$$\in \lambda\frac{f(x(t)) - f(\overline{x})}{t} + (1-\lambda)\frac{f(y(t)) - f(\overline{x})}{t}$$
$$-C.$$

Cho $t \to 0^+$ và sử dụng tính đóng của nón C ta nhận được:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(\overline{x} + t(\lambda x + (1-\lambda)y)) - f(\overline{x})}{t}$$
$$\in \lambda \lim_{t\to 0^+} \lambda\frac{f(x(t)) - f(\overline{x})}{t}$$
$$+(1-\lambda)\lim_{t\to 0^+} \lambda\frac{f(y(t)) - f(\overline{x})}{t} - C.$$

Theo định nghĩa đạo hàm theo hướng của hàm f tại $\overline{x}$ ta thu được

$$\lambda Df(\overline{x})(x) + (1-\lambda)Df(\overline{x})(y)$$
$$\in Df(\overline{x})(\lambda x + (1-\lambda)y) + C.$$

Điều này cho ta kết quả cần chứng minh. □

Ví dụ 1.4. Xét hàm giá trị thực f xác định trên tập $A = \mathbb{R}^2$ với

$$f(x,y) = e^{x-|y|} + 2|y| + 3x - 1 \ \ \forall\,(x,y) \in A.$$

Chọn điểm $\overline{x} = (0,0)$ và áp dụng khái niệm đạo hàm theo hướng của f tại điểm này, ta tính được

$$Df(\overline{x})(x,y) = D_G f(\overline{x})(x,y) = 4x + |y|$$
$$\forall\,(x,y) \in A.$$

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại khái niệm cơ sở của nón, nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc, và được phát biểu như sau:

Một tập lồi $B \subset Y$ được gọi là một cơ sở của nón C nếu $C = \text{cone}B$ và $0 \notin \text{cl}\,B$, trong đó cl B ký hiệu bao đóng của tập B và cone B là hình nón sinh bởi tập B với

$$\text{cone}B = \{tb : t \geq 0,\ b \in B\}.$$

Nếu B là một cơ sở của nón C thì tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$ sao cho

$$r = \inf\{\langle y^*, b\rangle \, : \, b \in B\} > \langle y^*, 0\rangle = 0.$$

Tiếp theo chúng tôi xét một lân cận lồi mở cân đối của gốc O trong Y :

$$V_B = \{y \in Y \, : \, |\, \langle y^*, y\rangle \,| < \frac{r}{2}\}$$

Dễ thấy, với mỗi lân cận lồi U của O thỏa mãn $U \subset V_B$, ta có $\mathrm{cone}(U+B)$ là nón lồi nhọn và $\mathrm{cl}(U+B)$ không chứa gốc O. Do đó, $C \setminus \{0\} \subset \mathrm{int}\,\mathrm{cone}(U+B)$.

Chương 2

Điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ với ràng buộc cân bằng

Chương 3 trình bày các kết quả về điều kiện cần Fritz John cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ không trơn với ràng buộc cân bằng (VEPEC) dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarke. Với các điều kiện chính quy thích hợp cho bài toán với ràng buộc cân bằng, các điều kiện cần Kuhn – Tucker được thiết lập. Các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu với các giả thiết về tính lồi suy rộng được chứng minh. Chú ý rằng để thiết lập điều kiện cần cho (VEPEC) trên tập chấp nhận được K, ta xét bài toán cân bằng vectơ (VEP1) trên tập K_1 với $K_1 \subseteq K$. Để thiết lập điều kiện đủ cho (VEPEC), ta xét bài toán cân bằng vectơ (VEP2) trên tập K_2 với $K \subseteq K_2$. Các kết quả được dựa vào công trình của Đ.V. Lưu – Đ.D. Hằng (2015) (SCIE).

2.1. Điều kiện cần tối ưu Fritz John

2.1.1 Phát biểu bài toán

Giả sử X là không gian Banach, $F : X \times X \to \mathbb{R}^n$, $g : X \to \mathbb{R}^m$, $h : X \to \mathbb{R}^p$, $G : X \to \mathbb{R}^r$, $H : X \to \mathbb{R}^r$. Giả sử C là tập đóng của X, Q là nón lồi đóng nhọn trong $\mathbb{R}^n$ với $\text{int}Q \neq \emptyset$. Đặt

$$K := \{x \in C : g(x) \leq 0,\ h(x) = 0,\ G(z) \geq 0,\ H(x) \geq 0,\ G(x)^T H(x) = 0\},$$

trong đó $G(x)^T$ là chuyển vị của $G(x)$.

Xét bài toán cân bằng (VEPEC): Tìm $x \in K$ sao cho

$$F(x, y) \notin -P \setminus \{0\}, \tag{2.1}$$

trong đó P là nón lồi trong $\mathbb{R}^n$ (VEPEC trên K). Nếu $P = \mathrm{int}Q$ thì $x \in K$ thỏa mãn (2.1) được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC). Như vậy, x là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC) nếu

$$F(x, y) \notin -\mathrm{int}Q \quad (\forall y \in K).$$

Điều này tương đương với

$$F(x, K) \cap (-\mathrm{int}Q) = \emptyset.$$

Giả sử $L(X; \mathbb{R}^n)$ là không gian các ánh xạ tuyến tính liên tục từ X vào $\mathbb{R}^n$, T là ánh xạ từ X vào $L(X; \mathbb{R}^n)$. Bài toán bất đẳng thức biến phân (VVIEC) là trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng (VEPEC): Tìm $x \in K$ sao cho

$$(Tx)(y - x) \notin -P \setminus \{0\} \quad (\forall y \in K). \tag{2.2}$$

Nếu $P = \mathrm{int}Q$, vectơ $x \in K$ thỏa mãn (2.2) sẽ được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VVIEC). Nếu $F(x, y) = f(y) - f(x)\, (x, y \in K)$, trong đó $f : x \to \mathbb{R}^n$, bài toán cân bằng (VEPEC) trở thành bài toán tối ưu vectơ (VOPEC):

$$\min\{f(x) : x \in K\}.$$

Nếu $P = \mathrm{int}Q$, nghiệm của bài toán (VOPEC) được gọi là cực tiểu Pareto yếu. Flegel – Kanzow [5] đã nghiên cứu bài toán (VOPEC) cho trường hợp $n = 1,\ C = X$, $\dim X < \infty$ và các hàm là khả vi liên tục.

Ta có $F = (F_1, \ldots, F_n),\ g = (g_1, \ldots, g_m),\ h = (h_1, \ldots, h_p),\ G = (G_1, \ldots, G_r)$, $H = (H_1, \ldots, H_r)$. Với $\bar{x} \in K$, đặt $F_{\bar{x}}(y) := F(\bar{x}, y)$ và $I(\bar{x}) := \{i \in \{1, \ldots, m\} : g_i(\bar{x}) = 0\}$. Để trình bày điều kiện cần tối ưu cho bài toán (VEPEC), ta đưa vào giả thiết sau:

Giả thiết 2.1. *Các hàm $F_{\bar{x}}(.)$, $g_1, \ldots, g_m$, $h_1, \ldots, h_p$, $G_1, \ldots, G_r$, $H_1, \ldots, H_r$ Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$.*

Với $\overline{x} \in K$, ta đặt

$$A := A(\bar{x}) := \{i \in \{1, \ldots, r\} |\, G_i(\bar{x}) = 0,\ H_i(\bar{x}) > 0\},$$

$$B := B(\bar{x}) := \{i \in \{1, \dots, r\} |\, G_i(\bar{x}) = 0,\ H_i(\bar{x}) = 0\},$$

$$D := D(\bar{x}) := \{i \in \{1, \dots, r\} |\, G_i(\bar{x}) > 0,\ H_i(\bar{x}) = 0\}.$$

Với $\bar{x} \in K$, ta có $A \cup B \cup D = \{1, \dots, r\}$. Xét một phân hoạch (B_1, B_2) của B, nghĩa là $B = B_1 \cup B_2$ và $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Đặt

$$\begin{aligned} K_1 := \{x \in C : g(x) \leq 0,\ h(x) = 0, G_{A\cup B_1}(x) = 0,\ G_{D\cup B_2}(x) \geq 0, \\ H_{A\cup B_1}(x) \geq 0,\ H_{D\cup B_2}(x) = 0\}, \end{aligned}$$

trong đó $G_{A\cup B_1}(x)$ là vectơ con của $G(x)$, bao gồm các thành phần $G_i(x)$ với $i \in A \cup B_1$. Chú ý rằng K_1 phụ thuộc $\bar{x}$ và $K_1 \subseteq K$.

2.1.2 Điều kiện cần tối ưu Fritz John cho bài toán (VEPEC)

Bây giờ ta xét bài toán cân bằng vectơ (VEP1): Tìm $x \in K_1$ sao cho

$$F(x, y) \notin -\mathrm{int}Q\ (\forall y \in K_1).$$

Một điều kiện cần kiểu Fritz John cho (VEPEC) được phát biểu như sau:

Định lý 2.1. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC); $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$ và giả thiết 2.1 thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $\bar{\tau} \geq 0$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$ không đồng thời bằng 0, và hàm dưới cộng tính thuần nhất dương liên tục $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (M):*

$$y_2 - y_1 \in intQ \Rightarrow \Lambda(y_2) < \Lambda(y_1)$$

sao cho

$$\begin{aligned} 0 \in \bar{\tau}\partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i\in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x}) \\ - \sum_{k\in A\cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l\in D\cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}), \end{aligned} \tag{2.3}$$

trong đó $N(C, \overline{x})$ là nón pháp tuyến Clarke của C tại $\overline{x}$.

