BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT PHÂN BỐ GIÁ TRỊ TRONG NGHIÊN CỨU VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO HÀM PHÂN HÌNH VÀ ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

Mã số: B2017-TNA-41

Chủ nhiệm đề tài: PGS.TS Hà Trần Phương

Thái Nguyên, tháng 12/2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT PHÂN BỐ GIÁ TRỊ TRONG NGHIÊN CỨU VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO HÀM PHÂN HÌNH VÀ ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

Mã số: B2017-TNA-41

Xác nhận của tổ chức chủ trì **Chủ nhiệm đề tài**

PGS.TS Hà Trần Phương

Thái Nguyên, tháng 12/2018

DANH SÁCH THÀNH VIÊN NGHIÊN CỨU CỦA ĐỀ TÀI VÀ ĐƠN VỊ PHỐI HỢP

1. Danh sách thành viên tham gia đề tài

+ PGS. TS. Hà Trần Phương

+ TS. Trần Huệ Minh

+ TS. Lê Quang Ninh

+ TS Đoàn Quang Mạnh

+ TS. Nguyễn Hữu Quân

2. Cơ quan và cá nhân phối hợp: Viện Toán học - Viện KH&CN Việt Nam

a. Phòng Giải tích - Viện Toán học: GS. TSKH Nguyễn Xuân Tấn.

b. Phòng Lý thuyết số - Viện Toán học: PGS.TSKH Tạ Thị Hoài An

Mục lục

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung

- Tên đề tài: Ứng dụng của lý thuyết phân bố giá trị trong nghiên cứu vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình

- Mã số: B2017-TNA-41

- Chủ nhiệm đề tài: PGS. TS. Hà Trần Phương

- Tổ chức chủ trì: Trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên

- Thời gian thực hiện: 2 năm (từ 1/1/2017 - 31/12/2018)

2. Mục tiêu

Nghiên cứu một số dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên đĩa thủng trong trường hợp mục tiêu là các siêu mặt. Nghiên cứu sự xác định duy nhất một hàm phân hình hoặc đường cong thông qua ảnh ngược của một tập hữu hạn các điểm hoặc các siêu mặt trong các trường hợp phức và p-adic.

Góp phần thúc đẩy hướng nghiên cứu Lý thuyết Nevanlinna và ứng dụng tại Đại học Thái Nguyên và phục vụ công tác đạo tạo đại học, sau đại học tại ĐHTN.

3. Tính mới và sáng tạo

Chứng minh được một tiêu chuẩn chuẩn tắc cho một họ các hàm phân hình;

Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Bruck;

Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất liên quan đến đa thức vi phân của các hàm phân hình trên trường $p-$adic;

Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese.

4. Kết quả nghiên cứu

a. Tiêu chuẩn chuẩn tắc cho một họ các hàm phân hình:

Định lý 1. *Cho $\mathcal{F}$ là một hàm phân hình trên miền phẳng phức D. Cho a và b là hai số phức thỏa mãn $b \neq 0$, gọi $n \in \mathbb{N}$, $n_j, t_j, k \in \mathbb{N}^*$, $(j = 1, 2, \ldots, k)$ thỏa mãn*

$$n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 3, \tag{0.1}$$

và

$$f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \Leftrightarrow f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b \tag{0.2}$$

đối với $f \in \mathcal{F}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc. Ngoài ta, nếu $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình thì khẳng định đúng khi (1.18) được thay thế bởi một trong các điều kiện sau:

$$k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1; \tag{0.3}$$

$$n \geqslant 1 \ \textit{or}\ k \geqslant 2, n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2. \tag{0.4}$$

b. Vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Bruck

Định lý 2. *Cho $n \in \mathbb{N}$ và $k, n_i, t_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \ldots, k$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau:*

1) $k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1;$

2) $n \geqslant 1\ \textit{or}\ k \geqslant 2,\ n_j \geqslant t_j,\ n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2.$

Cho a và b là hai giá trị hữu hạn khác 0 và f là một hàm nguyên khác hằng. Nếu $f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \rightleftharpoons f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$ thì

$$\frac{f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\cdots+n_k} - a} = c,$$

trong đó c là một hằng số. Đặc biệt, nếu $a = b$ *thì* $f = c_1e^{tz}$*, trong đó* c_1 *và* t *là các hằng số khác 0 và* t *thỏa mãn điều kiện*

$$(tn_1)^{t_1} \dots (tn_k)^{t_k} = 1.$$

c. Vấn đề duy nhất liên quan đến đa thức vi phân

Định lý 3. *Cho* f*,* g *là các hàm nguyên siêu việt p-adic và* $k \geqslant 1$*,* $t \geqslant 1, n \geqslant 2k + 4 + t$ *là các số nguyên. Nếu*

$$(f^n(z)f(z + b_1) \dots f(z + b_t))^{(k)}$$

và

$$(g^n(z)g(z + b_1) \dots g(z + b_t))^{(k)}$$

chung nhau $1 - CM$*, trong đó* $b_1, \dots, b_t$ *là các hằng số khác 0 phân biệt. Khi đó* $f \equiv hg$*, trong đó* $h^{n+t} = 1$*.*

d. Vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình

Định lý 3. *Cho* f *và* g *là các đường cong chỉnh hình siêu việt không suy biến tuyến tính từ* Δ *vào* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$*. Cho* $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ *là một họ gồm* q $q \geqslant n_d + 1 + 2n_d^2/d$ *các siêu mặt bậc* d *ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *thỏa mãn* $f(z) = g(z)$ *với mọi* $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$*. Khi đó* $f \equiv g$*.*

5. Sản phẩm

a) 03 bài báo khoa học:

[1] N. V. Thin, H. T. Phuong and L. Vilaisavanh (2018), "A uniqueness problem for entire functions related to Brück's conjecture", Math. Slovaca 68, No. 4, pp. 823–836.

[2] H. T. Phuong and L.Q. Ninh (2018), "A Uniqueness theorem for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces", ThaiNguyen Journal of Science and Technology, 192 (16), pp. 29-35.

[3] H. T. Phuong, N. V. Thin (2018), "On Uniqueness of $p-$adic Meromorphic Function Concerning Differential Polynomials" ThaiNguyen Journal of Science and Technology, 181(05), pp. 231 - 236.

b) Hướng dẫn thành công 02 luận văn thạc sĩ:

Tô Thị Thiếm (2108), *Vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình với điều kiện của đa thức đạo hàm*, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

Nguyễn Quốc Cường (2018) *Vấn đề duy nhất của hàm phân hình phức và p−adic khi đạo hàm của đa thức chung nhau một hàm nhỏ*, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

c) Tham gia đào tạo 1 NCS :

Leuanglith Vilaisavanh (đang thực hiện), *Lý thuyết Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình trên Annuli và vấn đề duy nhất*, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu

a) Phương thức chuyển giao: đề tài là các kết quả nghiên cứu cơ bản được chuyển giao trực tiếp cho Đại học Thái Nguyên làm tài liệu nghiên cứu và học tập cho học viên.

b) Địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu: Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và các khoa Toán của các trường đại học trong cả nước.

c) Lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu: làm phong phú thêm lý thuyết Nevanlinna và đóng góp vào đào tạo sau đại học của Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

- Project title: Application of the distribution theory in research uniqueness problem for meromorphic functions and holomorphic curves

- Code number: B2017-TNA-41

- Coordinator: Ass. Prof. Dr. Ha Tran Phuong

- Implementing institution: ThaiNguyen University

- Duration: from 1/1/2017 to 31/12/2018.

2. Objectives Research some type of second main theorem with truncated functions for holomorphic curves on annuli with hypersurfaces. Research uniqueness problem for for meromorphic functions and holomorphic curves by reverse image of finite set of points or hypersurfaces in complex or p−adic cases.

To develop of the Nevalinna theory and it's applications and sever to graduate program in training of the undergraduate and graduate students in Thai Nguyen University.

3. Creativeness and innovativeness:

Proved the new normal criterion for a collection of meromorphic functions.

Proved a new result of unicity of meromorphic function related to Bruck's conjecture.

3. Creativeness and innovativeness:

Proved the normal criterion for a collection of meromorphic functions.

Proved a result of unicity of meromorphic function related to Bruck's conjecture.

Proved a result of unicity of $p-$adic meromorphic function concerning differential polynomials.

Proved a result of unicity of holomorphic curves on annulus in the case hypersurfaces in general position for Veronese embedding.

4. Research results

a) Normal criterion for a collection of meromorphic functions

Theorem 1.*Let $n \in \mathbb{N}$ and $k, n_i, t_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \ldots, k$ satisfy one of the following conditions:*

$$1)\ k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1;$$

$$2)\ n \geqslant 1\ \text{or}\ k \geqslant 2,\ n_j \geqslant t_j,\ n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2.$$

Let a and b be two finite nonzero values and f be a nonconstant entire function. If $f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \rightleftharpoons f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$, then

$$\frac{f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\cdots+n_k} - a} = c,$$

where c is a nonzero constant. Specially, if $a = b$ then $f = c_1 e^{tz}$, where c_1 and t are nonzero constants and t is satisfied by $(tn_1)^{t_1} \ldots (tn_k)^{t_k} = 1$.

b) Unicity of $p-$adic meromorphic function concerning differential polynomials

Theorem 2.*Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a complex domain D. Let a and b be two complex numbers such that $b \neq 0$, let $n \in \mathbb{N}$, $n_j, t_j, k \in \mathbb{N}^*$, $(j = 1, 2, \ldots, k)$ satisfy*

$$n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 3, \tag{0.5}$$

and

$$f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \Leftrightarrow f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b \tag{0.6}$$

for all $f \in \mathcal{F}$. Then $\mathcal{F}$ is a normal family. Furthermore, if $\mathcal{F}$ is a family of holomorphic functions, then the statement holds when (1.18) *is replaced by one of the following conditions:*

$$k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1; \tag{0.7}$$

$$n \geqslant 1 \text{ or } k \geqslant 2, n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2. \tag{0.8}$$

c) Unicity of $p-$adic meromorphic function concerning differential polynomials

Theorem 3. *Let f, g be p-adic transcendental entire functions and $k \geqslant 1$, $t \geqslant 1, n \geqslant 2k + 4 + t$ are integers. If $(f^n(z)f(z+b_1)\dots f(z+b_t))^{(k)}$ and $(g^n(z)g(z+b_1)\dots g(z+b_t))^{(k)}$ share $1-CM$, where $b_1, \dots, b_t$ are nonzero distinct constants. Then $f \equiv hg$, where $h^{n+t} = 1$.*

d) Unicity of holomorphic curves on annulus:

Theorem 4. *Let f and g be transcendental algebraically non-degenerate holomorphic curves from Δ into $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Let $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ be a collection of $q \geqslant n_d + 1 + 2n_d^2/d$ hypersurfaces of degree d in general position for Veronese embedding in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ such that $f(z) = g(z)$ for all $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Then $f \equiv g$.*

5. Products

a) 03 science papers:

[1] N. V. Thin, H. T. Phuong and L. Vilaisavanh (2018), "A uniqueness problem for entire functions related to Brück's conjecture", Math. Slovaca 68, No. 4, pp. 823–836.

[2] H. T. Phuong and L.Q. Ninh (2018), "A Uniqueness theorem for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces", ThaiNguyen Journal of Science and Technology, 192 (16), pp. 29-35.

[3] H. T. Phuong, N. V. Thin (2018), "On Uniqueness of $p-$adic Meromorphic Function Concerning Differential Polynomials" ThaiNguyen Journal of Science and Technology, 181(05), pp. 231 - 236.

b) Guiding successfully 02 master projects:

1. To Thi Thiem (2018), *Uniqueness for meromorphic functions with a conditions of differential polynomial*, Thai Nguyen University of Education, Thai Nguyen University.

2. Nguyen Quoc Cuong (2018), *Uniqueness for complex and* $p-$*adic meromorphic functions when differential of its polynomials sharing a small functions*, Thai Nguyen University of Education, Thai Nguyen University.

c) Guiding 01 Ph.D projects:

Leuanglith Vilaisavanh (đang thực hiện), *Nevanlinna theory for holomorphic curves on annuli and uniqueness problem,* Thai Nguyen University of Education, Thai Nguyen University.

6. Transfer alternatives, application institutions, impacts and benefits of research results:

a) Transfer alternatives: all of results in the projects are theoretical research and it is directly transfered to ThaiNguyen University to use for research and training.

b) Application institutions: mathematic falcuty in Thai Nguyen University and mathematic falcuties in other universities.

c) Impacts and benefits of research results: development the Nevanlinna theory and contributing to graduate training in Thai Nguyen University.