Chứng minh. Bởi vì $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu của (VEPEC) và $K_1 \subseteq K$, ta suy ra $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEP1). Định lý vô hướng hóa của

Gong (Định lý 3.1 [8]) đã chỉ ra tồn tại một hàm thuần nhất dương dưới cộng tính $\Lambda \in R^n$ thỏa mãn tính chất (M), và

$$\Lambda \circ F_{\bar{x}}(x) \geq 0 \quad (\forall x \in K_1). \tag{2.4}$$

Vì $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$, cho nên $\bar{x}$ là cực tiểu của bài toán tối ưu vô hướng (SOP):

$$\begin{aligned} \min \ & \Lambda \circ F_{\bar{x}}(x), \\ & g(x) \leq 0, h(x) = 0, \\ & G_{A\cup B_1}(x) = 0, H_{A\cup B_1}(x) \geq 0, \\ & G_{D\cup B_2}(x) \geq 0, H_{D\cup B_2}(x) = 0, \\ & x \in C. \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 6.1.1 [4] cho bài toán (SOP), ta suy ra tồn tại $\bar{\tau} \geq 0$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda} \geq 0$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_{D\cup B_2} \geq 0$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_{A\cup B_1} \geq 0$ không đồng thời bằng 0, sao cho

$$\begin{aligned} 0 \in \bar{\tau}\partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k=1}^{r} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) \\ - \sum_{l=1}^{r} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\bar{\lambda} g(\bar{x}) = 0 \tag{2.6}$$

$$\bar{\nu}_{D\cup B_2} G_{D\cup B_2}(\bar{x}) = 0, \tag{2.7}$$

$$\bar{\chi}_{A\cup B_1} H_{A\cup B_1}(\bar{x}) = 0. \tag{2.8}$$

Như vậy, $\bar{\nu}_D \geq 0, \bar{\nu}_{B_2} \geq 0, \bar{\chi}_A \geq 0, \bar{\chi}_{B_1} \geq 0$. Vì $G_k(\bar{x}) > 0\,(\forall k \in D)$, $H_l(\bar{x}) > 0$ $(\forall l \in A)$, từ (2.7) và (2.8) ta suy ra $\bar{\nu}_k = 0\,(\forall k \in D)$, $\bar{\chi}_l = 0\,(\forall l \in A)$.
Ta có $\bar{\lambda}_i = 0\,(\forall i \notin I(\bar{x}))$. Vì vậy, (2.5) trở thành

$$\begin{aligned} 0 \in \bar{\tau}\partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x}) \\ - \sum_{k \in A\cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D\cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}). \end{aligned}$$

$\square$

2.1.3 Điều kiện cần Fritz John với điều kiện chính quy (VEPEC–RC)

Để nhận được $(\tau, \lambda) \neq (0, 0)$ trong điều kiện Fritz John (4.3), ta đưa vào điều kiện chính quy (VEPEC–RC) cho bài toán (VEPEC) như sau:

$$0 \in \sum_{j=1}^{p} \mu_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k \in A \cup B} \nu_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \chi_l \partial H_l(\bar{x}) + N_C(\bar{x})$$
$$\Rightarrow \mu_j = \nu_k = \chi_l = 0 \ (j = 1, \ldots, p;\ k \in A \cup B;\ l \in D \cup B).$$

Nhận xét 2.1. Điều kiện chính quy loại này đã được nghiên cứu bởi Jiménez – Novo [11] cho bài toán tối ưu vectơ. Trong trường hợp $C = X$, điều kiện (VEPEC–RC) trở thành: Với bất kỳ $\zeta_j \in \partial h_j(\bar{x})\, (j = 1, \ldots, p)$, $\eta_k \in \partial G_k(\bar{x})$ $(k \in A \cup B)$, $\gamma_l \in \partial H_l(\bar{x})\, (l \in D \cup B)$, hệ các vectơ $\zeta_j\, (j = 1, \ldots, p)$, $\eta_k\, (k \in A \cup B)$, $\gamma_l\, (l \in D \cup B)$ độc lập tuyến tính.

Với điều kiện (VEPEC–RC), ta nhận được điều kiện cần Fritz John như sau:

Định lý 2.2. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC); $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$; giả thiết 2.1 thỏa mãn và điều kiện chính quy (VEPEC–RC) đúng. Khi đó, tồn tại $\bar{\tau} \geq 0$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$ với $(\bar{\tau}, \bar{\lambda}) \neq (0, 0)$, và một hàm dưới cộng tính thuần nhất dương liên tục $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (M) sao cho*

$$0 \in \bar{\tau}\partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$
$$- \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}).$$

Chứng minh. Theo Định lý 2.1, tồn tại $\bar{\tau} \geq 0$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$ không đồng thời bằng 0, và một hàm dưới cộng tính thuần nhất dương liên tục $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (M) sao cho

$$0 \in \bar{\tau}\partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x})$$

$$- \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}). \tag{2.9}$$

Nếu $(\bar{\tau}, \bar{\lambda}) = (0, 0)$, từ công thức (2.9) suy ra

$$0 \in \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x})$$

Từ điều kiện chính quy (VEPEC–RC), ta suy ra

$$\bar{\mu}_j = \bar{\nu}_k = \bar{\chi}_l = 0 \ (j = 1, \ldots, p; k \in A \cup B; l \in D \cup B).$$

Vì vậy, với $(\bar{\tau}, \bar{\lambda}) = (0, 0)$, ta đi đến mâu thuẫn với giả thiết $\bar{\tau} \geq 0$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$ không đồng thời bằng 0. $\square$

Ví dụ 2.1. Giả sử $X = \mathbb{R}^2$, $C = [0, 1] \times [0, 1]$, $Q = \mathbb{R}^2_+$, $\bar{x} = (0, 0)$, trong đó $\mathbb{R}^2_+$ là orthant không âm trong $\mathbb{R}^2$. Cho hàm $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$F = (f_1, f_2, f_3),$$

$$f_1(x, y) = |y_1| + |y_2| - |x_1|,$$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} y_2^2 |cos \frac{\pi}{y_2}|, & y_2 \neq 0, \\ 0, & y_2 = 0, \end{cases}$$

$$f_3(x, y) = -y_1 + x_2,$$

$(x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2)$. Đặt $f_{i,\bar{x}}(y) = f_i(\bar{x}, y)$ $(i = 1, 2, 3)$. Khi đó, $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = (0, 0, 0)$, $\partial f_{1,\bar{x}}(\bar{x}) = [0, 1] \times [0, 1]$, $\partial f_{2,\bar{x}}(\bar{x}) = \{0\} \times [-\pi, \pi]$, $\partial f_{3,\bar{x}}(\bar{x}) = \{1\} \times \{0\}$. Cho các hàm $g, G, H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$g(y) = y_1^2 - y_2,$$

$$G(y) = -|y_1| + y_2,$$

$$H(y) = -2^{y_1} + y_2 + 1.$$

Điểm $\bar{x} = (0, 0)$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ:

$$F(x, y) \notin -intQ \quad (\forall y \in K),$$

trong đó

$$K = \{y \in \mathbb{R}^2 : g(y) \leq 0, G(y) \geq 0, H(y) \geq 0, G(y)H(y) = 0\}.$$

Ta thấy các giả thiết của Định lý 2.1 đều thỏa mãn. Ta có: $\partial g(\bar{x}) = \{0\}\times\{-1\}$, $\partial G(\bar{x}) = [-1, 1] \times \{1\}$, $\partial H(\bar{x}) = \{-1\} \times \{1\}$, $N(C, \bar{x}) = \mathbb{R}^2_-$, trong đó $\mathbb{R}^2_- = -\mathbb{R}^2_+$.

Điều kiện cần tối ưu (2.3) đúng với $\Lambda = (1, 0, 0)$, $\partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $\bar{\tau} = 3$, $\bar{\lambda} = \bar{\nu} = \bar{\chi} = 1$:

$$\begin{aligned}(0, 0) \in 3.[-1, 1] \times [-1, 1] + 1.\{0\} \times \{-1\}\\ -1.[-1, 1] \times \{1\} - 1.\{-1\} \times \{1\} + \mathbb{R}^2_-.\end{aligned}$$

2.2. Điều kiện cần tối ưu Kuhn – Tucker

2.2.1 Các điều kiện chính quy (VEPEC–CQ1) và (VEPEC–CQ2)

Để dẫn điều kiện cần tối ưu Kuhn – Tucker cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC), ta đưa vào điều kiện chính quy (VEPEC–CQ1) như sau:

(a) $0 \in \sum_{j=1}^{p} \mu_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k\in A\cup B} \nu_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l\in D\cup B} \chi_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x})$

$$\Rightarrow \mu_j = \nu_k = \chi_l = 0 \ (j = 1, \dots, p;\ k \in A \cup B;\ l \in D \cup B).$$

(b) Tồn tại một vectơ $v \in T_C(\bar{x})$ sao cho

$$\begin{aligned}\langle \zeta_j, v\rangle = 0 \quad &(\forall \zeta_j \in \partial h_j(\bar{x}),\ j = 1, \dots, p),\\ \langle \eta_k, v\rangle = 0 \quad &(\forall \eta_k \in \partial G_k(\bar{x}),\ \forall k \in A \cup B),\\ \langle \gamma_l, v\rangle = 0 \quad &(\forall \gamma_l \in \partial H_k(\bar{x}),\ \forall l \in D \cup B),\\ \langle \xi_i, v\rangle < 0 \quad &(\forall \xi_i \in \partial g_i(\bar{x}),\ \forall i \in I(\bar{x})).\end{aligned}$$

Nhận xét 2.2.

(a) Với các bài toán (VVIEC) và (VOPEC), điều kiện chính quy (VEPEC–CQ1) được gọi là (VVIEC–CQ1) và (VOPEC–CQ1).

(b) Trong trường hợp $C = X$, điều kiện chính quy (VEPEC–CQ1) có trường hợp đặc biệt là (VEPEC–CQ2) như sau:

(i) Với mỗi $\bar{\zeta}_j \in \partial h_j(\bar{x})$, $(j = 1, \ldots, p)$, $\bar{\eta}_k \in \partial G_k(\bar{x})\,(k \in A \cup B)$, $\bar{\gamma}_l \in \partial H_l(\bar{x})\,(l \in D \cup B)$, hệ các vectơ ζ_j $(j = 1, \ldots, p)$, $\eta_k\,(k \in A \cup B)$, γ_l $(l \in D \cup B)$ độc lập tuyến tính.