Mở đầu

Lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna hay Nevanlinna-Cartan được đánh giá là một trong những thành tựu đẹp đẽ của giải tích phức trong thời gian gần đây. Được khởi nguồn từ những năm đầu của thế kỷ 20 bằng những công trình của R. Nevanlinna, H. Cartan, Lý thuyết đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước, thu được nhiều kết quả quan trọng và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học: lý thuyết tập duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình, lý thuyết hệ động lực, phương trình vi phân phức,. . . .

Kí hiệu $\mathbb{K}$ là một trường đóng đại số, có đặc số không, đầy đủ (với chuẩn Acsimet hoặc không Acsimet). Mục đích chính của lý thuyết là nghiên cứu tính chất của hàm phân hình hay đường cong chỉnh hình từ một miền của $\mathbb{K}$ vào $\mathbb{K}$ hoặc một đa tạp đại số xạ ảnh trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ thông qua việc nghiên cứu ba hàm: hàm đếm, hàm xấp xỉ và hàm đặc trưng. Trung tâm của lý thuyết bao gồm hai định lý cơ bản: định lý cơ bản thứ nhất và định lý cơ bản thứ hai, trong đó định lý cơ bản thứ hai được viết dưới nhiều dạng khác nhau và có nhiều ứng dụng quan trọng. Những công trình theo hướng này được công bố bởi nhiều tác giả trong nước.

Một trong những ứng dụng quan trọng của lý thuyết phân bố giá trị là nghiên cứu vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình: Công trình đầu tiên thuộc về Nevanlinna công bố năm 1925, chúng ta biết đến nó với tên "Định lý năm điểm" rất nổi tiếng, định lý cho một điều kiện đại số để hai hàm phân hình bằng nhau.

Năm 1975, Fujimoto mở rộng kết của Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình. Về sau việc phát triển vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình và đường cong chỉnh hình thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trên thế giới, chẳng hạn H. Fujimoto, M. Ru, M. Dulock, G. Dethloft, T. J. Wang, A. Banerjee, H. H. Khoái, D. D. Thái, T. T. H. An, T. V. Tấn, V. H. An, H. T. Phương, N. V. Thìn và nhiều tác giả khác.

Trong đề tài này chúng tôi, bằng các kết quả trong lý thuyết phân bố giá trị, chúng tôi nghiên cứu các dạng định lí duy nhất cho các hàm phân hình, đa thức vi phân và đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.

Thái Nguyên, tháng 12 năm 2018

Nhóm nghiên cứu

Chương 1

Vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình

1.1. Vấn đề duy nhất liên quan đến giả thuyết Brück

1.1.1. Một số kết quả bổ trợ

Cho D là một miền trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên D. Họ $\mathcal{F}$ được gọi là họ chuẩn tắc trên D, theo nghĩa Montel, nếu với mỗi dãy $\{f_v\} \subset \mathcal{F}$, tồn tại một dãy con $\{f_{v_i}\}$ sao cho $\{f_{v_i}\}$ hội tụ cầu đều địa phương trên D, tới một hàm phân hình hoặc ∞.

Cho f và g là hai hàm phân hình. Gọi a và b là hai số phức phân biệt. Nếu $g - b = 0$ mỗi khi $f - a = 0$ thì ta viết $f = a \Rightarrow g = b$. Nếu $f = a \Rightarrow g = b$ và $g = b \Rightarrow f = a$ thì ta viết $f = a \Leftrightarrow g = b$. Nếu $f - a$ và $g - b$ có chung không điểm và cực điểm kể cả bội thì ta kí hiệu $f - a \rightleftharpoons g - b$.

Cho f là một hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, ta nhắc lại *siêu bậc* của f được định nghĩa bởi

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log T(r, f)}{\log r}.$$

Mệnh đề 1.1 ([14]). *(Bổ đề Zalcman) Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên đĩa mở $\triangle = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Khi đó nếu $\mathcal{F}$ không chuẩn tắc tại một điểm $z_0 \in \triangle$, thì với mỗi số thực α thỏa mãn $-1 < \alpha < 1$, tồn tại*

1) *một số thực r, $0 < r < 1$ và một điểm z_n, $|z_n| < r$, $z_n \to z_0$,*
2) *các số dương $\rho_n, \rho_n \to 0^+$,*
3) *các hàm f_n, $f_n \in \mathcal{F}$ thỏa mãn*

$$g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^{\alpha}} \to g(\xi)$$

cầu đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$, trong đó $g(\xi)$ là một hàm phân hình khác hằng và $g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0) = 1$. Hơn nữa, bậc của g không lớn hơn 2. Trong đó, $g^{\#}(z) = \frac{|g'(z)|}{1+|g(z)|^2}$ là đạo hàm cầu.

Mệnh đề 1.2 ([3]). *Cho g là một hàm nguyên và M là một hằng số dương. Nếu $g^{\#}(\xi) \leqslant M$ đối với mọi $\xi \in \mathbb{C}$, thì g có bậc cao nhất là 1.*

Chú ý. Trong Mệnh đề 1.1, nếu $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình, thì g là một hàm chỉnh hình dựa trên định lý Hurwitz. Do đó, bậc của g không lớn hơn 1 theo Mệnh đề 1.2.

Ta xem xét một hàm phân hình khác hằng g trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và p đạo hàm đầu tiên của nó. Một đa thức vi phân P của g được định nghĩa bởi

$$P(z) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(z) \prod_{j=0}^{p} (g^{(j)}(z))^{S_{ij}},$$

trong đó $S_{ij},\ 0 \leqslant i, j \leqslant n$, là các số nguyên không âm và $\alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ là các hàm phân hình nhỏ đối với g. Đặt

$$d(P) := \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=0}^{p} S_{ij} \quad \text{và} \quad \theta(P) := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=0}^{p} j S_{ij}.$$

Năm 2002, J. Hinchliffe [10] tổng quát các định lý của Hayman [9] và Chuang [2] và thu được các kết quả sau.

Mệnh đề 1.3 ([10])**.** *Cho g là một hàm phân hình siêu việt và a là một hằng số phức, gọi P là một đa thức vi phân khác hằng của g với $d(P) \geqslant 2$. Khi đó*

$$\begin{aligned} T(r,g) \leqslant & \frac{\theta(P)+1}{d(P)-1}\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + \frac{1}{d(P)-1}\overline{N}(r,\frac{1}{P-a}) \\ & + o(T(r,g)), \end{aligned}$$

đối với mọi $r \in [1,+\infty)$ nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgues hữu hạn. Khi f là một hàm nguyên siêu việt, bất đẳng trên trở thành

$$T(r,g) \leqslant \frac{\theta(P)+1}{d(P)}\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + \frac{1}{d(P)}\overline{N}(r,\frac{1}{P-a}) + o(T(r,g)),$$

đối với mọi $r \in [1,+\infty)$ nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgues hữu hạn.

Mệnh đề 1.4. *Cho f là một hàm phân hình siêu việt và a là một hằng số phức. Gọi $n \in \mathbb{N}$, $k, n_j, t_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, \dots, k$ thỏa mãn*

$$n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 3.$$

Phương trình

$$f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có vô số nghiệm. Hơn nữa, nếu f là một hàm nguyên siêu việt, khẳng định đúng khi $n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2$.

Chứng minh. Đặt

$$P(f) = f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)}.$$

Dễ thấy $d(P) = n + \sum_{j=1}^{k} n_j$ và $\theta(P) = \sum_{j=1}^{k} t_j$. Sử dụng Mệnh đề 1.3 với f và $P(f)$, ta có

$$\begin{aligned} T(r,f) \leqslant & \frac{\sum_{j=1}^{k} t_j + 1}{n + \sum_{j=1}^{k} n_j - 1}\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \frac{1}{n + \sum_{j=1}^{k} n_j - 1}\overline{N}(r,\frac{1}{P-a}) \\ & + o(T(r,f)). \end{aligned}$$

Vì $n+\sum_{j=1}^k n_j \geqslant \sum_{j=1}^k t_j+3$, ta thu được phương trình

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)}=a$$

có vô số nghiệm. Hơn nữa, nếu f là một hàm nguyên siêu việt, ta có

$$\begin{aligned}T(r,f)\leqslant&\frac{\sum_{j=1}^k t_j+1}{n+\sum_{j=1}^k n_j}\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\frac{1}{n+\sum_{j=1}^k n_j}\overline{N}(r,\frac{1}{P-a})\\&+o(T(r,f)).\end{aligned}$$

Do đó điều kiện $n+\sum_{j=1}^k n_j \geqslant \sum_{j=1}^k t_j+2$ kéo theo

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)}=a$$

có vô số nghiệm. $\square$

Mệnh đề 1.5. *Cho f là một hàm hữu tỷ khác hằng và a là một hằng số phức. Cho $n\in\mathbb{N}$, $k,n_j,t_j\in\mathbb{N}^*$, $j=1,\dots,k$ thỏa mãn*

$$n_j\geqslant t_j, n+\sum_{j=1}^k n_j\geqslant\sum_{j=1}^k t_j+2, j=1,\dots,k.$$

Phương trình

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)}=a$$

có ít nhất hai không điểm phân biệt.

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp sau:
Trường hợp 1. f là một đa thức. Khi đó ta thấy rằng

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)}$$

là một đa thức. Giả sử rằng

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)}-a$$

có một không điểm duy nhất là z_0, kéo theo

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)}-a=A(z-z_0)^l,\ l\geqslant 2,$$

trong đó A là một hằng số khác không. Khi đó

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)})' = Al(z-z_0)^{l-1}.$$

Điều này kéo theo z_0 là không điểm duy nhất của

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)})'.$$

Ta biết rằng mỗi không điểm của f đều là một không điểm của

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)}$$

với bội ít nhất 2 và khi đó nó là một không điểm của

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)})'.$$

Điều này kéo theo z_0 là không điểm duy nhất của f. Ta thấy rằng

$$0 = f^n(z_0)(f^{n_1})^{(t_1)}(z_0)\dots(f^{n_k})^{(t_k)}(z_0) = a \neq 0.$$

Đó là mâu thuẫn. Kéo theo

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có ít nhất hai không điểm phân biệt.

Trường hợp 2. f là một hàm hữu tỷ và không phải là đa thức. Ta xem xét các trường hợp có thể xảy ra

Trường hợp 2.1. f có không điểm. Khi đó f có thể biểu diễn được dưới dạng

$$f = A\frac{\prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i)^{m_i}}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_l)^{d_l}}, \tag{1.1}$$

với $m_i \geqslant 1, d_l \geqslant 1, i = 1,\dots,s, l = 1,\dots,t$. Đặt

$$M = m_1 + \dots + m_s \geqslant s,\ N = d_1 + \dots + d_t \geqslant t.$$

Ta có

$$f^{n_j} = A^{n_j}\frac{\prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i)^{n_j m_i}}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_l)^{n_j d_l}}, j = 1,\dots,k. \tag{1.2}$$

Như vậy

$$(f^{n_j})^{(t_j)} = A^{n_j} \frac{\prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i)^{n_j m_i - t_j}}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_l)^{n_j d_l + t_j}} g_j(z), \tag{1.3}$$

trong đó g_j là một đa thức với

$$\deg g_j(z) \leqslant t_j(s+t-1),\ j = 1, \ldots, k.$$

Kết hợp (1.1), (1.2) và (1.3), ta có

$$\begin{aligned} f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} &= \frac{\prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i)^{(n+\sum_{j=1}^{k} n_j)m_i - \sum_{j=1}^{k} t_j}}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_l)^{(n+\sum_{j=1}^{k} n_j)d_l + \sum_{j=1}^{k} t_j}} g(z) \\ &= \frac{P(z)}{Q(z)}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

trong đó

$$g(z) = A^{n+\sum_{j=1}^{k} n_j} \prod_{v=1}^{k} g_v(z)$$

với

$$\deg g(z) \leqslant (\sum_{j=1}^{k} t_j)(s+t-1).$$

Ta giả sử rằng

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có một không điểm duy nhất z_0. Khi đó $z_0 \neq \alpha_i,\ i = 1, \ldots, s$. Thực vậy, nếu $z_0 = \alpha_i$ với mỗi $i \in \{1, \ldots, s\}$. Suy ra

$$0 = f^n(z_0)(f^{n_1})^{(t_1)}(z_0) \ldots (f^{n_k})^{(t_k)}(z_0) = a \neq 0.$$

Đây là điều mâu thuẫn. Ta có

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = a + \frac{B(z-z_0)^l}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_l)^{(n+\sum_{j=1}^{k} n_j)d_l + \sum_{j=1}^{k} t_j}}, \tag{1.5}$$

trong đó B là một hằng số khác 0. Điều đó kéo theo

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)})' = \frac{(z-z_0)^{l-1} G_1(z)}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_l)^{(n+\sum_{j=1}^{k} n_j)d_l + \sum_{j=1}^{k} t_j + 1}}, \tag{1.6}$$

trong đó

$$G_1(z) = B(l - (n + \sum_{j=1}^{k} n_j)N - (\sum_{j=1}^{k} t_j)t)z^t + b_1 z^{t-1} + \cdots + b_t.$$