(ii) Tồn tại vectơ $v \in X$ sao cho

$$\langle \zeta_j, v \rangle = 0 \quad (\forall \zeta_j \in \partial h_j(\bar{x}),\, j = 1, \ldots, p),$$

$$\langle \eta_k, v \rangle = 0 \quad (\forall \eta_k \in \partial G_k(\bar{x}),\, \forall k \in A \cup B)$$

$$\langle \gamma_l, v \rangle = 0 \quad (\forall \gamma_l \in \partial H_l(\bar{x}),\, \forall l \in D \cup B)$$

$$\langle \xi_i, v \rangle < 0 \quad (\forall \xi_i \in \partial g_i(\bar{x}),\, \forall i \in I(\bar{x})).$$

Nhận xét 2.3. Trong trường hợp $\dim X < \infty$, $C = X$, bằng một lý luận tương tự đã sử dụng để chứng minh Mệnh đề 4.2 [12], ta suy ra điều kiện chính quy (VEPEC–CQ2) kéo theo điều kiện chính quy sau đây: Với mỗi $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\lambda_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\nu \in \mathbb{R}^r$, $\nu_k \geq 0$ $(\forall k \in A \cup B_2)$, $\chi \in \mathbb{R}^r$, $\chi_l \geq 0$ $(\forall l \in D \cup B_1)$ không đồng thời bằng không, sao cho

$$0 \notin \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k \in A \cup B} \nu_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \chi_l \partial H_l(\bar{x}).$$

2.2.2 Điều kiện cần Kuhn – Tucker cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC)

Một điều kiện cần Kuhn – Tucker cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC) được phát biểu như sau:

Định lý 2.3. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC); $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$; giả thiết 2.1 và điều kiện chính quy (VEPEC–CQ1) thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$, và một hàm dưới cộng tính thuần nhất dương liên tục $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (M) sao cho*

$$0 \in \partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$

$$- \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}).$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 2.2 ta suy ra tồn tại $\bar{\tau} \geq 0$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$ với $(\bar{\tau}, \bar{\lambda}) \neq (0, 0)$, và một hàm dưới cộng tính thuần nhất dương liên tục $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (M) sao cho

$$0 \in \bar{\tau}\partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}). \tag{2.10}$$

Giả sử ngược lại, $\bar{\tau} = 0$. Khi đó, $\bar{\lambda} \neq 0$. Từ (2.10) tồn tại $\bar{\xi}_i \in \partial g_i(\bar{x})$ $(i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\zeta}_j \in \partial h_j(\bar{x})$ $(j = 1, .., p)$, $\bar{\eta}_k \in \partial G_k(\bar{x}) (k \in A \cup B)$, $\bar{\gamma}_l \in \partial H_l(\bar{x})$ $(l \in D \cup B)$, $\bar{\sigma} \in N(C, \bar{x})$ sao cho

$$0 = \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \bar{\xi}_i + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \bar{\zeta}_j - \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \bar{\eta}_k - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \bar{\gamma}_l + \bar{\sigma}. \tag{2.11}$$

Do điều kiện chính quy (VEPEC–CQ1), tồn tại vectơ $\upsilon \in T_C(\bar{x})$ sao cho

$$\langle \zeta_j, \upsilon \rangle = 0 \quad (\forall \zeta_j \in \partial h_j(\bar{x}), j = 1, \ldots, p),$$

$$\langle \eta_k, \upsilon \rangle = 0 \quad (\forall \eta_k \in \partial G_k(\bar{x}), \forall k \in A \cup B);$$

$$\langle \gamma_l, \upsilon \rangle = 0 \quad (\forall \gamma_l \in \partial H_l(\bar{x}), \forall l \in D \cup B);$$

$$\langle \xi_i, \upsilon \rangle < 0 \quad (\forall \xi_i \in \partial g_i(\bar{x}), \forall i \in I(\bar{x})).$$

Từ đó, ta suy ra

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \langle \bar{\xi}_i, \upsilon \rangle + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \langle \bar{\zeta}_j, \upsilon \rangle - \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \langle \bar{\eta}_k, \upsilon \rangle - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \langle \bar{\gamma}_l, \upsilon \rangle + \langle \bar{\sigma}, \upsilon \rangle < 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.11). Vì vậy, $\bar{\tau} > 0$, và không mất tính chất tổng quát ta có thể lấy $\bar{\tau} = 1$. □

Trong trường hợp $F_{\bar{x}}(.)$ khả vi chặt tại $\bar{x}$, ta nhận được điều kiện cần Kuhn – Tucker sau đây:

2.2.3 Điều kiện cần Kuhn – Tucker cho trường hợp $F_{\bar{x}}(.)$ khả vi chặt

Định lý 2.4. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC) và các giả thiết của Định lý 4.3 thỏa mãn; $F_{\bar{x}}(.)$ khả vi chặt tại $\bar{x}$ với đạo hàm chặt $D_sF_{\bar{x}}(\bar{x})$. Khi đó, tồn tại $\bar{\rho} \in Q^* \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$ sao cho*

$$0 \in [D_sF_{\bar{x}}(\bar{x})]^*\bar{\rho} + \sum_{i\in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$
$$- \sum_{k\in A\cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l\in D\cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C,\bar{x}). \tag{2.12}$$

trong đó $[D_sF_{\bar{x}}(\bar{x})]^*$ là ánh xạ liên hợp của $D_sF_{\bar{x}}(\bar{x})$.

Chứng minh. Áp dụng Định lý 4.3, ta suy ra tồn tại $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$, và một hàm dưới cộng tính thuần nhất dương liên tục $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (M) sao cho

$$0 \in \partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i\in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k\in A\cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x})$$
$$- \sum_{l\in D\cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C,\bar{x}). \tag{2.13}$$

Bởi vì $F_{\bar{x}}(.)$ khả vi chặt tại $\bar{x}$, theo Định lý 2.3.10 [4], ta có

$$\partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) \subseteq [D_sF_{\bar{x}}(\bar{x})]^*\partial(\Lambda(F_{\bar{x}}(\bar{x})) \tag{2.14}$$

Từ (2.13) và (2.15) suy ra

$$0 \in [D_sF_{\bar{x}}(\bar{x})]^*\partial(\Lambda(F_{\bar{x}})(\bar{x})) + \sum_{i\in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$
$$- \sum_{k\in A\cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l\in D\cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C,\bar{x}).$$

Từ đó, ta suy ra tồn tại $\bar{\rho} \in \partial(\Lambda(F_{\bar{x}})(\bar{x}))$ sao cho

$$0 \in [D_sF_{\bar{x}}(\bar{x})]^*\rho + \sum_{i\in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k\in A\cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x})$$

$$- \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}). \tag{2.15}$$

Ta sẽ chỉ ra $\rho \in Q^* \setminus \{0\}$. Thật vậy, với mỗi $y \in \text{int}Q$ ta có $0 - (-y) \in \text{int}Q$. Vì vậy,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\rho}, -y \rangle &= \langle \bar{\rho}, F_{\bar{x}}(\bar{x}) - y \rangle - F_{\bar{x}}(\bar{x}) \rangle \leq \Lambda(F_{\bar{x}}(\bar{x}) - y) - \Lambda(F_{\bar{x}}(\bar{x})) \\ &= \Lambda(-y) < \Lambda(0) = 0. \end{aligned}$$

□

2.3. Điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu

2.3.1 Điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC)

Xét tập $K_2 = \{x \in C : g(x) \leq 0, h(x) = 0,\ G(x) \geq 0, H(x) \geq 0\}$. Để dẫn điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC), ta xét bài toán cân bằng vectơ (VEP2): Tìm $x \in K_2$ sao cho

$$F(x, y) \notin -\text{int}Q \quad (\forall y \in K_2).$$

Chú ý rằng nếu $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEP2) thì $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC), bởi vì $K \subseteq K_2$. Đặt

$$I_G(\bar{x}) := \{k \in \{1, \ldots, r\} : G_k(\bar{x}) = 0\},$$

$$I_H(\bar{x}) := \{l \in \{1, \ldots, r\} : H_l(\bar{x}) = 0\}.$$

Khi đó, với $\bar{x} \in K$, ta có $A \cup B = I_G(\bar{x}), D \cup B = I_H(\bar{x})$.
Một điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC) có thể phát biểu như sau:

Định lý 2.5. *Giả sử $\bar{x} \in K$, $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$ và giả thiết 2.1 thỏa mãn. Giả sử tồn tại $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in A \cup B)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in D \cup B)$, và một hàm dưới cộng tính thuần nhất dương liên tục $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (M) sao cho*

$$0 \in \partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$

$$- \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}). \tag{2.16}$$

Giả sử C là tập lồi, ánh xạ $\Lambda \circ F_{\bar{x}}$ là $\partial-$giả lồi tại $\bar{x}$ trên C, các ánh xạ $g_i\,(i \in I(\bar{x}))$ là $\partial-$tựa lồi tại $\bar{x}$ trên C, G_k $(k \in A \cup B)$, H_l $(l \in D \cup B)$ là $\partial-$tựa lõm tại $\bar{x}$ trên C, $h_j\,(j = 1, \ldots, p)$ là $\partial-$tựa tuyến tính tại $\bar{x}$ trên C. Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC).

Chứng minh. Bởi vì Λ lồi liên tục, cho nên Λ Lipschitz địa phương. Vì vậy, $\Lambda \circ F_{\bar{x}}$ Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$. Từ (2.16), ta suy ra tồn tại $\theta \in \partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}})(\bar{x})$, $\xi_i \in \partial g_i(\bar{x})\,(i \in I(\bar{x}))$, $\zeta_j \in \partial h_j(\bar{x})\,(i = 1, \ldots, p)$, $\eta_k \in \partial G_k(\bar{x})\,(k \in A \cup B)$, $\gamma_l \in \partial H_k(\bar{x})\,(l \in B \cup B)$ và $\sigma \in N_C(\bar{x})$ sao cho

$$0 \in \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda} \xi_i + \sum_{i=1}^{p} \bar{\mu}_j \zeta_j - \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \eta_k - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \gamma_l + \sigma = 0.$$

Từ đó suy ra với $x \in C$,

$$\begin{aligned} \langle \theta, x - \bar{x} \rangle + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda} \langle \xi_i, x - \bar{x} \rangle + \sum_{i=1}^{p} \bar{\mu}_j \langle \zeta_j, x - \bar{x} \rangle - \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \langle \eta_k, x - \bar{x} \rangle \\ - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \langle \gamma_l, x - \bar{x} \rangle + \langle \sigma, x - \bar{x} \rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Mặt khác, với $x \in K_2$, ta có $g_i(x) \leq 0 = g_i(\bar{x})$. Do tính chât $\partial-$tựa lồi của hàm g_i, ta có

$$\langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \ (\forall i \in I(\bar{x})). \tag{2.18}$$

Với $x \in K_2$, ta có $h_j(x) - h_j(\bar{x}) = 0$. Sử dụng tính chất $\partial-$tựa tuyến tính của h_j, ta nhận được

$$\langle \zeta_j, x - \bar{x} \rangle = 0 \ (\forall j = 1, \ldots, p). \tag{2.19}$$

Bởi vì các hàm G_k $(k \in A \cup B)$ và H_l $(l \in D \cup B)$ là $\partial-$tựa lõm tại $\bar{x} \in K_2$, cho nên

$$\langle \eta_k, x - \bar{x} \rangle \geq 0 \ (\forall k \in A \cup B), \tag{2.20}$$

$$\langle \gamma_l, x - \bar{x} \rangle \geq 0 \quad (\forall l \in D \cup B). \tag{2.21}$$

Bởi vì C lồi, cho nên $T(C; \bar{x}) = \mathbb{R}_+(C - \bar{x})$. Từ đó, ta suy ra

$$\langle \sigma, x - \bar{x} \rangle \leq 0. \tag{2.22}$$

Từ (2.17) - (2.22) ta suy ra với mọi $x \in K_2$,

$$< \theta, x - \bar{x} > \geq 0.$$

Do tính chất $\partial-$giả lồi của ánh xạ $\Lambda \circ F_{\bar{x}}$, ta nhận được

$$\Lambda \circ F_{\bar{x}}(x) \geq \Lambda \circ F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0 \ (\forall x \in K_2). \tag{2.23}$$

Ta chỉ ra $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEP2). Thật vậy, giả sử ngược lại sẽ tồn tại $x_1 \in K_2$ sao cho

$$F_{\bar{x}_1}(x_1) \in -\text{int}Q.$$

Do $F_{\bar{x}_1}(x_1) = 0 - (-F_{\bar{x}_1}(x_1)) \in \text{int}Q$ và sử dụng tính chất (M) của Λ, ta nhận được

$$\Lambda \circ F_{\bar{x}}(x_1) < \Lambda(0) = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.23). Vậy $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEP2). Từ đó, ta suy ra $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC).