Từ (1.4), ta thấy

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)})' = \frac{\prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i)^{(n+\sum_{j=1}^{k} n_j)m_i + \sum_{j=1}^{k} t_j - 1} G_2(z)}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_1)^{(n+\sum_{j=1}^{k} n_j)d_l + \sum_{j=1}^{k} t_v + 1}}. \tag{1.7}$$

Dễ kiểm tra được

$$s + t - 1 \leqslant \deg G_2(z) \leqslant (\sum_{j=1}^{k} t_j + 1)(s + t - 1).$$

Ta chia thành các trường hợp con sau

Trường hợp con 2.1.1. $l \neq (n + \sum_{j=1}^{k} n_j)N + (\sum_{j=1}^{k} t_j)t$, khi đó $\deg P(z) \geqslant \deg Q(z)$. Từ (1.4), ta có

$$\sum_{i=1}^{s}\left((n + \sum_{j=1}^{k} n_j)m_i - \sum_{j=1}^{k} t_j\right) + \deg g \geqslant \sum_{j=1}^{t}\left((n + \sum_{j=1}^{k} n_j)d_j + \sum_{j=1}^{k} t_j\right).$$

Ta chú ý rằng

$$\deg g(z) \leqslant (\sum_{j=1}^{k} t_j)(s + t - 1).$$

Điều này kéo theo

$$M \geqslant N + \frac{\sum_{j=1}^{k} t_j}{n + \sum_{j=1}^{k} n_j},$$

thì $M > N$. Vì $z_0 \neq \alpha_i$ với mọi $i = 1, \dots, s$, ta thu được

$$\sum_{i=1}^{s}\left((n + \sum_{j=1}^{k} n_j)m_i - \sum_{j=1}^{k} t_j - 1\right) \leqslant \deg G_1 = t.$$

Kéo theo

$$(n + \sum_{j=1}^{k} n_j)M \leqslant (1 + \sum_{j=1}^{k} t_j)s + t < (\sum_{j=1}^{k} t_j + 2)M. \tag{1.8}$$

Ta chú ý rằng $n+\sum\limits_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{k} t_j+2$, như vậy (1.8) cho ta mâu thuẫn.

Trường hợp con thứ 2.1.2. $l=(n+\sum\limits_{j=1}^{k} n_j)N+(\sum\limits_{j=1}^{k} t_j)t$.

Nếu $M > N$, lập luận giống như trường hợp thứ nhất ta cũng có mâu thuẫn.

Nếu $M \leqslant N$. Vì

$$l-1 \leqslant \deg G_2 \leqslant (\sum_{j=1}^{k} t_j+1)(s+t-1),$$

thì

$$\begin{aligned}(n+\sum_{j=1}^{k} t_j)N = l-(\sum_{j=1}^{k} t_j)t &\leqslant \deg G_2+1-(\sum_{j=1}^{k} t_j)t \\ &< (1+\sum_{j=1}^{k} t_j)s+t \leqslant (\sum_{j=1}^{k} t_j+2)N. \qquad (1.9)\end{aligned}$$

Từ điều kiện $n+\sum\limits_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{k} t_j+2$ và (1.9), ta có mâu thuẫn.

Trường hợp 2.2. f không có không điểm. Khi đó f được biểu diễn dưới dạng

$$f=\frac{A}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_l)^{d_l}},\ d_l \geqslant 1,\ l=1,\dots,t. \qquad (1.10)$$

Như thế, (1.3) trở thành

$$(f^{n_j})^{(t_j)}=\frac{A^{n_j}}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_l)^{n_jd_l+t_j}}g_j(z), \qquad (1.11)$$

trong đó g_j là một đa thức với $\deg g_j(z) \leqslant t_j(t-1)$, $j=1,\dots,k$. Ta có

$$\begin{aligned}f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)} &= \frac{g(z)}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_l)^{(n+\sum_{j=1}^{k} n_j)d_l+\sum_{j=1}^{k} t_j}} \qquad (1.12)\\ &= \frac{g(z)}{Q(z)},\end{aligned}$$

trong đó $g(z) = A^{n+\sum_{j=1}^k n_j} \prod\limits_{v=1}^{k} g_v(z)$ với $\deg g(z) \leqslant (\sum\limits_{j=1}^{k} t_j)(t-1)$. Ta thấy rằng

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} - a = \frac{g(z) - aQ(z)}{Q(z)}. \tag{1.13}$$

Vì $N = d_1 + \cdots + d_t \geqslant t$, kéo theo

$$\deg Q \geqslant (n + \sum_{j=1}^{k} n_j + \sum_{j=1}^{k} t_j)t > \deg g,$$

như vậy phương trình (1.13) có ít nhất một nghiệm. Ta giả sử rằng

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có một không điểm duy nhất z_0. Ta có

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a + \frac{B(z-z_0)^l}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_l)^{(n+\sum\limits_{j=1}^{k} n_j)d_l + \sum\limits_{j=1}^{k} t_j}}, \tag{1.14}$$

trong đó B là một hằng số khác không. Điều này kéo theo

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)})' = \frac{(z-z_0)^{l-1}G_1(z)}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_l)^{(n+\sum_{j=1}^{k} n_j)d_l + \sum_{j=1}^{k} t_j + 1}}, \tag{1.15}$$

trong đó

$$G_1(z) = B(l - (n + \sum_{j=1}^{k} n_j)N - (\sum_{j=1}^{k} t_j)t)z^t + b_1 z^{t-1} + \cdots + b_t.$$

Từ (1.12), ta có

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)})' = \frac{G_2(z)}{\prod_{l=1}^{t}(z-\beta_1)^{(n+\sum_{j=1}^{k} n_j)d_l + \sum_{j=1}^{k} t_j + 1}}. \tag{1.16}$$

Dễ dàng kiểm tra được

$$t - 1 \leqslant \deg G_2(z) \leqslant (\sum_{j=1}^{k} t_j + 1)(t-1).$$

Ta xem xét hai trường hợp nhỏ

Trường hợp nhỏ 2.2.1. $l \neq (n + \sum\limits_{j=1}^{k} n_j)N + (\sum\limits_{j=1}^{k} t_j)t$, kéo theo $\deg g(z) \geqslant \deg Q(z)$. Từ (1.12), ta có

$$\deg g \geqslant \sum_{j=1}^{t}((n + \sum_{j=1}^{k} n_j)d_j + \sum_{j=1}^{k} t_j) = (n + \sum_{j=1}^{k} n_j)N + (\sum_{j=1}^{k} t_j)t.$$

Chú ý rằng $\deg g(z) \leqslant (\sum_{j=1}^{k} t_j)(t-1)$. Đó là điều mâu thuẫn.

Trường hợp nhỏ 2.2.2. $l = (n + \sum\limits_{j=1}^{k} n_j)N + (\sum\limits_{j=1}^{k} t_j)t$. Từ

$$l - 1 \leqslant \deg G_2 \leqslant (\sum_{j=1}^{k} t_j + 1)(t-1),$$

ta có

$$\begin{aligned}(n + \sum_{j=1}^{k} n_j)N = l - (\sum_{j=1}^{k} t_j)t &\leqslant \deg G_2 + 1 - (\sum_{j=1}^{k} t_j)t \\ &= t - \sum_{j=1}^{k} t_j.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Từ $n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2$ và $t \leqslant N$, ta có

$$(\sum_{j=1}^{k} t_j + 2)N + \sum_{j=1}^{k} t_j \leqslant N.$$

Đây là điều mâu thuẫn. Như vậy ta thu được

$$f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có ít nhất hai không điểm phân biệt. Định lý được chứng minh trong các trường hợp. $\square$

Ta nhắc lại bậc $\sigma(f)$ của hàm phân hình f định nghĩa bởi

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Hơn nữa, khi f là một hàm nguyên ta có

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log(M(r,f))}{\log r}.$$

Cho f là một hàm nguyên. Ta biết rằng f có thể biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Ta kí hiệu

$$\mu(r,f) = \max_{n\in\mathbb{N}, |z|=r} \{|a_n z^n|\},\ \nu(r,f) = \sup\{n : |a_n| r^n = \mu(r,f)\},$$

$$M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Mệnh đề 1.6 ([12]). *Nếu f là một hàm nguyên với bậc $\sigma(f)$, khi đó*

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \nu(r,f)}{\log r}.$$

Mệnh đề 1.7 ([12]). *Cho f là một hàm nguyên siêu việt, gọi $0 < \delta < \dfrac{1}{4}$ và số phức z sao cho $|z| = r$ và*

$$|f(z)| > M(r,f)\nu(r,f)^{-\frac{1}{4}+\delta}.$$

Khi đó tồn tại một tập $F \subset \mathbb{R}_+$ có độ đo loga hữu hạn, tức là $\int\limits_F \frac{dt}{t} < +\infty$, sao cho

$$\frac{f^{(m)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu(r,f)}{z}\right)^m (1 + o(1))$$

đúng với mọi $m \geqslant 1$ và $r \notin F$.

Lấy $E_0(z) = 1 - z$, $E_m(z) = (1-z)e^{z+z^2/2+\cdots+z^m/m}, m \in \mathbb{Z}^+$, thì ta có kết quả sau được gọi là định lý biểu diễn Weierstrass.

Mệnh đề 1.8 ([12])**.** *Cho f là một hàm nguyên, với bội không điểm là $m \geqslant 0$ tại $z = 0$. Ta gọi các không điểm khác của f là $a_1, a_2, \ldots,$ mỗi không điểm được lặp lại số lần bằng bội của nó. Khi đó f có biểu diễn*

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}(\frac{z}{a_n}),$$

với g là một hàm nguyên và m_n là các số tự nhiên. Nếu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ có một số mũ hữu hạn hội tụ về λ, thì m_n có thể lấy dạng $k = [\lambda] > \lambda - 1$. Hơn nữa, nếu f có bậc hữu hạn ρ, thì g là một đa thức với bậc lớn nhất là ρ.

1.1.2. Vấn đề duy nhất

Trong phần này chúng tôi sẽ chứng minh một tiêu chuẩn chuẩn tắc cho các hàm phân hình. Dựa vào tiêu chuẩn này chúng tôi sẽ chứng minh một dạng định lý duy nhất cho các hàm nguyên liên quan đến giả thuyết Brück. Các kỹ thuật chứng minh sử dụng trong phần này được kết hợp kỹ thuật của lý thuyết họ chuẩn tắc và lý thuyết Nevanlinna. Trước hết chúng tôi giới thiệu một giả thuyết được đưa ra bởi R. Brück trong [1], thường được gọi là Giả thuyết Brück.

Giả thuyết. *Cho f là một hàm nguyên khác hằng sao cho siêu bậc $\sigma_2(f)$ của f không là một số nguyên dương và $\sigma_2(f) < \infty$. Nếu f và f' chung nhau giá trị hữu hạn a kể cả bội thì*

$$\frac{f' - a}{f - a} = c,$$

trong đó c là một hằng số khác 0.

Brück đã chứng minh giải thuyết trên trong trường hợp $a = 0$ trong [1]. Từ phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{f' - a}{f - a} = e^{z^n}, \quad \frac{f' - a}{f - a} = e^{e^{z^n}},$$

ta thấy rằng giả thuyết đó không đúng nếu $\sigma_2(f)$ là một số nguyên dương hoặc vô hạn. Trong trường hợp f là một hàm có bậc hữu hạn, Giả thuyết trên đã được Gundersen và Yang chứng minh trong [8]. Trong trường hợp f là một hàm có bậc vô hạn với $\sigma_2(f) < \dfrac{1}{2}$, Giả thuyết được chứng minh bởi Chen và Shon trong [5]. Tuy nhiên, giả thuyết trong trường hợp $\sigma_2(f) \geqslant \dfrac{1}{2}$ vẫn là một vấn đề mở.

Một câu hỏi thú vị được đặt ra là: điều gì xảy ra khi ta thay f với f^n trong giả thuyết Brück. Năm 2008, L. Z. Yang và J. L. Zhang đã đưa ra một kết quả liên quan đến giả thuyết Brück như sau.

Định lý 1.9 ([16]). *Cho f là một hàm nguyên khác hằng, $n \geqslant 7$ là một số nguyên và $F = f^n$. Nếu F và F' chung nhau giá trị 1 CM, thì $F \equiv F'$ và f có dạng*

$$f = ce^{z/n},$$

trong đó c là một hằng số khác 0.

Năm 2018, chúng tôi đã chứng minh các kết quả sau

Định lý 1.10. *Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên miền phẳng phức D. Cho a và b là hai số phức thỏa mãn $b \neq 0$, gọi $n \in \mathbb{N}$, $n_j, t_j, k \in \mathbb{N}^*$, $(j = 1, 2, \ldots, k)$ thỏa mãn*

$$n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 3, \tag{1.18}$$

và

$$f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \Leftrightarrow f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b \tag{1.19}$$

đối với $f \in \mathcal{F}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc. Ngoài ta, nếu $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình thì khẳng định đúng khi (1.18) được thay thế bởi một trong các điều kiện sau:

$$k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1; \tag{1.20}$$

$$n \geqslant 1 \ \text{or}\ k \geqslant 2, n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2. \tag{1.21}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết rằng D là đĩa đơn vị. Giả sử rằng $\mathcal{F}$ không chuẩn tắc tại $z_0 \in D$. Sử dụng Mệnh đề 1.1 với $\alpha = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} t_j}{n + \sum_{j=1}^{k} n_j}$, ta có

$$g_v(\xi) = \frac{f_v(z_v + \rho_v\xi)}{\rho_v^{\alpha}} \to g(\xi)$$

cầu đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$, trong đó $g(\xi)$ là một hàm phân hình khác hằng. Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} f_v^n(z_v + \rho_v\xi)(f_v^{n_1})^{(t_1)}(z_v + \rho_v\xi)\ldots(f_v^{n_k})^{(t_k)}(z_v + \rho_v\xi) - b \\ = g_v^n(\xi)(g_v^{n_1}(\xi))^{(t_1)}\ldots(g_v^{n_k}(\xi))^{(t_k)} - b. \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f_v^n(z_v + \rho_v\xi)(f_v^{n_1})^{(t_1)}(z_v + \rho_v\xi)\ldots(f_v^{n_k})^{(t_k)}(z_v + \rho_v\xi) - b \\ \to g^n(\xi)(g^{n_1}(\xi))^{(t_1)}\ldots(g^{n_k}(\xi))^{(t_k)} - b \end{aligned} \tag{1.22}$$

đều (với khoảng cách cầu) trên mỗi tập con compact của $\mathbb{C}\setminus\{\text{pole } g\}$.

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. $a \neq 0$. Đặt M là một hằng số dương sao cho

$$M \leqslant |a|^{\dfrac{1}{n + n_1 + \cdots + n_k}}.$$

Với mỗi $f \in \mathcal{F}$, ta kí hiệu E_f bởi

$$E_f = \Big\{z \in D : f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\ldots(f^{n_k})^{(t_k)} = b\Big\}.$$

Khi đo $|f(z)| \geqslant M$ với mỗi $f \in \mathcal{F}$ khi $z \in E_f$.

Ta thấy phương trình

$$g^n(\xi)(g^{n_1}(\xi))^{(t_1)}\ldots(g^{n_k}(\xi))^{(t_k)} = b \tag{1.23}$$

có ít nhất một không điểm là ξ_0. Thực vậy, ta xét hai trường hợp con:

Trường hợp con 1.1. g là một hàm phân hình.

Nếu g là hàm phân hình siêu việt, ta thấy rằng phương trình (1.23) có vô số nghiệm theo Mệnh đề 1.4. Nếu g là hàm hữu tỷ, phương trình (1.23) có ít nhất một không điểm theo Mệnh đề 1.5.

Trường hợp con 1.2. g là một hàm nguyên. Ta xét hai khả năng

a) Nếu g là hàm nguyên siêu việt.

Nếu $n = 0, k = 1, n_1 = t_1 + 1$ (xem [11]) và $n_1 \geqslant t_1 + 2$ thì $(g^{n_1})^{t_1} - b$ có vô số không điểm (theo Mệnh đề 1.4 và Mệnh đề 1.5).

Nếu $n \geqslant 1$ or $k \geqslant 2, n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2$, theo Mệnh đề 1.4, ta có (1.23) có vô số không điểm.

b) Nếu g là một đa thức. Vì k, n, n_j, t_j thỏa mãn giả thiết của Định lý 1.10, nên phương trình (1.23) có ít nhất một nghiệm.

Tóm lại, tồn tại $\xi_0 \in \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$g^n(\xi_0)(g^{n_1})^{(t_1)}(\xi_0) \ldots (g^{n_k})^{(t_k)}(\xi_0) = b. \tag{1.24}$$

Ta thấy rằng $g(\xi_0) \neq 0, \infty$, nên $g_v(\xi)$ hội tụ đều đến $g(\xi)$ trong một lân cận của ξ_0. Từ (1.22) và định lý Hurwitz, tồn tại một dãy $\xi_v \to \xi_0$ thỏa mãn

$$f_v^n(z_v + \rho_v \xi_v)(f_v^{n_1})^{(t_1)}(z_v + \rho_v \xi_v) \ldots (f_v^{n_k})^{(t_k)}(z_v + \rho_v \xi_v) = b$$

với mỗi số v đủ lớn và $\zeta_v = z_v + \rho_v \xi_v$, nên $\zeta_v \in E_{f_v}$. Điều đó kéo theo

$$|g_v(\xi_v)| = \frac{|f_v(\zeta_v)|}{\rho_v^\alpha} \geqslant \frac{M}{\rho_v^\alpha}. \tag{1.25}$$

Từ ξ_0 không phải là cực điểm của g, nên $g(\xi)$ bị chặn trong một lân cận ξ_0. Lấy $v \to \infty$ trong (1.44), ta có mâu thuẫn

Trường hợp 2. $a = 0$. Với mỗi $f \in F$, nếu tồn tại $z_0 \in \mathbb{C}$ sao cho $f(z_0) = 0$, thì

$$f^n(z_0)(f^{n_1})^{(t_1)}(z_0) \ldots (f^{n_k})^{(t_k)}(z_0) = 0.$$

Vì $b \neq 0$, đó là mâu thuẫn. Như vậy $f \neq 0$. Hơn nữa, nếu

$$f^n(z_0)(f^{n_1})^{(t_1)}(z_0) \ldots (f^{n_k})^{(t_k)}(z_0) = b,$$

với $z_0 \in D$ thì $f(z_0)^{n+n_1+\cdots+n_k} = 0$, do đó $f(z_0) = 0$, kéo theo $b = 0$. Đó chính là mâu thuẫn.

Như thế $f \neq 0$ và $f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} \neq b$ với mọi $f \in \mathcal{F}$. Theo Định lý Hurwitz, ta có $g \neq 0$, $g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \ldots (g^{n_k})^{(t_k)} \neq b$ hoặc

$$g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \ldots (g^{n_k})^{(t_k)} \equiv b.$$

Nếu $g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \ldots (g^{n_k})^{(t_k)} \equiv b$. Theo Mệnh đề 1.2, bậc của g cao nhất là 1. Do đó ta có $g(z) = e^{P(z)}$ Theo Mệnh đề 1.8, trong đó P là một đa thức với bậc cao nhất là 1. Như vậy $g(\xi) = e^{c\xi+d}$, trong đó c là một hằng số khác không. Điều này kéo theo

$$g^n(\xi)(g^{n_1}(\xi))^{(t_1)} \ldots (g^{n_k}(\xi))^{(t_k)} = (n_1c)^{t_1} \ldots (n_kc)^{t_k} e^{(n+\sum\limits_{j=1}^{k} n_j)c\xi+(n+\sum\limits_{j=1}^{k} n_j)d} \equiv b.$$

Đây chính là điều mâu thuẫn. Như vậy

$$g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \ldots (g^{n_k})^{(t_k)} \neq b. \tag{1.26}$$

Ta xét hai trường hợp con như sau:

Trường hợp con 2.1. g là hàm phân hình. Từ điều kiện

$$n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 3,$$

ta thấy $g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \ldots (g^{n_k})^{(t_k)} - b$ có một không điểm theo Mệnh đề 1.4 và Mệnh đề 1.5. Điều này mâu thuẫn với (1.26).

Trường hợp con 2.2. Nếu g là một hàm nguyên siêu việt (chú ý rằng $g \neq 0$). Thứ nhất, $n = 0, k = 1, n_1 = t_1 + 1$ (xem [11]) và $n_1 \geqslant t_1 + 2$ (theo Mệnh đề 1.4 và Mệnh đề 1.5), thì $(g^{n_1})^{t_1} - b$ có một không điểm. Thứ hai, $n \geqslant 1$ or $k \geqslant 2, n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2$, theo Mệnh đề 1.4, ta thấy rằng $g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \ldots (g^{n_k})^{(t_k)} - b$ có một không điểm. Điều nay mâu thuẫn với (1.26). Nếu g là một đa thức, thì từ k, n, n_j, t_j thỏa mãn giả thiết của Định lý 1.10, ta có $g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \ldots (g^{n_k})^{(t_k)} - b$ có không điểm. Điều này mâu thuẫn với (1.26). Như vậy Định lý 1.10 được chứng minh. □

Định lý 1.11. *Cho* $n \in \mathbb{N}$ *và* $k, n_i, t_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \ldots, k$ *thỏa mãn một trong các điều kiện sau:*

$$1)\ k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1;$$

$$2)\ n \geqslant 1 \text{ or } k \geqslant 2,\ n_j \geqslant t_j,\ n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2.$$

Cho a *và* b *là hai giá trị hữu hạn khác* 0 *và* f *là một hàm nguyên khác hằng. Nếu* $f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \rightleftharpoons f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$ *thì*

$$\frac{f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\cdots+n_k} - a} = c,$$

trong đó c *là một hằng số. Đặc biệt, nếu* $a = b$ *thì* $f = c_1 e^{tz}$, *trong đó* c_1 *và* t *là các hằng số khác* 0 *và* t *thỏa mãn điều kiện*

$$(tn_1)^{t_1} \ldots (tn_k)^{t_k} = 1.$$

Chứng minh. Đặt

$$\mathcal{F} = \{g_\omega(z) = f(z + \omega), \omega \in \mathbb{C}\},\ z \in D = \Delta,$$

trong đó Δ là một đĩa đơn vị. Sử dụng Định lý 1.10, ta có họ hàm $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc trên D. Như thế, tồn tại một hằng số $M > 0$ thỏa mãn

$$f^{\#}(\omega) = \frac{|f'(\omega)|}{1 + |f(\omega)|^2} = \frac{|g'_\omega(0)|}{1 + |g_\omega(0)|^2} \leqslant M,$$

với mọi $\omega \in \mathbb{C}$. Theo Mệnh đề 1.2, bậc của f cao nhất là 1. Vì điều kiện

$$f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \rightleftharpoons f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b,$$

f bắt buộc là hàm nguyên siêu việt và

$$\frac{f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\cdots+n_k} - a} = e^{\alpha(z)}. \tag{1.27}$$

Từ (1.45), ta có

$$T(r, e^{\alpha(z)}) = O(T(r, f)).$$

Do đó $\sigma(e^{\alpha}) \leqslant \sigma(f) \leqslant 1$. Điều đó kéo theo $\alpha(z)$ là đa thức và $\deg(\alpha) \leqslant 1$. Từ f là một hàm nguyên siêu việt, $M(r, f) \to \infty$ hội tụ đến $r \to \infty$. Đặt

$$M(r_n, f) = |f(z_n)|,$$

trong đó $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, $\theta_n \in [0, 2\pi)$, $|z_n| = r_n$. Ta thấy rằng

$$\lim_{r_n \to \infty} \frac{1}{|f(z_n)|} = \lim_{r_n \to \infty} \frac{1}{M(r_n, f)} = 0. \tag{1.28}$$

Theo Mệnh đề 1.7, tồn tại một tập hợp $F \subset \mathbb{R}_+$ có độ đo loga hữu hạn thỏa mãn

$$\frac{f^{(m)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu(r, f)}{z}\right)^m (1 + o(1)) \tag{1.29}$$

đúng với mọi $m \geqslant 1$ và $r \notin F$. Tính toán đơn giản ta có

$$(f^n)^{(k)} = \sum c_{m_0, m_1, \ldots, m_k} f^{m_0} (f')^{m_1} \ldots (f^{(k)})^{m_k}, \tag{1.30}$$

trong đó $c_{m_0, m_1, \ldots, m_k}$ là các hằng số và $m_0, m_1, \ldots, m_k$ là các số nguyên không âm thỏa mãn $m_0 + m_1 + \cdots + m_k = n$, $\sum_{j=1}^{k} j m_j = k$.