□

Trong trường hợp $F_{\bar{x}}(.)$ khả vi chặt tại $\bar{x}$, ta có điều kiện đủ tối ưu sau đây cho bài toán (VEPEC):

Hệ quả 2.1. *Giả sử $\bar{x} \in K$; $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$; $F_{\bar{x}}(.)$ khả vi chặt tại $\bar{x}$; $g_1, \ldots, g_m$, $h_1, \ldots, h_p$, $G_1, \ldots, G_r$, $H_1, \ldots, H_r$ Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$; tồn tại $\bar{\rho} \in Q^* \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in A \cup B)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in D \cup B)$ sao cho*

$$\begin{aligned} 0 \in [D_s F_{\bar{x}}(\bar{x})]^* \bar{\rho} &+ \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x}) \\ &- \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}). \end{aligned}$$

Giả sử C là tập lồi, các ánh xạ g_i $(i \in I(\bar{x}))$ là $\partial-$tựa lồi tại $\bar{x}$ trên C, G_k $(k \in A \cup B), H_l$ $(l \in D \cup B)$ là $\partial-$tựa lõm tại $\bar{x}$ trên C, h_j $(j = 1, \ldots, p)$ là $\partial-$tựa tuyến tính tại $\bar{x}$ trên C. Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC).

Chứng minh. Bởi vì ánh xạ $[D_s F_{\overline{x}}(\overline{x})]^* \overline{\rho}$ tuyến tính, cho nên giả lồi tại $\overline{x}$ trên C. Áp dụng Định lý 2.5, ta suy ra điều phải chứng minh. □

2.3.2 Ví dụ

Định lý 2.5 được minh họa bởi ví dụ sau đây:

Ví dụ 2.2. Lấy $X = \mathbb{R}^2,\ C = [-1,0] \times [-1,0],\ Q = \mathbb{R}^2_+,\ \bar{x} = (0,0)$. Cho ánh xạ $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$F = (f_1, f_2),$$
$$f_1(x,y) = \begin{cases} y_1^2 + x_2 y_2^2, & (y_1,y_2) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}, \\ -2y_1 - x^{\frac{1}{3}} y_2, & (y_1,y_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \end{cases}$$
$$f_2(x,y) = -ln(1+y_2) + x_2^2|y_1|,$$

$(x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2)$. Đặt $f_{i,\bar{x}}(y) = f_i(\bar{x}, y)$ $(i = 1,2)$. Khi đó $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = (0,0),\ \partial f_{1,\bar{x}}(\bar{x}) = [-2,0] \times \{0\}$, $\partial f_{2,\bar{x}}(\bar{x}) = \{0\} \times \{-1\}$, $Q^* = \mathbb{R}^2_+$. $g, G, H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$g(y) = \begin{cases} y_1 + y_2^2, & (y_1,y_2) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}, \\ 0, & (y_1,y_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} -e^{y_1} + 1 - y_2^2, & (y_1,y_2) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}, \\ 0, & (y_1,y_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$H(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}y_1 - y_2^2, & (y_1,y_2) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}, \\ y_1^2 - y_2^4, & (y_1,y_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Xét bài toán cân bằng vectơ:

$$F(x,y) \notin -\text{int}Q\ (\forall y \in K),$$

trong đó

$$K = \{y \in \mathbb{R}^2 : g(y) \leq 0,\ G(y) \geq 0,\ H(y) \geq 0,\ G(y)H(y) = 0\}.$$

Khi đó, $\bar{x} = (0,0) \in K$. Với $\Lambda = (1,0)$, ta có $\partial(\Lambda \circ F_{\bar{x}}(\bar{x})) = [-2,0] \times \{0\}$, và $\Lambda \circ F_{\bar{x}}$ là $\partial-$giả lồi tại $\bar{x}$ trên C; g là $\partial-$tựa lồi tại $\bar{x}$ trên C; G và H là $\partial-$tựa lõm tại $\bar{x}$ trên C. Ta có $\partial g(\bar{x}) = [0,1] \times \{0\},\ \partial G(\bar{x}) = [-1,0] \times \{0\}$, $\partial H(\bar{x}) = [-\frac{1}{2}, 0] \times \{0\}$, $T(C,\bar{x}) = \mathbb{R}^2_-$, $N(C,\bar{x}) = \mathbb{R}^2_+$. Điều kiện (2.16) đúng với $\Lambda = (1,0)$, $\bar{\lambda} = \bar{\nu} = \bar{\chi} = 1$:

$$(0,0) \in [-2,0] \times \{0\} + 1.[0,1] \times \{0\} - 1.[-1,0] \times \{0\} - 1.[-\frac{1}{2}, 0] \times \{0\} + \mathbb{R}^2_+.$$

Như vậy, các giả thiết của Định lý 2.5 thỏa mãn. Vì vậy, $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán trên.

Chương 3

Áp dụng

3.1. Điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ qua phần trong tựa tương đối

Trong mục này trình bày các điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ bằng cách sử dụng Định lý tách của Cammaroto – Bella [3], chúng tôi chứng minh điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán không có ràng buộc dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarle. Các điều kiện đủ tối ưu được dẫn với các giả thiết về tính $\partial-$giả lồi của hàm mục tiêu. Sử dụng kết quả của Jiménez – Novo [11] về nón của giao hai tập, chúng tôi chứng minh điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của bài toán có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập qua các dưới vi phân Clarke và Dini. Các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán đó được dẫn với các giả thiết về tính $\partial-$giả lồi và ∂_D-tựa lồi. Các kết quả đó được áp dụng để dẫn các điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức vectơ và bài toán tối ưu vectơ. Các kết quả được trình bày dựa vào công trình của Đ.V. Lưu – Đ.D. Hằng ([16]) (SCIE) và công trình của Đinh Diệu Hằng (2015).

3.1.1 Điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc

Giả sử $X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^n$, F là ánh xạ từ $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ vào $\mathbb{R}^m$; $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$; $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^\ell$; Q là nón lồi đóng nhọn trong $\mathbb{R}^n$; C là tập con đóng không rỗng của $\mathbb{R}^p$. Khi đó $g = (g_1, \dots, g_m)$, $h = (h_1, \dots, h_\ell)$, trong đó $g_1, \dots, g_m$, $h_1, \dots, h_\ell$

là các hàm giá trị thực xác định trên $\mathbb{R}^p$. Đặt $I = \{1, \ldots, m\}$, $L = \{1, \ldots, \ell\}$,

$$K = \{y \in C : g_i(y) \leqslant 0 \ (i \in I),\ h_j(y) = 0 \ (j \in L)\}.$$

Xét bài toán cân bằng vectơ (CVEP): Tìm $x \in K$ sao cho

$$F(x, y) \notin -Q \setminus \{0\} \ (\forall y \in K). \tag{3.1}$$

Công thức (3.1) tương đương với:

$$F(x, K) \cap (-Q \backslash \{0\}) = \emptyset.$$

Điểm $\overline{x}$ thỏa mãn (3.1) được gọi là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVEP). Đặt

$$I(\overline{x}) := \{i \in I : g_i(\overline{x}) = 0\},$$
$$H := \{x \in \mathbb{R}^p : g_i(x) \leq 0 \ (\forall i \in I(\overline{x})), h_j(x) = 0 \ (\forall j \in L)\},$$
$$D(H) := \{v \in \mathbb{R}^p : Dg_i(\overline{x}; v) < 0 \ (\forall i \in I(\overline{x})), \langle \nabla h_j(\overline{x}), v \rangle = 0 \ (\forall j \in L)\}.$$

$D(H)$ được thiết lập từ các đạo hàm của $g_i (i \in I(\overline{x}))$ và $h_j (j \in L)$. Như vậy $K = H \cap C$.

Giả sử T là ánh xạ từ $\mathbb{R}^p$ vào $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Với

$$F(x, y) = (Tx)(y - x) \ (x, y \in \mathbb{R}^p),$$

(CVEP) trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ, ký hiệu là (CVVI).

Giả sử f là ánh xạ từ $\mathbb{R}^p$ vào $\mathbb{R}^n$. Với song hàm

$$F(x, y) = f(y) - f(x) \ (x, y \in \mathbb{R}^p),$$

(CVEP) trở thành bài toán tối ưu vectơ (CVOP):

$$\min\{f(x) : \ x \in K\}.$$

Điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của (CVEP)

Kết quả sau đây của Jiménez – Novo [11] được sử dụng để chứng minh Định lý 3.1 dưới đây.

Mệnh đề 3.1. *Giả sử $\overline{x} \in K, C$ lồi; h liên tục trong một lân cận của $\overline{x}$ và khả vi Fréchet tại $\overline{x}$ với đạo hàm Fréchet $\nabla h(\overline{x}) = (\nabla h_1(\overline{x}), \ldots, \nabla h_\ell(\overline{x}))$; Với* *mỗi $i \in I(\overline{x}), g_i$ là tựa lồi trong một lân cận của $\overline{x}$ và khả vi Dini tại $\overline{x}$, hoặc khả vi Hadamard tại $\overline{x}$, trong cả hai trường hợp đạo hàm đều là hàm lồi theo biến phương. Giả sử điều kiện chính quy sau đúng:*

$$(CQ6) \quad 0 \in \sum_{i \in I(\overline{x})} \mu_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in J} \gamma_j \nabla h_j(\overline{x}) + N_C(\overline{x}), \mu_i \geqslant 0 \ (\forall i \in I(\overline{x}))$$
$$\Rightarrow \mu_i = 0 \ (\forall i \in I(\overline{x})), \gamma_j = 0 \ (j \in L).$$

Khi đó,

$$T_{H \cap C}(\overline{x}) = T_H(\overline{x}) \cap T_C(\overline{x}),$$

$$\begin{aligned} N_{H \cap C}(\overline{x}) &= N_H(\overline{x}) + N_C(\overline{x}) \\ &= coneco(\cup_{i \in I(\overline{x})} \partial_D g_i(\overline{x})) + lin\{\nabla h_j(\overline{x}) : \ j \in L\} + N_C(\overline{x}), \end{aligned}$$

trong đó $conecoA$ là nón sinh bởi bao lồi của A, lin kí hiệu bao tuyến tính.

Chú ý rằng nếu trong bài toán không có ràng buộc bất đẳng thức, $C = \mathbb{R}^p$, h thuộc lớp C^1 trong một lân cận của $\overline{x}$ và $\nabla h_1(\overline{x}), \ldots, \nabla h_\ell(\overline{x})$ độc lập tuyến tính thì Điều kiện chính quy (CQ6) đúng. Từ Mệnh đề 3.1 ta nhận được

$$T_H(\overline{x}) = ker \nabla h(\overline{x}).$$

Đây chính là Định lý Ljusternik cổ điển.
Bây giờ ta phát biểu điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của (CVEP).

Định lý 3.1. *Giả sử $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVEP); $F_{\overline{x}}(.)$ Lipschitz địa phương tại $\overline{x}$, $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$, và tất cả giả thiết của Mệnh đề 3.1 thỏa mãn. Giả sử $qriF_{\overline{x}}(K) \neq \emptyset$, $qriQ \neq \emptyset$ và $clcone[qri(coF_{\overline{x}}(K)) + qriQ]$ không là không gian con tuyến tính của $\mathbb{R}^p$. Khi đó, tồn tại $\overline{\lambda} \in Q^* \backslash \{0\}$, $\overline{\mu}_i \geq 0 \ \ (\forall i \in I(\overline{x})), \overline{\gamma}_j \in \mathbb{R} \ (j \in L)$ sao cho*

$$0 \in \overline{\lambda} \circ \partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in J} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N_C(\overline{x})$$

Chứng minh. Theo chứng minh Định lý 3.3 [11], ta có

$$T_H(\overline{x}) = \{v \in R^p : Dg_i(\overline{x}; v) \leq 0 \ (\forall i \in I(\overline{x})), \langle \nabla h_j(\overline{x}), v \rangle = 0 \ (\forall j \in L)\}.$$

Bởi vì với mỗi $i \in I(\overline{x})$, g_i tựa lồi trong một lân cận của $\overline{x}$ và khả vi Dini hoặc khả vi Hadamard tại $\overline{x}$, trong cả hai trường hợp đạo hàm đều lồi theo phương, ta suy ra $T(H;\overline{x})$ lồi. Vì vậy, $T_{H\cap C}(\overline{x})$ lồi, tồn tại $\overline{\lambda} \in Q^*\backslash\{0\}$ sao cho

$$0 \in \overline{\lambda} \circ \partial F_{\overline{x}}(\overline{x}) + N_{H\cap C}(\overline{x}). \tag{3.2}$$

Mặt khác, theo Mệnh đề 3.1, ta có

$$N_{H\cap C}(\overline{x}) = coneco(\cup_{i\in I(\overline{x})}\partial_D g_i(\overline{x})) + lin\{\nabla h_j(\overline{x}) : j \in L\} + N_C(\overline{x}). \tag{3.3}$$

Từ (3.2) và (3.3) suy ra tồn tại $\overline{\lambda} \in Q^*\backslash\{0\}, \overline{\mu}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\overline{x}))$ và $\overline{\gamma}_j \in \mathbb{R}$ $(j \in L)$ sao cho

$$0 \in \overline{\lambda} \circ \partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) + \sum_{i\in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x})) + \sum_{j\in L} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N_C(\overline{x}).$$

□

Nếu trong bài toán không có ràng buộc bất đẳng thức và $C = \mathbb{R}^p$, ta nhận được hệ quả sau đây của Định lý 3.1.

Hệ quả 3.1. *Giả sử các giả thiết của Định lý 3.1 thỏa mãn, trong đó không có ràng buộc bất đẳng thức, $C = \mathbb{R}^p$ và (CQ6) được thay bởi hệ $\nabla h_1(\overline{x}), \ldots, \nabla h_\ell(\overline{x})$ độc lập tuyến tính. Khi đó, tồn tại $\overline{\lambda} \in Q^*\backslash\{0\}$, $\overline{\gamma}_j \in \mathbb{R}$ sao cho*

$$0 \in \overline{\lambda} \circ \partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) + \sum_{j\in L} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}).$$

Chứng minh. Nếu trong bài toán không có ràng buộc bất đẳng thức, $C = \mathbb{R}^p$ và hệ $\nabla h_1(\overline{x}), \ldots, \nabla h_\ell(\overline{x})$ độc lập tuyến tính thì (CQ6) đúng. Áp dụng Định lý 3.1 ta nhận được điều phải chứng minh. □

Nếu trong bài toán không có ràng buộc bất đẳng thức, ta có

$$D(H) = \{v \in R^p : Dg_i(\overline{x}; v) < 0, \forall i \in I(\overline{x})\}.$$

Khi đó ta có Hệ quả sau

Hệ quả 3.2. *Giả sử các giả thiết của Định lý 3.1 thỏa mãn trong đó không có ràng buộc bất đẳng thức và (CQ6) được thay thế bởi*

$$(CQ7) \qquad D(H) \cap (C - \overline{x}) \neq \emptyset.$$

Khi đó, tồn tại $\overline{\lambda} \in Q^*\backslash\{0\}, \overline{\mu}_i \geq 0$ $(i \in I(\overline{x}))$ sao cho

$$0 \in \overline{\lambda} \circ \partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) + \sum_{i\in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + N_C(\overline{x}).$$

Chứng minh. Từ Nhận xét 3.4 [11] ta suy ra (CQ6) tương đương với (CQ7). Vì vậy, áp dụng Định lý 3.1 ta suy ra điều phải chứng minh. □

Điều kiện đủ tối ưu cho bài toán (CVEP)

Bây giờ ta phát biểu một điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu của (CVEP).

Định lý 3.2. *Giả sử* $\overline{x} \in K$; $F_{\overline{x}} : X \to Y$ *Lipschitz địa phương tại* $\overline{x}$, *h khả vi Fréchet tại* $\overline{x}$. *Khi đó, tồn tại* $\overline{\lambda} \in Q_0^*$, $\overline{\mu}_i \geq 0$ $(i \in I(\overline{x}))$, $\overline{\gamma}_j \in \mathbb{R}$ $(j \in L)$ *sao cho*

$$0 \in \overline{\lambda} \circ \partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in L} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N_C(\overline{x}). \tag{3.4}$$

Giả sử C *lồi, ánh xạ* $\overline{\lambda} \circ F_{\overline{x}}$ *là* $\partial-$*giả lồi tại* $\overline{x}$ *trên* C, *các ánh xạ* g_i $(i \in I(\overline{x}))$ ∂_D-*tựa lồi tại* $\overline{x}$ *trên* C, *các ánh xạ* $h_1, \ldots, h_l$ *tựa tuyến tính tại* $\overline{x}$ *trên* C. *Khi đó,* $\overline{x}$ *là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVEP).*

Chứng minh. Do (3.4) tồn tại $\xi \in \partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x})$, $\zeta_i \in \partial_D g_i(\overline{x})$ $(i \in I(\overline{x}))$, $\eta \in N_C(\overline{x})$ sao cho

$$\overline{\lambda} \circ \xi + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \zeta_i + \sum_{j \in L} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + \eta = 0. \tag{3.5}$$

Từ đó suy ra với bất kỳ $x \in C$,

$$\langle \overline{\lambda} \circ \xi, x - \overline{x} \rangle + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \langle \zeta_i, x - \overline{x} \rangle + \sum_{j \in L} \overline{\gamma}_j \langle \nabla h_j(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle + \langle \zeta, x - \overline{x} \rangle = 0. \tag{3.6}$$

Với $x \in K$, ta có $g_i(x) \leqslant 0 = g_i(\overline{x})$ $(\forall i \in I(\overline{x}))$. Do tính ∂_D-tựa lồi của g_i tại $\overline{x}$, ta suy ra

$$\langle \zeta_i, x - \overline{x} \rangle \leqslant 0 \ (\forall i \in I(\overline{x})). \tag{3.7}$$

Với $x \in K$, ta có $h_j(x) = 0 = h_j(\overline{x})$. Do tính tựa tuyến tính của $\pm h_j$ tại $\overline{x}$ $(j \in L)$, ta suy ra

$$\langle \nabla h_j(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle = 0 \ (j \in L)). \tag{3.8}$$

Mặt khác, bởi vì C lồi, ta suy ra $T_K(\overline{x}) = \mathbb{R}_+(C - \overline{x})$. Do đó,

$$\langle \eta, x - \overline{x} \rangle \leqslant 0. \tag{3.9}$$

Thay thế (3.7)–(3.9) vào (3.6), ta nhận được

$$\langle \lambda \circ \xi, x - \overline{x} \rangle \geqslant 0 \ (\forall x \in K).$$

Do tính $\partial-$giả lồi của $\overline{\lambda} \circ F_{\overline{x}}$, ta có

$$\overline{\lambda} \circ F_{\overline{x}}(x) \geqslant 0 \ (\forall x \in K). \tag{3.10}$$

Ta chỉ ra rằng $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu của (CVEP). Thật vậy, nếu điều này không đúng thì tồn tại $x_1 \in K$ sao cho

$$F(\overline{x}, x_1) \in -Q \setminus \{0\}.$$

Bởi vì $\overline{\lambda} \in Q_0^*$ cho nên

$$\overline{\lambda} \circ F_{\overline{x}}(x_1) < 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (3.10). □

Ví dụ 3.1. Cho F là ánh xạ từ $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ vào $\mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$F(x, y) = \left(\mid x_2 \mid^{\frac{1}{2}} + \mid y_1 \mid, \frac{1}{2} \mid y_3 \mid - \mid x_2 \mid, -x_2 + y_2 \right),$$

$(x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3)$. Lấy $Q = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}_+$, $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1], \overline{x} = (0, 0, 0)$, và g được xác định trên $\mathbb{R}^3$ như sau:

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x)) = \left(x_1^2 \sin \frac{1}{x_1} - x_1^2, -x_2 \right).$$

Khi đó, $K = C, Q^* = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$, $T_K(\overline{x}) = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $N_K(\overline{x}) = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$, và

$$F_{\overline{x}}(y) = \left(\mid y_1 \mid, \frac{1}{2} \mid y_3 \mid, y_2 \right),\ F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0.$$

Ta có $\mathrm{qri} F_{\overline{x}}(K) = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \neq \emptyset$, $\mathrm{qri} Q = \mathbb{R}_{++} \times \{0\} \times \mathbb{R}_{++} \neq \emptyset$, $\mathrm{clcone}[\mathrm{qri}(\mathrm{co} F_{\overline{x}}(K)) + \mathrm{qri} Q]$ không là một không gian con tuyến tính của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$\partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : -1 \leqslant \alpha \leqslant 1, -\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2} \right\}$$

$$\partial_D g_1(\overline{x}) = \{(0, 0, 0)\},\ \partial_D g_2(\overline{x}) = \{(0, -1, 0)\}.$$

Điểm $\overline{x} = (0,0,0)$ là một nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng:

$$F(x,y) \notin -Q \setminus \{0\} \ (\forall y \in K).$$

Khi đó các giả thiết của Định lý 3.1 thỏa mãn và điều kiện cần đã phát biểu trong Định lý 3.1 đúng với $\overline{\lambda} = (1,1,1)$, $\overline{\mu}_1 = 1$, $\overline{\mu}_2 = 2$.