Từ (1.48), ta có

$$\frac{(f^n)^{(k)}}{f^n} = \sum c_{m_0, m_1, \ldots, m_k} \frac{f^{m_0}}{f^{m_0}} \frac{(f')^{m_1}}{f^{m_1}} \ldots \frac{(f^{(k)})^{m_k}}{f^{m_k}}.$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} \frac{(f^n)^{(k)}(z_j)}{f^n(z_j)} &= \sum c_{m_0, m_1, \ldots, m_k} \frac{(f')^{m_1}(z_j)}{f^{m_1}(z_j)} \ldots \frac{(f^{(k)})^{m_k}(z_j)}{f^{m_k}(z_j)} \\ &= \sum c_{m_0, m_1, \ldots, m_k} \left(\frac{\nu(r_j, f)}{z_j}\right)^{m_1 + \cdots + m_k} (1 + o(1)). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Từ (1.45), ta có

$$\frac{\frac{(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)}}{f^{n_1} \ldots f^{n_k}} - \frac{b}{f^{n + n_1 + \cdots + n_k}}}{1 - \frac{a}{f^{n + n_1 + \cdots + n_k}}} = e^{\alpha(z)}. \tag{1.32}$$

Áp dụng (1.49) vào (1.32), (1.47) và Mệnh đề 1.6, ta có

$$\begin{aligned}|\alpha(z_n)| = |\log e^{\alpha(z_n)}| &= \left|\log \frac{\frac{(f^{n_1})^{(t_1)}(z_n)\dots(f^{n_k})^{(t_k)}(z_n)}{f^{n_1}(z_n)\dots f^{n_k}(z_n)} - \frac{b}{f^{n+n_1+\dots+n_k}(z_n)}}{1-\frac{a}{f^{n+n_1+\dots+n_k}(z_n)}}\right| \\ &\leqslant O(\log\nu(r_n,f)) + O(\log r_n) + O(1) \\ &= O(\log r_n), \qquad (1.33)\end{aligned}$$

khi $r_n \to \infty$. Từ (1.33), ta thu được $\alpha(z)$ là một hằng số vì $\alpha(z)$ là một đa thức. Theo đẳng thức (1.45), ta có

$$\frac{f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\dots+n_k} - a} = c.$$

Nếu $a = b$, ta sẽ chỉ ra sự tồn tại của ξ_0 thỏa mãn

$$f^n(\xi_0)(f^{n_1})^{(t_1)}(\xi_0)\dots(f^{n_k})^{(t_k)}(\xi_0) = b.$$

Vì f là một hàm nguyên siêu việt, do đó nếu $n = 0, k = 1, n_1 = t_1 + 1$ (theo [11]) và $n_1 \geqslant t_1 + 2$ (theo Mệnh đề 1.4 và Mệnh đề 1.5), thì $(f^{n_1})^{t_1} - b$ có vô số không điểm. Như thế, ξ_0 là tồn tại. Nếu $n \geqslant 1$ hoặc $k \geqslant 2$, từ điều kiện $n + \sum_{j=1}^k n_j \geqslant \sum_{j=1}^k t_j + 2$ và Mệnh đề 1.4, ta có

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)} = b$$

có vô số không điểm. Khi đó ta thu được số ξ_0 thỏa mãn

$$f^n(\xi_0)(f^{n_1})^{(t_1)}(\xi_0)\dots(f^{n_k})^{(t_k)}(\xi_0) = b$$

với bội $m \geqslant 1$. Theo giả thiết, ta thấy rằng ξ_0 là một không điểm của $f^{n+n_1+\dots+n_k} - b$ với bội m. Điều này kéo theo

$$1 = \frac{f^n(\xi_0)(f^{n_1})^{(t_1)}(\xi_0)\dots(f^{n_k})^{(t_k)}(\xi_0) - b}{f^{n+n_1+\dots+n_k}(\xi_0) - b} = c.$$

Do đó $f^n(f^{n_1})^{(t_1)}\dots(f^{n_k})^{(t_k)} = f^{n+n_1+\dots+n_k}$, kéo theo f không có không điểm và bậc của f nhiều nhất là 1. Điều này kéo theo $f = c_1e^{tz}$, trong đó c_1 và t là một hằng số và t thỏa mãn $(tn_1)^{t_1}\dots(tn_k)^{t_k} = 1$. Định lý được chứng minh. $\square$

Trường hợp đặc biệt của Định lý 1.11, nếu ta chọn $n = 0,\ k = 1,\ t_1 = 1$ trong Định lý 1.11, thì ta có:

Hệ quả 1.12. *Cho f là một hàm nguyên khác hằng, $n \geqslant 2$ là một số nguyên và $F = f^n$. Nếu F và F' chung nhau giá trị 1 CM thì $F \equiv F'$ và f có dạng*

$$f = ce^{z/n},$$

trong đó c là một hằng số khác 0.

Chú ý, điều kiện của n trong Hệ quả 1.12 là $n \geqslant 2$ và trong Định lý 1.9 là $n \geqslant 7$. Như vậy Định lý 1.11 là một cải tiến của Định lý 1.9 của Yang và Zhang.

1.2. Vấn đề duy nhất cho hàm phân hình $p-$adic

1.2.1. Phân bố giá trị Nevanlinna $p-$adic

Hàm đặc trưng và tính chất

Trong phần này ta luôn quy ước các số thực ρ_0, r, ρ thỏa mãn $0 < \rho_0 < r < \rho \leqslant \infty$. Giả sử $f \in \mathcal{M}_{(\rho}(\mathbb{C}_p)$ là một hàm phân hình, khi đó tồn tại hai hàm $f_0, f_1 \in \mathcal{A}_r(\mathbb{C}_p)$ sao cho f_1, f_0 không có nhân tử chung trong $\mathcal{A}_r(\mathbb{C}_p)$ và $f = \frac{f_1}{f_0}$. Với $a \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$, ta định nghĩa hàm đếm số không điểm $n(r, \frac{1}{f-a})$ của f tại a (hay còn gọi là hàm đếm số a-điểm của f) bởi

$$n\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \begin{cases} n(r,f) = n(r, \frac{1}{f_0}) & : a = \infty, \\ n(r, \frac{1}{f_1 - af_0}) & : a \neq \infty. \end{cases}$$

Định nghĩa hàm đếm $N(r, \frac{1}{f-a})$ của f tại a bởi

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \begin{cases} N(r,f) = N(r, \frac{1}{f_0}) & : a = \infty, \\ N(r, \frac{1}{f_1 - af_0}) & : a \neq \infty. \end{cases}$$

Kí hiệu

$$N(r, f = a) = \begin{cases} N(r, f) = N(r, f_0 = 0) & : a = \infty, \\ N(r, f_1 - af_0 = 0) & : a \neq \infty. \end{cases}$$

Tương tự ta cũng định nghĩa được các hàm $\overline{n}(r, f)$, $\overline{N}(r, f)$, $\overline{n}(r, \frac{1}{f-a})$ và $\overline{N}(r, \frac{1}{f-a})$. Giả sử

$$f_1 = \sum_{n=m_1}^{\infty} a_n z^n; \quad f_0 = \sum_{n=m_0}^{\infty} b_n z^n,$$

trong đó $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ và $a_{m_1} \neq 0, b_{m_0} \neq 0$.

Mệnh đề 1.13. *(Công thức Jensen)*

$$\begin{aligned} N(r, f = 0) - N(r, f = \infty) &= \log \mu(r, f) - \log \frac{|a_{m_1}|}{|b_{m_0}|} \\ &= \log \mu(r, f) - \log |f^*(0)|, \end{aligned}$$

và

$$N(r, \frac{1}{f}) - N(r, f) = \log \mu(r, f) - \log \mu(\rho_0, f),$$

trong đó $f^*(0) = \dfrac{a_{m_1}}{b_{m_0}}$.

Tiếp theo ta định nghĩa hàm bù (hay còn gọi là hàm xấp xỉ) của hàm f bởi công thức

$$m(r, f) = \log^+ \mu(r, f) = \max\{0, \log \mu(r, f)\}.$$

Đặc biệt

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) = \log^+ \mu\left(r, \frac{1}{f}\right) = \log^+ \frac{1}{\mu(r, f)} = \max\{0, -\log \mu(r, f)\}.$$

Tiếp theo ta xem xét một số tính chất đơn giản của hàm đếm và hàm xấp xỉ.

Mệnh đề 1.14. *Giả sử $f_i \in \mathcal{M}_{(\rho}(\mathbb{C}_p)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Khi đó với mỗi $r > 0$, ta có*

$$N\left(r, \sum_{i=1}^{k} f_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} N(r, f_i); \quad N\left(r, \prod_{i=1}^{k} f_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} N(r, f_i);$$
$$m\left(r, \sum_{i=1}^{k} f_i\right) \leqslant \max_{i\in\{1,\ldots,k\}} m(r, f_i); \quad m\left(r, \prod_{i=1}^{k} f_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} m(r, f_i).$$

Tiếp theo ta định nghĩa hàm đặc trưng

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) \quad (\rho_0 < r < \infty).$$

Mệnh đề 1.15. *Giả sử $f, f_i \in \mathcal{M}_{(\rho}(\mathbb{C}_p)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Khi đó với mỗi $r > 0$, ta có*

$$T\left(r, \sum_{i=1}^{k} f_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} T(r, f_i), \quad T\left(r, \prod_{i=1}^{k} f_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} T(r, f_i).$$

Hơn nữa $T(r, f)$ là một hàm tăng theo r.

Đánh giá cấp tăng của hàm phân hình

Kí hiệu $\mathbb{K}$ là trường $\mathbb{C}_p$ hoặc $\mathbb{C}$. Giả sử $f, a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ với $a_k \not\equiv 0$, đặt

$$A(z, w) = \sum_{j=0}^{k} a_j(z) w^j.$$

Với một số $a \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, kí hiệu $\mu_f^a(z_0)$ là bội của $a-$điểm của hàm f tại z_0, tức là $\mu_f^a(z_0) = m$ nếu và chỉ nếu

$$f(z) = \begin{cases} a + (z - z_0)^m h(z) & : a \neq \infty \\ \frac{h(z)}{(z-z_0)^m} & : a = \infty, \end{cases}$$

trong đó $h(z_0) \neq 0, \infty$. Điều đó có nghĩa là, nếu $a \neq \infty$ thì

$$f(z) - a = (z - z_0)^{\mu_f^a(z_0)} h(z),$$

trong đó $h(z_0) \neq 0, \infty$. Khi đó ta có hàm

$$\mu_f^a : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{Z}_+$$

xác định bởi $\mu_f^a(z_0) > 0$ với $z_0 \in \mathbb{K}$ nếu và chỉ nếu $f(z_0) = a$.

Mệnh đề 1.16. *Nếu f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$, khi đó*

$$N(r, A \circ f) = kN(r, f) + O\bigg(\sum_{j=0}^{k} \Big\{N(r, a_j) + N\big(r, \frac{1}{a_j}\big)\Big\}\bigg),$$

trong đó $A \circ f$ xác định bởi $A \circ f(z) = A(z, f(z))$.

Mệnh đề 1.17. *Nếu f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$, khi đó*

$$m(r, A \circ f) = km(r, f) + O\bigg(\sum_{j=0}^{k} m(r, a_j) + m\big(r, \frac{1}{a_k}\big)\bigg).$$

Định lý 1.18. *Nếu $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ và khác hằng số thì*

$$T(r, A \circ f) = kT(r, f) + O\bigg(\sum_{j=0}^{k} T(r, a_j)\bigg).$$

Cho các hàm $\{b_0, \ldots, b_q\} \subset \mathcal{M}(\mathbb{K})$ với $b_q \not\equiv 0$ sao cho

$$B(z, w) = \sum_{j=0}^{q} b_j(z) w^j$$

và $A(z, w)$ là hai đa thức nguyên tố cùng nhau đối với biến w. Đặt

$$R(z, w) = \frac{A(z, w)}{B(z, w)}.$$

Định lý sau cho ta một đánh giá về hàm đặc trưng của $R(z, w)$.

Định lý 1.19. *Nếu $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ và khác hằng số thì*

$$T(r, R \circ f) = \max\{k, q\} T(r, f) + O\bigg(\sum_{j=0}^{k} T(r, a_j) + \sum_{j=0}^{q} T(r, b_j)\bigg).$$

Hai định lý cơ bản

Trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu hai định lý cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị $p-$adic. Để cho ngắn gọn, ta vẫn kí hiệu $|.|$ thay cho $|.|_p$ trên $\mathbb{C}_p$. Ta cố định hai số thực ρ và ρ_0 sao cho $0 < \rho_0 < \rho < \infty$. Trước tiên ta chứng minh Định lý cơ bản thứ nhất, định lý này tương tự với trường hợp phức.