3.1.2 Áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ

Điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ

Bây giờ ta phát biểu một điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ (CVVI).

Định lý 3.3.

Giả sử $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVVI) và các giả thiết của Mệnh đề 3.1 thỏa mãn. Giả sử $qriT(\overline{x})(K) \neq \emptyset$, $qriQ \neq \emptyset$ và $clcone[qri(coT(\overline{x})(K) + qriQ]$ không là không gian con tuyến tính của X. Khi đó, tồn tại $\overline{\lambda} \in Q^* \setminus \{0\}$, $\overline{\mu}_i \geq 0 \ \ (\forall i \in I(\overline{x})), \overline{\gamma}_j \in R \ (j \in L)$ sao cho

$$0 \in \overline{\lambda} \circ T(\overline{x}) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in J} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N(C; \overline{x}).$$

Chứng minh.

Bởi vì $T(\overline{x})$ là ánh xạ tuyến tính liên tục $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, cho nên $T(\overline{x})$ khả vi chặt và Lipschitz địa phương. Khi đó, $\partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) = \{T(\overline{x})\}$. Rõ ràng là với $F_{\overline{x}}(y) = T(\overline{x})(y - \overline{x})$, ta có $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$.

Do $qriT(\overline{x})(K) \neq \emptyset$, ta suy ra $qriT(\overline{x})(K - \overline{x}) \neq \emptyset$, tức là $qriF_{\overline{x}}(K) \neq \emptyset$. Theo giả thiết, $clcone[qri(coT(\overline{x})(K)) + qriQ]$ không là không gian con của $\mathbb{R}^p$, ta suy ra $clcone[qri(co(T(\overline{x})(K - \overline{x}) + qriQ]$ không là không gian con của $\mathbb{R}^p$. Điều đó có nghĩa là $clcone[qri(coF_{\overline{x}}(K)) + qriQ]$ không là không gian con của $\mathbb{R}^p$. Như vậy, tất cả các giả thiết của Định lý 3.1 thỏa mãn. Áp dụng Định lý 2.1, ta suy ra

$$\begin{aligned} 0 &\in \overline{\lambda} \circ \partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in J} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N(C; \overline{x}) \\ &= \lambda \circ T(\overline{x}) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in J} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N(C; \overline{x}) \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Một điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVVI) được phát biểu như sau:

Định lý 3.4.

Giả sử $\overline{x} \in K$; h khả vi Fréchet tại $\overline{x}$; tồn tại $\overline{\lambda} \in Q_0^*$, $\overline{\mu}_i \geqslant 0$ $(i \in I(\overline{x}))$, $\overline{\gamma}_j \in \mathbb{R}$ $(j \in L)$ sao cho

$$0 \in \overline{\lambda} \circ T(\overline{x}) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in L} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N(C; \overline{x}) \tag{4.1}$$

Giả sử C lồi, ánh xạ $\overline{\lambda} \circ T(\overline{x})$ là $\partial-$giả lồi tại $\overline{x}$ trên C, các ánh xạ g_i $(i \in I(\overline{x}))$ là ∂_D-tựa lồi tại $\overline{x}$ trên C, các ánh xạ $h_1, ..., h_l$ tựa tuyến tính tại $\overline{x}$ trên C. Khi đó, $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVVI).

Chứng minh.

Với $F_{\overline{x}} = T(\overline{x})(y - \overline{x})$, ta có $F_{\overline{x}}(.)$ Lipschitz địa phương tại $\overline{x}$, bởi vì $T(\overline{x})$ khả vi chặt. Đồng thời,

$$\partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) = \{T(\overline{x})\}.$$

Ánh xạ $\overline{\lambda} \circ T(\overline{x})$ là $\partial-$giả lồi tại $\overline{x}$ trên C, bởi vì nó tuyến tính. Do đó, ánh xạ $\overline{\lambda} \circ F_{\overline{x}}$ là $\partial-$giả lồi tại $\overline{x}$ trên C. Theo giả thiết, tồn tại $\overline{\lambda} \in Q_0^*$, $\overline{\mu}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\overline{x})), \overline{\gamma}_j \in \mathbb{R}$ $(j \in L)$ sao cho (4.1) đúng. Do đó (3.4) đúng. Như vậy tất cả các giả thiết của thỏa mãn. Áp dụng Định lý 3.2 ta suy ra $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVVI). $\square$

Điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu vectơ

Trong mục này ta sẽ trình bày các điều kiện cần và đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu vectơ (CVOP).

Định lý 3.5.

Giả sử $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVOP); f Lipschitz địa phương tại $\overline{x}$, và giả thiết của Mệnh đề 3.1 thỏa mãn. Giả sử $qrif(K) \neq \emptyset$, $qriQ \neq \emptyset$ và $clcone[qri(cof(K)) + qriQ]$ không là không gian con tuyến tính của $\mathbb{R}^p$. Khi đó, tồn tại $\overline{\lambda} \in Q^* \backslash \{0\}$, $\overline{\mu}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\overline{x})), \overline{\gamma}_j \in \mathbb{R}$ $(j \in L)$ sao cho

$$0 \in \overline{\lambda} \circ \partial_J f(\overline{x}) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in J} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N(C; \overline{x}). \tag{4.2}$$

Chứng minh.

Với $F_{\overline{x}}(x) = f(x) - f(\overline{x})$, ta có $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVEP) và $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$. Hơn nữa,

$$\partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) = \partial_J f(\overline{x}). \tag{4.3}$$

Nếu $qrif(K) \neq \emptyset$, ta suy ra $qrif(K) - f(\overline{x}) \neq \emptyset$, tức là $qriF_{\overline{x}}(K) \neq \emptyset$. Theo giả thiết, $clcone[qri(cof(K)) + qriQ]$ không là không gian con của $\mathbb{R}^p$ suy ra $clcone[qri(co(f(K) - f(\overline{x})) + qriQ]$ không là không gian con của $\mathbb{R}^p$. Điều đó có nghĩa là $clcone[qri(coF_{\overline{x}}(K)) + qriQ]$ không là không gian con của $\mathbb{R}^p$. Như vậy, tất cả các giả thiết của Định lý 3.1 đều thỏa mãn. Áp dụng Định lý 3.1 ta suy ra tồn tại $\overline{\lambda} \in Q^* \backslash \{0\}$, $\overline{\mu}_i \geq 0 \ \ (\forall i \in I(\overline{x})), \overline{\gamma}_j \in \mathbb{R}\ (j \in L)$ sao cho

$$\begin{aligned} 0 &\in \overline{\lambda} \circ \partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in J} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N(C; \overline{x}) \\ &= \lambda \circ \partial_J (f - f(\overline{x}))(\overline{x}) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in J} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N(C; \overline{x}) \end{aligned}$$

Từ (4.3) ta suy ra

$$0 \in \lambda \circ \partial_J f(\overline{x}) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in J} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N(C; \overline{x})$$

Định lý được chứng minh. □

Một điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu của (CVOP) có thể phát biểu như sau:

Định lý 3.6.

Giả sử $\overline{x} \in K$; f Lipschitz địa phương tại $\overline{x}$; h khả vi Fréchet tại $\overline{x}$. Khi đó, tồn tại $\overline{\lambda} \in Q_0^*$, $\overline{\mu}_i \geqslant 0\ (i \in I(\overline{x}))$, $\overline{\gamma}_j \in R\ (j \in L)$ sao cho

$$0 \in \overline{\lambda} \circ \partial_J f(\overline{x}) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \overline{\mu}_i \partial_D g_i(\overline{x}) + \sum_{j \in L} \overline{\gamma}_j \nabla h_j(\overline{x}) + N(C; \overline{x}). \tag{4.4}$$

Giả sử C lồi, ánh xạ $\overline{\lambda} \circ f$ là $\partial-$giả lồi tại $\overline{x}$ trên C, các ánh xạ $g_i\ (i \in I(\overline{x}))$ $\partial-$tựa lồi tại $\overline{x}$ trên C, các ánh xạ $h_1, ..., h_l$ tựa tuyến tính tại $\overline{x}$ trên C. Khi đó, $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVOP).

Chứng minh.

Với $F_{\overline{x}}(y) = f(y) - f(\overline{x})$ ta có $F_{\overline{x}}(.)$ Lipschitz địa phương tại $\overline{x}$, và $\partial_J F_{\overline{x}}(\overline{x}) = \partial_J f(\overline{x})$. Theo giả thiết, ánh $\overline{\lambda} \circ f$ là $\partial-$giả lồi tại $\overline{x}$ trên C, cho nên ánh xạ $\overline{\lambda} \circ F_{\overline{x}}(.)$ là $\partial-$giả lồi tại $\overline{x}$ trên C. Theo giả thiết, tồn tại $\overline{\lambda} \in Q_0^*$, $\overline{\mu}_i \geqslant 0$ $(\forall i \in I(\overline{x})), \overline{\gamma}_j \in \mathbb{R}$ $(j \in L)$ sao cho (4.4) đúng. Do đó (3.4) đúng. Như vậy tất cả các giả thiết của Định lý 3.2 thỏa mãn. Áp dụng Định lý 3.2 ta suy ra $\overline{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (CVOP). □

3.2. Điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ (VVIEC)

Từ các điều kiện cần và đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của (VEPEC) trong các phần trước, ta có thể dẫn các điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ (VVIEC) và bài toán tối ưu vectơ (VOPEC). Trước hết ta trình bày điều kiện cần Kuhn – Tucker cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán bất đẳng thức biến phân (VVIEC). Giả sử (B_1, B_2) là một phân hoạch của B, tức là $B = B_1 \cup B_2$ và $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Định lý 3.7. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VVIEC); $g_1, \ldots, g_m$, $h_1, \ldots, h_p$, $G_1, \ldots, G_r$, $H_1, \ldots, H_r$ Lipschitz địa phương tại $\overline{x}$; Điều kiện chính quy (VVIEC–CQ1) đúng. Khi đó, tồn tại $\bar{\rho} \in Q^* \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$, sao cho*

$$\begin{aligned} 0 \in T(\bar{x})^*\bar{\rho} + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x}) - \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) \\ - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Chứng minh. Đặt $F(\bar{x}, y) = T(\bar{x})(y - \bar{x})$. Khi đó, $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$. Bởi vì ánh xạ $T(\bar{x})(.)$ tuyến tính liên tục, cho nên nó khả vi chặt tại $\bar{x}$. Vì vậy, ánh xạ $F_{\bar{x}}(.)$ khả vi chặt tại $\bar{x}$ và

$$D_s F_{\bar{x}}(\bar{x}) = T(\bar{x}). \tag{3.12}$$

Áp dụng Định lý 2.4 cho bài toán (VVIEC), ta suy ra tồn tại $\bar{\rho} \in Q^* \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$,

$\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$, sao cho

$$0 \in [D_s F_{\bar{x}}(\bar{x})]^* \bar{\rho} + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$

$$- \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}).$$

Từ bao hàm thức này và (3.12) ta suy ra (3.11). □

Điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán bất đẳng thức biến phân (VVIEC) có thể phát biểu như sau:

Định lý 3.8. *Giả sử $\bar{x} \in K$; $g_1, \ldots, g_m$, $h_1, \ldots, h_p$, $G_1, \ldots, G_r$, $H_1, \ldots, H_r$ Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$; tồn tại $\bar{\rho} \in Q^* \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in A \cup B)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in D \cup B)$ sao cho*

$$0 \in T(\bar{x})^* \bar{\rho} + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$

$$- \sum_{k \in A \cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l \in D \cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C, \bar{x}).$$

Giả sử C là tập lồi, các ánh xạ g_i $(i \in I(\bar{x}))$ là $\partial-$tựa lồi tại $\bar{x}$ trên C, G_k $(k \in A \cup B), H_l (l \in D \cup B)$ là $\partial-$tựa lõm tại $\bar{x}$ trên C, h_j $(j = 1, \ldots, p)$ là $\partial-$tựa tuyến tính tại $\bar{x}$ trên C. Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của (VVIEC).

Chứng minh. Định lý 3.8 là hệ quả trực tiếp của Hệ quả 2.1. □

3.3. Điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu vectơ (VOPEC)

Sau đây, chúng tôi trình bày điều kiện cần Kuhn – Tucker cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu vectơ (VOPEC).

Định lý 3.9. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VOPEC); hàm f là hàm khả vi liên tục Fréchet tại $\bar{x}$ với đạo hàm Fréchet $\nabla f(\bar{x})$; các hàm $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_p, G_1, \ldots, G_r, H_1, \ldots, H_r$ Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$; Điều kiện chính quy (VOPEC–CQ1) đúng. Khi đó, tồn tại $\bar{\rho} \in Q^* \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$,*

$\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$, *sao cho*

$$0 \in \bar{\rho}\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i\in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$
$$- \sum_{k\in A\cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l\in D\cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C,\bar{x}). \tag{3.13}$$

Chứng minh. Với $F(x,y) = f(y) - f(x)$, ta có $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$ và f khả vi chặt tại $\overline{x}$, trong đó

$$D_s f(\overline{x}) = \nabla f(\overline{x}). \tag{3.14}$$

Áp dụng Định lý 2.5 cho bài toán (VOPEC), ta suy ra tồn tại $\bar{\rho} \in Q^* \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in B_2)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in B_1)$, sao cho

$$0 \in [D_s F_{\overline{x}}(\overline{x})]^* \bar{\rho} + \sum_{i\in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$
$$- \sum_{k\in A\cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l\in D\cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C,\bar{x}).$$

Từ bao hàm thức này và (3.14), ta suy ra điều phải chứng minh. □

Sau đây, chúng tôi trình bày một điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu vectơ (VOPEC).

Định lý 3.10. *Giả sử $\bar{x} \in K$; f là hàm khả vi liên tục Fréchet tại $\bar{x}$; các hàm $g_1, \ldots, g_m$, $h_1, \ldots, h_p$, $G_1, \ldots, G_r$, $H_1, \ldots, H_r$ Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$; tồn tại $\bar{\rho} \in Q^* \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ $(\forall i \in I(\bar{x}))$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\nu}_k \geq 0$ $(\forall k \in A \cup B)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^r$, $\bar{\chi}_l \geq 0$ $(\forall l \in D \cup B)$ sao cho*

$$0 \in \bar{\rho}\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i\in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \partial h_j(\bar{x})$$
$$- \sum_{k\in A\cup B} \bar{\nu}_k \partial G_k(\bar{x}) - \sum_{l\in D\cup B} \bar{\chi}_l \partial H_l(\bar{x}) + N(C,\bar{x}).$$

Giả sử C là tập lồi, các hàm $g_i\,(i \in I(\bar{x}))$ là $\partial-$tựa lồi tại $\bar{x}$ trên C, các hàm $G_k\,(k \in A \cup B)$, $H_l\,(l \in D \cup B)$ là $\partial-$tựa lõm tại $\bar{x}$ trên C, $h_j\,(j = 1, \ldots, p)$

là $\partial-$tựa tuyến tính tại $\bar{x}$ trên C. Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VOPEC).

Chứng minh. Định lý là hệ quả trực tiếp của Hệ quả 2.1. □

3.4. Điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc

Bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc (CVEP) được định nghĩa như sau: Cho song hàm $F : A \times A \to Y$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F(x_0, x_0) = 0$ với mọi $x_0 \in A$, và các hàm mục tiêu

$$g : A \to Z, \;\; h : A \to W.$$

Tập chấp nhận được của bài toán (CVEP) được ký hiệu bởi

$$S = \{x \in A : g(x) \in -K,\, h(x) = 0\}.$$

Với mỗi $\overline{x} \in X$ ta ký hiệu

$$F_{\overline{x}}(S) = F(\overline{x}, S) = \bigcup_{x \in S} F(\overline{x}, x).$$

Định nghĩa 3.1. Một vectơ $\overline{x} \in S$ được gọi là nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán (CVEP) nếu với mỗi lân cận V của 0, tồn tại một lân cận U của 0 thỏa mãn

$$\text{cone}(F(\overline{x}, S)) \cap (U - C) \subset V.$$

Định nghĩa 3.2. Một vectơ $\overline{x} \in S$ được gọi là nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán (CVEP) nếu tồn tại một lân cận lồi cân đối U của 0, $U \subset V_B$ thỏa mãn

$$\text{cone}(F(\overline{x}, S)) \cap (-\text{int}\,\text{cone}(U + B)) = \emptyset.$$

Mối quan hệ giữa nghiệm siêu hữu hiệu và nghiệm hữu hiệu Henig:

Mệnh đề 3.2. *Cho B là một cơ sở của nón C. Ta có*

(i) Nếu $\overline{x} \in S$ là nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán (CVEP) thì nó cũng là nghiệm hữu hiệu Henig.

(ii) Nếu B đóng và bị chặn, thì một nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán (CVEP) cũng là nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán đó. Ngoài ra, đẳng thức sau đúng $intC^* = C^\Delta(B)$.

Chú ý 3.1. Chúng tôi chỉ nghiên cứu điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig bài toán (CVEP) với ràng buộc tập và nón (xem $h = 0$). Đối với điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm siêu hữu hiệu chúng tôi xem như hệ quả trực tiếp.

Định lý 3.11. *Giả sử $\overline{x} \in S$, $F_{\overline{x}}(.) = F(\overline{x}, .) : A \to Y$ là hàm $C-$lồi trên A, g là hàm $K-$lồi trên A và tồn tại $x_1 \in S$ sao cho $Dg(\overline{x})(x_1 - \overline{x}) \in -intK$. Giả sử thêm rằng nón C có cơ sở B, K là nón lồi đóng và nhọn trong Y và các ánh xạ $F_{\overline{x}}(.)$ và g là khả vi theo hướng tại điểm $\overline{x}$. Khi đó, vectơ $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán (CVEP) khi và chỉ khi tồn tại các phiếm hàm tuyến tính liên tục $y^* \in C^\Delta(B)$ và $z^* \in K^*$ thỏa mãn*

$$\begin{cases} z^*(g(\overline{x})) = 0, \\ \min_{x\in A} \Big[y_0^* DF_{\overline{x}}(\overline{x}) + z_0^* Dg(\overline{x}) \Big](x - \overline{x}) = 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử vectơ $\overline{x} \in S$ là một nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán (CVEP). Khi đó, tồn tại một lân cận lồi cân đối U của gốc O trong Y với $U \subset V_B$ thỏa mãn

$$\operatorname{cone}(F_{\overline{x}}(S)) \cap (-\operatorname{int}\operatorname{cone}(U + B)) = \emptyset.$$

Điều này tương đương với

$$F_{\overline{x}}(S) \cap (-\operatorname{int}\operatorname{cone}(U + B)) = \emptyset.$$

Đặt $D = \operatorname{cl}\operatorname{cone}(U + B)$. Khi đó D là một nón lồi đóng và nhọn trong Y thỏa mãn $C \subset D$ do

$$C \setminus \{0\} \subset \operatorname{int}\operatorname{cone}(U + B) \subset D$$

và

$$F_{\overline{x}}(S) \cap (-intD) = \emptyset, \tag{*}$$

bởi vì $\operatorname{int}\operatorname{cone}(U+B) = \operatorname{int}\operatorname{cl}\operatorname{cone}(U+B)$. Từ Mệnh đề **??**, suy ra $DF_{\overline{x}}(\overline{x})(x-\overline{x})$ là $C-$ lồi trên A nên nó cũng là D-lồi trên A, và $g(\overline{x}) + Dg(\overline{x})(x - \overline{x})$ là

$K-$ lồi trên A. Ta thấy rằng hệ phụ thuộc sau

$$\begin{cases} DF_{\overline{x}}(\overline{x})(x-\overline{x}) \in -intD, \\ g(\overline{x}) + Dg(\overline{x})(x-\overline{x}) \in -intK \end{cases}$$

không có nghiệm trong A. Thật vậy, ta giả sử ngược lại tồn tại $\hat{x} \in A$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} DF_{\overline{x}}(\overline{x})(\hat{x}-\overline{x}) \in -intD, \\ g(\overline{x}) + Dg(\overline{x})(\hat{x}-\overline{x}) \in -intK. \end{cases} \tag{H1}$$