Định lý 1.20 (Định lý cơ bản thứ nhất). *Nếu f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p(0;\rho)$ thì với mọi $a \in \mathbb{C}_p$ ta có*

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1).$$

Mệnh đề sau đây thường được gọi là bổ đề đạo hàm logarit.

Mệnh đề 1.21. *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p(0;\rho)$. Khi đó với một số nguyên $k > 0$, với mọi $r < \rho$ ta có*

$$\mu\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \leqslant \frac{1}{r^k},$$

đặc biệt

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \leqslant k \log^+ \frac{1}{r}.$$

Với một hàm phân hình khác hằng f trong $\mathbb{C}_p(0;\rho)$, ta định nghĩa giá trị phân nhánh bởi

$$N_{\mathrm{Ram}}(r, f) = 2N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right).$$

Tiếp theo ta xem xét Định lý cơ bản thứ hai trong trường hợp $p-$adic.

Định lý 1.22 (Định lý cơ bản thứ hai). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p(0;\rho)$ và $a_1, \ldots, a_q \in \mathbb{C}_p$ là các số phân biệt. Đặt*

$$\delta = \min_{i \neq j}\{1, |a_i - a_j|\}, \quad A = \max_i\{1, |a_i|\}.$$

Khi đó với $0 < r < \rho$,

$$(q-1)T(r,f) \leqslant N(r,f) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N_{\mathrm{Ram}}(r,f)$$
$$- \log r + S_f$$
$$\leqslant \overline{N}(r,f) + \sum_{j=1}^{q} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - \log r + S_f,$$

trong đó

$$S_f = \sum_{j=1}^{q} \log \mu(\rho_0, f-a_j) - \log \mu(\rho_0, f') + (q-1)\log \frac{A}{\delta}.$$

Chú ý. Do lượng S_f trong Định lý cơ bản thứ hai là một đại lượng bị chặn nên

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{S_f}{T(r,f)} = 0.$$

Ta kí hiệu

$$n\left(r, \frac{1}{f'}; a_1, \ldots, a_q\right) = n\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum_{j=1}^{q} \overline{n}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right)$$
$$- \sum_{j=1}^{q} n\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right),$$

khi đó

$$0 \leqslant n\left(r, \frac{1}{f'}; a_1, \ldots, a_q\right) \leqslant n\left(r, \frac{1}{f'}\right).$$

Định nghĩa hàm đếm

$$N\left(r, \frac{1}{f'}; a_1, \ldots, a_q\right) = \int_{\rho_0}^{r} \frac{n\big(t, \frac{1}{f'}; a_1, \ldots, a_q\big)}{t} dt.$$

Khi đó, bất đẳng thức thứ hai trong Định lý 1.22 có thể viết lại mạnh hơn như sau:

$$(q-1)T(r,f) \leqslant \overline{N}(r,f) + \sum_{j=1}^{q} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}; a_1, \ldots, a_q\right)$$
$$- \log r + S_f.$$

Định lý sau là một dạng định lý cơ bản thứ hai cho hàm nhỏ.

Định lý 1.23. *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p$, kí hiệu a_1, a_2, a_3 là các hàm phân hình phân biệt trên $\mathbb{C}_p$. Khi đó*

$$T(r, f) \leqslant \sum_{j=1}^{3} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) - \log r + S(r), \tag{1.34}$$

trong đó

$$S(r) = 4T(r, a_1) + 4T(r, a_2) + 5T(r, a_3) + O(1).$$

Với một hàm phân hình khác hằng f trên $\mathbb{C}_p$, ta định nghĩa giá trị phân nhánh bậc 2 bởi công thức thức

$$N_{2,\mathrm{Ram}}(r, f) = 3N(r, f) - N(r, f'') + N\left(r, \frac{1}{f''}\right).$$

Định lý sau đây là một dạng của Định lý cơ bản thứ hai kiểu phân nhánh bậc 2.

Định lý 1.24. *Nếu f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p$ và $a_1, \ldots, a_q \in \mathbb{C}_p$ là các số phân biệt. Đặt*

$$\delta = \min_{i \neq j}\{1, |a_i - a_j|\}, \quad A = \max_{i}\{1, |a_i|\}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}(q-1)T(r, f) \leqslant 2N(r, f) &+ \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) - N_{2,\mathrm{Ram}}(r, f)\\ &- 2\log r + S_f\end{aligned}$$

trong đó

$$S_f = \sum_{j=1}^{q} \log \mu(\rho_0, f - a_j) - \log \mu(\rho_0, f'') + (q-1)\log\frac{A}{\delta}.$$

Một cách tương tự, với một hàm phân hình khác hằng f trên $\mathbb{C}_p$, ta định nghĩa *giá trị phân nhánh bậc k* bởi công thức thức

$$N_{k,\mathrm{Ram}}(r,f) = (k+1)N(r,f) - N(r,f^{(k)}) + N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right).$$

Đặt

$$\mathbf{W}_k(f_0,f_1) = (-1)^{[k/2]} f_0^{k+1}\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^{(k)},$$

trong đó $[k/2]$ kí hiệu là phần nguyên của $k/2$, ta thấy

$$N_{k,\mathrm{Ram}}(r,f) = N\left(r,\frac{1}{\mathbf{W}_k}\right),$$

trong đó $f = f_1/f_0$. Chứng minh tương tự như Định lý 1.24 ta thu được dạng một dạng của Định lý cơ bản thứ hai kiểu phân nhánh bậc k.

Định lý 1.25. *Nếu f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p$ và $a_1,\dots,a_q \in \mathbb{C}_p$ là các số phân biệt. Đặt*

$$\delta = \min_{i\neq j}\{1,|a_i - a_j|\}, \quad A = \max_i\{1,|a_i|\}.$$

Khi đó với $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}(q-1)T(r,f) \leqslant{}& kN(r,f) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right) - N_{k,\mathrm{Ram}}(r,f)\\ &- k\log r + S_f\end{aligned}$$

trong đó

$$S_f = \sum_{j=1}^{q}\log\mu(\rho_0, f-a_j) - \log\mu(\rho_0,f^{(k)}) + (q-1)\log\frac{A}{\delta}.$$

Với $a \in \mathbb{C}_p\cup\{\infty\}$, với một số nguyên dương k ta định nghĩa

$$\mu_{f,k}^a(z) = \begin{cases}\mu_f^a(z) & : \mu_f^a(z) \leqslant k\\ k & : \mu_f^a(z) > k.\end{cases}$$

Kí hiệu

$$n_k\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = \sum_{|z|\leqslant r} \mu^a_{f,k}(z);$$
$$N_k\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = \int_{\rho_0}^{\rho} n_k\Big(t, \frac{1}{f-a}\Big)\frac{dt}{t}.$$

Kí hiệu

$$n\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}}; a_1, \dots, a_q\Big) = n\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}}\Big) + \sum_{j=1}^{q} n_k\Big(r, \frac{1}{f-a_j}\Big) - \sum_{j=1}^{q} n\Big(r, \frac{1}{f-a_j}\Big)$$

Và

$$N\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}}; a_1, \dots, a_q\Big) = \int_{\rho_0}^{\rho} n\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}}; a_1, \dots, a_q\Big)\frac{dt}{t}.$$

Khi đó ta có

$$0 \leqslant n\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}}; a_1, \dots, a_q\Big) \leqslant n\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}}\Big).$$

Hơn nữa ta dễ dàng chứng minh được

$$kn(r,f) + \sum_{j=1}^{q} n\Big(r, \frac{1}{f-a_j}\Big) - n\Big(r, \frac{1}{\mathbf{W}_k}\Big) \leqslant k\overline{n}(r,f) + \sum_{j=1}^{q} n_k\Big(r, \frac{1}{f-a_j}\Big).$$

Bất đẳng thức trong Định lý 1.25 được viết lại như sau:

$$(q-1)T(r,f) \leqslant k\overline{N}(r,f) + \sum_{j=1}^{q} N_k\Big(r, \frac{1}{f-a_j}\Big) - N\Big(r, \frac{1}{f^{(k)}}; a_1, \dots, a_q\Big) - k\log r + S_f.$$

1.2.2. Vấn đề duy nhất liên quan đến đa thức vi phân

Thời gian gần đây vấn đề nghiên cứu phân bố giá trị cho đa thức vi phân cho các hàm phân hình được phát triển bởi nhiều tác giả trong và ngoài nước. Chẳng hạn: Yang và Hua ([26]), Halburd và Korhonen ([20]), Laine và Yang ([21]), Khoai và An ([17]), ... Trong phần này chúng tôi chứng minh một số kết quả về vấn đề duy nhất cho đa thức vi phân của các hàm phân hình p-adic chung nhau một giá trị.

Kí hiệu $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ là vành các hàm nguyên trên $\mathbb{C}_p$. Với hàm $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, $a \in \mathbb{C}_p$, m là một số nguyên dương, ta kí hiệu $\overline{N}_{(m}(r, a; f)$, (hoặc $\overline{N}_{(m}(r, \dfrac{1}{f-a})$) là hàm đếm bội cắt cụt bởi số m của a-điểm của f. Tức là

$$\overline{N}_{(m}(r, \frac{1}{f-a}) = \int_{\rho_0}^{r} \frac{\overline{n}_{(m}(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt.$$

Với f là một hàm phân hình p-adic khác hằng. Điều này nghĩa là $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. Kí hiệu bởi $\overline{N}_{(m}(r, f)$ là hàm đếm tại các cực điểm bội cắt cụt bởi số nguyên dương m của hàm f. Tức là

$$\overline{N}_{(m}(r, f) = \int_{\rho_0}^{r} \frac{\overline{n}_{(m}(t, f)}{t} dt,$$

trong đó $\overline{n}_{(m}(r, f) = \overline{n}_{(m}(r, \dfrac{1}{f_2})$. Gọi k là một số nguyên dương và $a \in \mathbb{C}_p$, ta có

$$N_k(r, \frac{1}{f-a}) = \overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) + \overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{f-a}) + \cdots + \overline{N}_{(k}(r, \frac{1}{f-a}),$$
$$N_2(r, f) = \overline{N}(r, f) + \overline{N}_{(2}(r, f).$$

Mệnh đề 1.26 ([17]). *Cho f là một hàm phân hình p-adic khác hằng. Khi đó*

$$m(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}) = O(1) \ \textit{and} \ T(r, f(z+c)) = T(r, f) + O(1).$$

Cho f và g là hai hàm phân hình p-adic khác hằng, ta có

$$H = \frac{f''}{f'} - 2\frac{f'}{f-1} - \frac{g''}{g'} + 2\frac{g'}{g-1}.$$

Mệnh đề 1.27 ([17]). *Nếu $H \not\equiv 0$ và f, g chung nhau 1-CM khi đó*

$$T(r,f) \leqslant N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r,\frac{1}{g}) - \log r + O(1)$$
$$T(r,g) \leqslant N_2(r,f) + N_2(r,\frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r,\frac{1}{g}) - \log r + O(1).$$

Sử dụng các tính chất về hàm phân hình $p-$adic, ta dễ dàng chứng minh được.

Mệnh đề 1.28. *Cho f là một hàm phân hình $p-adic$ và $f^{(k)} \not\equiv 0$. Khi đó ta có*

$$\begin{aligned}
&\overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}}) \leqslant k\overline{N}(r,f) + N_{k+1}(r,\frac{1}{f}) + O(1);\\
&\overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}}) \leqslant N_{k+1}(r,\frac{1}{f}) + T(r,f^{(k)}) - T(r,f) + O(1);\\
&N_2(r,\frac{1}{f^{(k)}}) \leqslant k\overline{N}(r,f) + N_{k+2}(r,\frac{1}{f}) + O(1);\\
&N_2(r,\frac{1}{f^{(k)}}) \leqslant N_{k+2}(r,\frac{1}{f}) + T(r,f^{(k)}) - T(r,f) + O(1).
\end{aligned}$$

Mệnh đề 1.29. *Cho f và g là các hàm nguyên trên $\mathbb{C}_p$, $k, m \geqslant 1$, $n \geqslant m+5$ là các số nguyên dương và $c \neq 0$ là một hằng số. Nếu*

$$(f^n(f^m-1)f(z+c))^{(k)} = (g^n(g^m-1)g(z+c))^{(k)},$$

thì $f \equiv hg$, trong đó $h^{n+1} = h^m = 1$.