Hiển nhiên hệ (H1) tương đương với

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0^+} \frac{F_{\overline{x}}(\overline{x}+t(\hat{x}-\overline{x}))-F_{\overline{x}}(\overline{x})}{t} \in -intD, \\ g(\overline{x}) + \lim_{t\to 0^+} \frac{g(\overline{x}+t(\hat{x}-\overline{x}))-g(\overline{x})}{t} \in -intK. \end{cases} \tag{H2}$$

Vì int$D$ và int$K$ là các tập mở nên tồn tại $t_0 \in (0,1)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \frac{F_{\overline{x}}(\overline{x}+t_0(\hat{x}-\overline{x}))-F_{\overline{x}}(\overline{x})}{t_0} \in -intD, \\ g(\overline{x}) + \frac{g(\overline{x}+t_0(\hat{x}-\overline{x}))-g(\overline{x})}{t_0} \in -intK. \end{cases} \tag{H3}$$

Hệ (H3) trên kéo theo

$$g(\overline{x}+t_0(\hat{x}-\overline{x})) \in -intK. \tag{3.15}$$

Bởi vì A là một tập con lồi và $\overline{x}, \hat{x} \in A,\ t_0 \in (0,1)$, nên từ (3.15) suy ra

$$\overline{x}+t_0(\hat{x}-\overline{x}) \in S. \tag{3.16}$$

Mặt khác, $F_{\overline{x}}(\overline{x}) = 0$, $t_0\mathrm{int}C = \mathrm{int}C$, ta nhận được

$$F_{\overline{x}}(\overline{x}+t_0(\hat{x}-\overline{x})) \in -intD. \tag{3.17}$$

Kết hợp điều kiện (3.16)-(3.17), ta nhận được sự mâu thuẫn với (*). Điều này dẫn đến kết quả sau đúng:

$$DF_{\overline{x}}(A-\overline{x}) \times (g(\overline{x}) + Dg(\overline{x})(A-\overline{x}))\cap$$

$$(-\mathrm{int}D) \times (-\mathrm{int}K) = \emptyset.$$

Do đó,

$$(DF_{\overline{x}}(A-\overline{x}) + D) \times (g(\overline{x}) + Dg(\overline{x})(A-\overline{x}) + K)\cap$$

$$(-\mathrm{int}D) \times (-\mathrm{int}K) = \emptyset.$$

Áp dụng định lí tách các tập lồi, tồn tại $(y^*, z^*) \in Y^* \times Z^* \setminus \{(0,0)\}$ sao cho mọi $d \in D, k \in K$, $x \in A$:

$$\langle y^*, -d\rangle + \langle z^*, -k\rangle \leq \langle y^*, DF_{\overline{x}}(x-\overline{x})\rangle +$$

$$\langle z^*, g(\overline{x}) + Dg(\overline{x})(x-\overline{x}) + k\rangle \,.$$

Dễ dàng thấy rằng $y^* \in C^{\Delta}(B)$, $z^* \in K^*$ với $\langle z^*, g(\overline{x})\rangle = 0$ và

$$\langle y^*, DF_{\overline{x}}(\overline{x})(x-\overline{x})\rangle + \langle z^*, Dg(\overline{x})(x-\overline{x})\rangle \geq 0$$

$$\forall\, x \in A.$$

Một điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm siêu hữu hiệu của (CVEP) có thể được phát biểu như sau.

Định lý 3.12. *Giả sử $\overline{x} \in S$, $F_{\overline{x}}(.) = F(\overline{x}, \,.\,) : A \to Y$ là hàm $C-$lồi trên A, g là hàm $K-$lồi trên A và tồn tại $x_1 \in S$ sao cho $Dg(\overline{x})(x_1 - \overline{x}) \in -intK$. Giả sử thêm rằng nón C có cơ sở đóng và bị chặn B, K là nón lồi đóng và nhọn trong Y và các ánh xạ $F_{\overline{x}}(.)$ và g là khả vi theo hướng tại điểm $\overline{x}$. Khi đó, vectơ $\overline{x}$ là một nghiệm siêu hữu hiệu của bài toán (CVEP) khi và chỉ khi tồn tại các phiếm hàm tuyến tính liên tục $y^* \in intC^*$ và $z^* \in K^*$ thỏa mãn*

$$\begin{cases} z^*(g(\overline{x})) = 0, \\ \min_{x\in A} \Big[y_0^* DF_{\overline{x}}(\overline{x}) + z_0^* Dg(\overline{x})\Big](x-\overline{x}) = 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Áp dụng Mệnh đề 3.2 và Định lý 3.11 ta thu được kết quả cần chứng minh. $\square$

KẾT LUẬN

Đề tài đã trình bày một số vấn đề sau đây:

1. Các điều kiện cần Fritz John cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ không trơn có ràng buộc cân bằng (VEPEC) dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarke;
2. Các điều kiện cần Kuhn–Tucker cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC) dưới ngôn ngữ dưới vi phân Clarke với các điều kiện chính quy thích hợp;
3. Các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VEPEC) với các giả thiết về tính lồi suy rộng;
4. Áp dụng cho các bài toán bất đẳng thức biến phân vec tơ và bài toán tối ưu vectơ.

Điều kiện cần và đủ cho các loại nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ không trơn là đề tài có tính thời sự, đã và đang được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu.

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến đề tài

1. D. V. Luu and D. D. Hang (2015), "On efficiency conditions for nonsmooth vector equilibrium problems with equilibrium constraints", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **36**, pp. 1622–1642 (SCIE).

2. Đinh Diệu Hằng (2015), "Điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ qua phần trong tựa tương đối", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Thái Nguyên*, **144**(14), tr. 223–227.

3. Đinh Diệu Hằng, Trần Văn Sự (2018), "Về điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Thái Nguyên*, **181**(05), tr. 237–242.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Đỗ Văn Lưu và Phan Huy Khải (2000), *Giải tích lồi*, NXB Khoa học và Kĩ thuật, Hà Nội.

[2] Đỗ Văn Lưu (1999), *Giải tích Lipschitz*, NXB Khoa học và Kĩ thuật, Hà Nội.

Tiếng Anh

[3] Cammaroto F. and Di Bella B. (2005), "Separation theorem based on the quasirelative interior and application to duality theory", *J. Optim. Theory Appl.*, **125**, 223-229.

[4] Clarke F.H. (1983), *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley Interscienc, New York.

[5] Flegel M. L., Kanzow C. (2003), "A Fritz John approach to first order optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints", *Optimization*, **52**, pp. 277-286.

[6] Flegel M. L., Kanzow C. (2005), "On the Guignard constraints qualifications for mathematical program with equilibrium constraints", *Optimization*, **54**, pp. 517-534.

[7] Giannessi F., Mastroeni G., Pellegrini L. (2000), "On the theory of vector optimization and variational inequalities, image space analysis and separazation", in: *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria:*

Mathematical Theories, F. Giannessi (ed.), Kluwer, Dordrecht, pp.153 - 215.

[8] Gong X.H. (2012), "Optimality conditions for efficient solution to the vector equilibrium problems with constraints", *Taiwanese J. Math.*,**16**, pp. 1453 - 1473.

[9] Gong X.H.(2008), "Optimality conditions for vector equilibrium problems", *J. Math. Anal. Appl.*, **342**, pp. 1455 - 1466.

[10] Gong X.H.(2010), "Scalarization and optimality conditions for vector equilibrium problems", *Nonlinear Anal.*, **73**, pp. 3598 - 3612.

[11] Jiménez B. and Novo V. (2002), "A finite dimensional extension of Lyusternik theorem with applications to multiobjective optimization", *J. Math. Anal. Appl.*, **270**, pp. 340-356.

[12] Jourani A. (1994), "Constraint qualifications and Lagrange multipliers in nondifferentiable programming problems", *J. Optim. Theory Appl.*, **81**, pp. 533-548.

[13] Luo Z.-Q., Pang J.-S., Ralph D., and Wu S.-Q. (1996), " Exact penalization and stationary conditions of mathematical programs with equilibrium constraints", *Math. Programming*, **75**, pp. 19-76.

[14] Luo Z.-Q., Pang J.-S., Ralph D. (1996), *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge, UK, Cambridge University Press.

[15] Luu D. V. and Hang D. D. (2014), "On optimality conditions for vector variational inequalities", *J. Math. Anal. Appl.*, **412**, pp.792-804.

[16] Luu D. V. and Hang D. D. (2014), "Efficient solutions and optimality conditions for vector equilibrium problems", *Mathematical Methods of Operations Research*, **79**, pp. 163-177.

[17] Morgan J. and Romaniello M. (2006), "Scalarization and Kuhn–Tucker–like conditions for weak vector generalized quasivariational inequalities", *J. Optim. Theory Appl.*, **130**, pp. 309 - 316.

[18] Outrata J. V. (1999), "Optimality conditions for a class of mathematical programs with equilibrium constraints", *Math. Oper. Res.*, **24**, pp. 627-644.

[19] Outrata J. V. (2000), "A generalized mathematical program with equilibrium constraints", *SIAM J. Contr. Optim.*, **38**, pp. 1623-1638.

[20] Pang J.-S. and Fukushima M. (1999), "Complementarity with constraint qualifications and Bstationarity conditions for mathematical programs with equilibrium constraints", *Comput. Optim. Appl.*, **13**, pp. 111-136.

[21] Raciti F. (2008), "Equilibrium conditions and vector variational inequalities: a complex relation", *J. Glob. Optim.*, **40**, pp. 353-360.

[22] Reiland T.W. (1987), "A geometric approach to nonsmooth optimization with sample applications", *Nonlinear Anal.*, **11**, pp. 1169-1184.

[23] Rockafellar R.T. (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton.

[24] Scholtes S. and Stohr M. (1999), "Exact penalization of mathematical programs with equilibrium constraints", *SIAM J. Contr. Optim.*, **37**, pp. 617-652.

[25] Ward D.E. and Lee G.M. (2002), "On relations between vector optimization problems and variational inequalities", *J. Optim. Theory Appl.*, **113**, pp. 583 - 596.

[26] Yang X.Q. and Zheng X.Y. (2008), "Approximate solutions and optimality conditions of vector variational inequalities in Banach spaces", *J. Gobal. Optim.*, **40**, pp. 455 - 462.

[27] Ye J. J. (1999), "Optimality conditions for optimization problems with complementarity constraints", *SIAM J. Optim.*, **9**, pp. 374-387.

[28] Ye J. J. (2007), "Necessary and sufficient optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints", *J. Math. Anal. Appl.*, **307**, pp. 350-369.