Năm 2018 chúng tôi đã chứng minh được gọi là định lý duy nhất cho các hàm phân hình $p-$adic liên quan đến đa thức vi phân:

Định lý 1.30. *Cho f, g là các hàm nguyên siêu việt p-adic và $k \geqslant 1$, $t \geqslant 1, n \geqslant 2k+4+t$ là các số nguyên. Nếu*

$$(f^n(z)f(z+b_1)\ldots f(z+b_t))^{(k)}$$

và

$$(g^n(z)g(z+b_1)\dots g(z+b_t))^{(k)}$$

chung nhau $1-CM$*, trong đó* $b_1,\dots,b_t$ *là các hằng số khác* 0 *phân biệt. Khi đó* $f\equiv hg$*, trong đó* $h^{n+t}=1$.

Chứng minh. Đặt

$$F(z)=f^n(z)f(z+b_1)\dots f(z+b_t)$$

và

$$G(z)=g^n(z)g(z+b_1)\dots g(z+b_t).$$

Theo giả thiết ta có $F^{(k)}$ và $G^{(k)}$ chung nhau $1-CM$. Đặt

$$H=\frac{F^{(k+2)}}{F^{(k+1)}}-2\frac{F^{(k+1)}}{F^{(k)}-1}-\frac{G^{(k+2)}}{G^{(k+1)}}+2\frac{G^{(k+1)}}{G^{(k)}-1}.$$

Trước hết ta chứng minh $H\equiv 0$. Thật vậy, nếu $H\not\equiv 0$, theo Mệnh đề 1.27, ta có

$$\begin{aligned}T(r,F^{(k)})+T(r,G^{(k)})\leqslant 2\big(&N_2(r,F^{(k)})+N_2(r,\frac{1}{F^{(k)}}))\\&+2(N_2(r,G^{(k)})+N_2(r,\frac{1}{G^{(k)}})\big)\\&-2\log r+O(1).\end{aligned}\tag{1.35}$$

Sử dụng Mệnh đề 1.28, (1.35) trở thành

$$\begin{aligned}T(r,F)+T(r,G)\leqslant&2N_2(r,F^{(k)})+2N_2(r,G^{(k)})+k\overline{N}(r,F)\\&+k\overline{N}(r,G)+2N_{k+2}(r,\frac{1}{F})\\&+2N_{k+2}(r,\frac{1}{G})-2\log r+O(1).\end{aligned}\tag{1.36}$$

Theo giả thiết $f(z),g(z)$ là các hàm nguyên, từ (1.36) ta có

$$\begin{aligned}&T(r,F)+T(r,G)\leqslant\\&\qquad 2N_{k+2}(r,\frac{1}{F})+2N_{k+2}(r,\frac{1}{G})-2\log r+O(1).\end{aligned}\tag{1.37}$$

Lập luận giống như Mệnh đề 1.26, ta có

$$m(r, \frac{f(z)}{f(z+c)}) = O(1), \quad c \neq 0,$$

do đó từ Mệnh đề 1.26, ta có

$$\begin{aligned} m(r, \frac{f(z+c)}{f(z+b_i)}) &= m(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}.\frac{f(z)}{f(z+b_i)}) \\ &\leqslant m(r, \frac{f(z+c)}{f(z)}) + m(r, \frac{f(z)}{f(z+b_i)}) = O(1) \end{aligned}$$

với mọi $i \in \{1, \dots, n\}$. Do đó

$$\begin{aligned} (n+t)T(r,f) &= (n+t)T(r, f(z+c)) + O(1) \\ &= T(r, f^{n+t}(z+c)) + O(1) \\ &= m(r, f^{n+t}(z+c)) + O(1) \\ &\leqslant m(r, f^n(z+c)f(z+b_1)\dots f(z+b_t)) \\ &\quad + m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z+b_1)}\right) + \dots + m\left(r, \frac{f(z+c)}{f(z+b_t)}\right) + O(1) \\ &= m(r, f^n(z+c)f(z+b_1)\dots f(z+b_t)) + O(1) \\ &\leqslant m(r, f^n(z)f(z+b_1)\dots f(z+b_t)) \\ &\quad + m\left(r, (\frac{f(z+c)}{f(z)})^n\right) + O(1) \\ &= m(r, f^n(z)f(z+b_1)\dots f(z+b_t)) + O(1). \end{aligned}$$

Suy ra

$$m(r, f^n(z)f(z+b_1)\dots f(z+b_t)) \leqslant (n+t)T(r,f) + O(1).$$

Từ đó

$$\begin{aligned} T(r,F) &= T(r, f^n(z)f(z+b_1)\dots f(z+b_t)) \\ &= (n+t)T(r,f) + O(1). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned} T(r,G) &= T(r, g^n(z)g(z+b_1)\dots g(z+b_t)) \\ &= (n+t)T(r,g) + O(1). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Theo định nghĩa của F và G, ta có

$$N_{k+2}(r, \frac{1}{F}) = N_{k+2}(r, \frac{1}{f^n(z)f(z+b_1)\dots f(z+b_t)})$$
$$\leqslant (k+2)\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \sum_{j=1}^{t} N(r, \frac{1}{f(z+b_j)}). \tag{1.40}$$
$$N_{k+2}(r, \frac{1}{G}) = N_{k+2}(r, \frac{1}{g^n(z)g(z+b_1)\dots g(z+b_t)})$$
$$\leqslant (k+2)\overline{N}(r, \frac{1}{g}) + \sum_{j=1}^{t} N(r, \frac{1}{g(z+b_j)}). \tag{1.41}$$

Kết hợp (1.37), (1.38), (1.39), (1.40) và (1.41) ta thu được

$$(n-(2k+4+t))(T(r,f)+T(r,g)) + 2\log r \leqslant O(1).$$

Điều này mâu thuẫn với $n \geqslant 2k+4+t$. Như vậy $H \equiv 0$, do đó

$$\frac{1}{F^{(k)}-1} = \frac{a}{G^{(k)}-1} + b, \tag{1.42}$$

trong đó $a, b \in \mathbb{C}_p$ là các hằng số, $a \neq 0$. Từ (1.42), ta có

$$F^{(k)} = \frac{(b+1)G^{(k)} + a - b - 1}{bG^{(k)} + a - b},$$
$$G^{(k)} = \frac{(b-a)F^{(k)} + a - b - 1}{bF^{(k)} - (b+1)}. \tag{1.43}$$

Ta xem xét các trường hợp sau

Trường hợp 1. $b \neq 0$. Nếu $a = b = -1$, ta có $F^{(k)}.G^{(k)} = 1$. Điều này kéo theo

$$(f^n(z)f(z+b_1)\dots f(z+b_t))^{(k)}.(g^n(z)g(z+b_1)\dots g(z+b_t))^{(k)} = 1.$$

Trong trường hợp này f và g không có không điểm. Thực vậy nếu z_0 là một không điểm của f với bội $p \geqslant 1$, khi đó z_0 là không điểm của

$$(f^n(z)f(z+b_1)\dots f(z+b_t))^{(k)}$$

với bội ít nhất là $np - k > 0$. Như vậy z_0 là cực điểm của

$$(g^n(z)g(z+b_1)\dots g(z+b_t))^{(k)},$$

do đó z_0 là cực điểm của một trong các hàm g, $g(z+b_1)$,..., $g(z+b_t)$. Vì g là hàm nguyên, $g(z+b_1)$,..., $g(z+b_t)$ và g không có cực điểm. Như thế f không có không điểm nên f là hằng số. Đây là mâu thuẫn.

Nếu $a = b \neq -1$, từ (1.43), ta có

$$\frac{1}{F^{(k)}} = \frac{bG^{(k)}}{(b+1)G^{(k)}-1}, \quad G^{(k)} = \frac{-1}{bF^{(k)}-(b+1)}. \tag{1.44}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\overline{N}(r, \frac{1}{F^{(k)}}) &= \overline{N}\left(r, \frac{1}{G^{(k)}-\frac{1}{b+1}}\right) \\ &\leqslant k\overline{N}(r,F) + N_{k+1}(r, \frac{1}{F}) + O(1)\end{aligned}$$

và

$$\overline{N}(r, G^{(k)}) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{F^{(k)}-\frac{b+1}{b}}\right) = 0.$$

Theo định lý cơ bản thứ hai cho hàm nguyên $F^{(k)}$, ta có

$$T(r, F^{(k)}) \leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{F^{(k)}}) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{F^{(k)}-\frac{b+1}{b}}\right) - \log r + O(1). \tag{1.45}$$

Theo Mệnh đề 1.28, (1.45) trở thành

$$\begin{aligned}T(r,F) &\leqslant N_{k+1}(r, \frac{1}{F}) - \log r + O(1) \\ &\leqslant (k+1+t)T(r,f) - \log r + O(1).\end{aligned} \tag{1.46}$$

Kết hợpc (1.38) và (1.46), ta có $(n-k-1)T(r,f) + \log r \leqslant O(1)$. Điều này mâu thuẫn với $n \geq 2k+4+t$.

Nếu $a \neq b$, $b = -1$. Từ (1.43), ta có

$$F^{(k)} = \frac{a}{-G^{(k)}+a+1}, \quad \frac{1}{G^{(k)}} = \frac{-F^{(k)}}{-(a+1)F^{(k)}+a}.$$

Nếu $a \neq b$, $b \neq -1$. Từ (1.43), ta có

$$F^{(k)} - (1+\frac{1}{b}) = \frac{-a}{b^2(G^{(k)}+\dfrac{a-b}{b})}$$

và

$$G^{(k)} = \frac{(b-a)F^{(k)} + a - b - 1}{bF^{(k)} - (b+1)}.$$

Lập luận tương tự như trên ta có mâu thuẫn.

Trường hợp 2. $b = 0$. Từ (1.42) ta có

$$F^{(k)} = \frac{1}{a}G^{(k)} + 1 - \frac{1}{a}. \qquad (1.47)$$

Điều này kéo theo

$$F = \frac{1}{a}G + Q(z), \qquad (1.48)$$

trong đó $Q(z)$ là một đa thức có bậc nhiều nhất là k. Dễ thấy rằng

$$T(r, g) = T(r, f) + S(r, f).$$

Nếu $Q(z) \not\equiv 0$. Theo định lý cơ bản thứ hai cho hàm nhỏ p-adic, ta có

$$T(r, F) \leqslant \overline{N}(r, F) + \overline{N}(r, \frac{1}{F}) + \overline{N}(r, \frac{1}{F - Q}) + S(r, f).$$

Kéo theo

$$(n - t - 2)T(r, f) \leqslant S(r, f).$$

Điều này mâu thuẫn với $n \geq 2k + 4 + t$. Khi đó $Q \equiv 0$, kéo theo $F = \frac{1}{a}G$. Do đó $F^{(k)} = \frac{1}{a}G^{(k)}$.

Từ (1.47), ta có $1 - \frac{1}{a} = 0$, kéo theo $a = 1$, điều này kéo theo $F \equiv G$. Do đó ta có

$$f^n(z)f(z + b_1)\dots f(z + b_t) = g^n(z)g(z + b_1)\dots g(z + b_t). \qquad (1.49)$$

Đặt $h = \frac{f}{g}$. Nếu h không là hằng số, khi đó

$$h^n(z) = \frac{1}{h(z + b_1)\dots h(z + b_t)}.$$

Theo Mệnh đề 1.26, ta có

$$nT(r, h) = tT(r, h) + O(1).$$

Điều này mâu thuẫn với $n \geq 2k+4+t$. Do đó h là hằng số. Điều này kéo theo $f = hg$, trong đó $h^{n+t} = 1$. Định lý được chứng minh. $\square$

Chương 2

Vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình

2.1. Một số kiến thức về phân bố giá trị

Trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu một số khái niệm và kiến thức cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna cho các hàm phân hình và đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, các kiến thức này cần thiết cho việc chứng minh các kết quả chính.

Cho $R_0 > 1$ là một số thực dương hoặc $+\infty$, ta kí hiệu

$$\Delta = \Big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\Big\},$$

là một hình vành khuyên trong $\mathbb{C}$. Với mỗi số thực dương r thỏa mãn $1 < r < R_0$, ta kí hiệu

$$\Delta_r = \Big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| < r\Big\},\ \Delta_{1,r} = \Big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| \leqslant 1\Big\},$$
$$\Delta_{2,r} = \Big\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r\Big\}.$$

Cho f là một hàm phân hình trên Δ, ta nhắc lại

$$m\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta,$$
$$m(r, f) = m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

trong đó $\log^+ x = \max\{0, \log x\}, a \in \mathbb{C}$ và $r \in (R_0^{-1}; R_0)$. For $r \in (1, R_0)$, ta kí hiệu

$$m_0\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + m\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{f-a}\right),$$
$$m_0(r, f) = m(r, f) + m(r^{-1}, f).$$

Kí hiệu $n_1\left(t, \frac{1}{f-a}\right)$ là số các không điểm của $f - a$ trong $\{z \in \mathbb{C} : t < |z| \leqslant 1\}$ và $n_2\left(t, \frac{1}{f-a}\right)$ là số các không điểm của $f - a$ trong $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < t\}$; $n_1(t, \infty)$ là số các cực điểm trong $\{z \in \mathbb{C} : t < |z| \leqslant 1\}$ và $n_2(t, \infty)$ là số các cực điểm trong $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < t\}$ của f. Với mọi r $(1 < r < R_0)$, ta có

$$N_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_{1/r}^{1} \frac{n_1(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt,$$
$$N_2\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_{1}^{r} \frac{n_2(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt,$$

và

$$N_1(r, f) = N_1(r, \infty) = \int_{1/r}^{1} \frac{n_1(t, \infty)}{t} dt,$$
$$N_2(r, f) = N_2(r, \infty) = \int_{1}^{r} \frac{n_2(t, \infty)}{t} dt.$$

Kí hiệu

$$N_0\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = N_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N_2\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$$
$$N_0(r, f) = N_1(r, f) + N_2(r, f).$$

Hàm đặc trưng Nevanlinna $T_0(r, f)$ của f định nghĩa bởi

$$T_0(r, f) = m_0(r, f) - 2m(1, f) + N_0(r, f).$$

Mệnh đề 2.1 ([19])**.** *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên Δ. Khi đó với mỗi $r \in (1, R_0)$, ta có*

$$N_0\left(r, \frac{1}{f}\right) - N_0(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(r^{-1}e^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Mệnh đề 2.2 ([19])**.** *Cho f là một hàm phân hình trên Δ. Khi đó với mỗi $r \in (1, R_0)$*

$$T_0(r, f_1 + f_2) \leqslant T_0(r, f_1) + T_0(r, f_2) + O(1),$$
$$T_0(r, \frac{f_1}{f_2}) \leqslant T_0(r, f_1) + T_0(r, f_2) + O(1).$$

Cho $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một ánh xạ chỉnh hình, trong đó $f_0, \ldots, f_n$ là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung trong Δ. Với $1 < r < R_0$, hàm đặc trưng $T_f(r)$ của f được định nghĩa bởi

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \|f(r^{-1}e^{i\theta})\| d\theta,$$

trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \ldots, |f_n(z)|\}$. Khái niệm này là độc lập với mọi biểu diễn tối giản của f, sai khác một hằng số.

Cho D là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bậc d và Q là một đa thức thuần nhất bậc d xác định D. Hàm xấp xỉ của f định nghĩa bởi

$$m_f(r, D) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|Q \circ f(re^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^d}{|Q \circ f(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta.$$

Đặt $\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} : r^{-1} \leqslant |z| \leqslant r\}$. Gọi $n_f(r, D)$ là số các không điểm của $Q \circ f$ trong Δ_r, kể cả bội, và $n_f^M(r, D)$ là số các không điểm bội cắt cụt bởi M của $Q \circ f$ trong Δ_r. Gọi $n_f^M(r, D, \leqslant k)$ (tương ứng $n_f^M(r, D, > k)$) là số các không điểm có bội $\leqslant k$ (tương ứng $> k$) của

$Q \circ f$ trong Δ_r, bội cắt cụt bởi M. Hàm đếm tích phân định nghĩa bởi

$$N_f(r, D) = N_f(r, Q) = \int_{r^{-1}}^{r} \frac{n_f(t, D)}{t} dt;$$

$$N_f^M(r, D) = N_f^M(r, Q) = \int_{r^{-1}}^{r} \frac{n_f^M(t, D)}{t} dt;$$

$$N_f^M(r, Q, \leqslant k) = N_f^M(r, D, \leqslant k) = \int_{r^{-1}}^{r} \frac{n_f^M(t, D, \leqslant k)}{t} dt;$$

$$N_f^M(r, Q, > k) = N_f^M(r, D, > k) = \int_{r^{-1}}^{r} \frac{n_f^M(t, D, > k)}{t} dt.$$

Nhắc lại rằng các siêu phẳng $D_1, \ldots, D_q,\ q > n$, trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là ở vị trí tổng quát nếu với mỗi cách chọn các chỉ số phân biệt $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1, \ldots, q\}$,

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} \operatorname{supp}(Q_{i_k}) = \emptyset.$$

Cho $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình, định thức Wronskian của f được định nghĩa bởi

$$W = W(f) = W(f_0, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_0(z) & f_1(z) & \cdot & f_n(z) \\ f_0'(z) & f_1'(z) & \cdot & f_n'(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(n)}(z) & f_1^{(n)}(z) & \cdot & f_n^{(n)}(z) \end{vmatrix}.$$

Ta kí hiệu $N_W(r, 0)$ là hàm đếm các không điểm của $W(f_0, \ldots, f_n)$ trong Δ_r, tức là

$$N_W(r, 0) = N_0(r, \frac{1}{W}) + O(1).$$

Gọi $L_0, \ldots, L_n$ là các dạng độc lập tuyến tính của $z_0, \ldots, z_n$. Đối với $j = 0, \ldots, n$, đặt

$$F_j(z) = L_j(f(z)).$$

Theo tính chất của Wronskian, tồn tại các hằng số $C \neq 0$ sao cho

$$|W(F_0, \ldots, F_n)| = C|W(f_0, \ldots, f_n)|.$$

Năm 2015, H. T. Phương và N. V. Thìn ([22]) đã chứng minh định lý sau thường được gọi là định lý cơ bản thứ nhất

Định lý 2.3. *Cho H là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và*

$$f = (f_0 : \cdots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

là một đường cong chỉnh hình mà ảnh không chứa trong H. Khi đó, với mỗi $1 < r < R_0$ ta có

$$T_f(r) = m_f(r, H) + N_f(r, H) + O(1).$$

Mệnh đề 2.4 ([22])**.** *Cho $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong không suy biến tuyến tính và $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát. Khi đó ta có*

$$\| \quad \int_0^{2\pi} \max_K \sum_{j\in K} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|}{|(a_j, f)(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \max_K \sum_{j\in K} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|}{|(a_j, f)(r^{-1}e^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi}$$
$$\leqslant (n+1)T_f(r) - N_W(r, 0) + O_f(r),$$

trong đó

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{if } \; R_0 = +\infty \\ O(\log \dfrac{1}{R_0 - r} + \log T_f(r)) & \text{if } \; R_0 < +\infty, \end{cases}$$

ở đây maximum được lấy trên tất cả các tập con K của $\{1, \ldots, q\}$ sao cho a_j, $j \in K$, là độc lập tuyến tính.

Mệnh đề 2.5 ([22])**.** *Cho $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát. Gọi a_j là vectơ liên kết với H_j với mỗi $j = 1, \ldots, q$. Khi đó*

$$\sum_{j=1}^{q} m_f(r, H_j) \leqslant \int_0^{2\pi} \max_K \sum_{j\in K} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|}{|(a_j, f)(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi}$$
$$+ \int_0^{2\pi} \max_K \sum_{j\in K} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|}{|(a_j, f)(r^{-1}e^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} + O(1).$$

Định lý sau đây được gọi là định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.

Định lý 2.6 ([22]). *Cho $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát. Khi đó ta có*

$$\| \quad (q-n-1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_f^n(r, H_j) + O_f(r),$$

trong đó

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{if } R_0 = +\infty \\ O(\log \dfrac{1}{R_0 - r} + \log T_f(r)) & \text{if } R_0 < +\infty, \end{cases}$$

và kí hiệu "$\|$" trong bất đẳng thức trên nghĩa là trong trường hợp $R = +\infty$, bất đẳng thức đúng với mỗi $r \in (1, +\infty)$ nằm ngoài một tập Δ'_r thỏa mãn điều kiện $\int_{\Delta'_r} r^{\lambda-1} dr < \infty$, trong trường hợp $R = +\infty$, bất đẳng thức đúng với mỗi $r \in (1, R_0)$ nằm ngoài một tập con Δ'_r thỏa mãn $\int_{\Delta'_r} \dfrac{1}{(R_0 - r)^{\lambda+1}} dr < \infty$, trong đó $\lambda \geqslant 0$.

Năm 2018, Phuong và Vilaisavanh đã chứng minh

Mệnh đề 2.7 ([23]). *Cho D là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc d và $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình mà ảnh của nó không chứa trong D. Khi đó ta có với mỗi $1 < r < R$,*

$$m_f(r, D) + N_f(r, D) = dT_f(r) + O(1).$$

2.2. Định lý duy nhất

Cho D là một siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được định nghĩa bởi đa thức thuần nhất Q bậc d. Khi đó

$$Q(z_0, \ldots, z_n) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k z_0^{i_{k0}} \ldots z_n^{i_{kn}},$$

trong đó $i_{k0}+\cdots+i_{kn}=d$ với $k=0,\ldots,n_d$ và $n_d=\binom{n+d}{n}-1$. Ta kí hiệu $\mathbf{a}=(a_0,\ldots,a_{n_d})$ là vectơ liên kết với D (hoặc với Q).

Gọi $\mathcal{D}=\{D_1,\ldots,D_q\}$ là một họ các siêu mặt tùy ý bậc d và Q_j là một họ các đa thức thuần nhất trong $\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_n]$ bậc d định nghĩa D_j đối với $j=1,\ldots,q$. Họ các siêu mặt $\mathcal{D}$ được gọi là *ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese* nếu $q>n_d$ và đối với mỗi bộ phân biệt $i_1,\ldots,i_{n_{\mathcal{D}}+1}\in\{1,\ldots,q\}$, các vectơ $\mathbf{a}_{i_1},\ldots,\mathbf{a}_{i_{n_d+1}}$ là độc lập tuyến tính.

Cho h là một hàm phân hình, h được gọi là *hàm siêu việt* nếu

$$\limsup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{T_0(r,h)}{\log r}=\infty$$

trong trường hợp $R=\infty$ hoặc

$$\limsup_{r\longrightarrow R}\frac{T_0(r,h)}{-\log(R_0-r)}=\infty$$

trong trường hợp $R<+\infty$.

Cho $f:\Delta\longrightarrow\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình, ta kí hiệu

$$O_f(r)=\begin{cases}O(\log r+\log T_f(r)) & \text{nếu } R=+\infty\\ O(\log\dfrac{1}{R-r}+\log T_f(r)) & \text{nếu } R<+\infty\end{cases}$$

khi $r\longrightarrow R$. Đường cong chỉnh hình $f=(f_0:\cdots:f_n)$ được gọi là *đường cong siêu việt* nếu một trong các hàm $f_j, 0\leqslant j\leqslant n$ là một hàm siêu việt. Trong trường hợp này ta có $O_f(r)=o(T_f(r))$.

Cho D là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bậc d và Q là một đa thức thuần nhất bậc d của $n+1$ biến với các hệ số trong $\mathbb{C}$ xác định D, ta định nghĩa

$$\overline{E}_f(D):=\{z\in\Delta \mid Q\circ f(z)=0 \ \text{ bỏ qua bội }\};$$
$$E_f(D):=\{(z,m)\in\Delta\times\mathbb{N}\mid Q\circ f(z)=0 \ \text{ và } \operatorname{ord}_{Q\circ f}(z)=m\}.$$

Với $\mathcal{D}=\{D_1,\ldots,D_q\}$ là một họ các siêu mặt, ta định nghĩa

$$\overline{E}_f(\mathcal{D}):=\bigcup_{D\in\mathcal{D}}\overline{E}_f(D)\quad\text{and}\quad E_f(\mathcal{D}):=\bigcup_{D\in\mathcal{D}}E_f(D).$$

Định lý 2.8. *Cho f và g là các đường cong chỉnh hình siêu việt không suy biến tuyến tính từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm q $q \geqslant n_d + 1 + 2n_d^2/d$ các siêu mặt bậc d ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Khi đó $f \equiv g$.*

Chứng minh. Giả sử phản chứng rằng $f \not\equiv g$. Gọi k là một số nguyên dương đủ lớn, ta sẽ chọn sau, trước hết ta chứng minh rằng với $r : 1 < r < R$

$$\begin{aligned}\Big(q - \frac{qn_d}{k+1} - (n_d+1)\Big)T_f(r)&\\ \leqslant \frac{n_d^2 k}{d(k+1)}&(T_f(r) + T_g(r)) + O_f(r). \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Thật vậy, gọi $Q_j, 1 \leqslant j \leqslant q$, là các đa thức thuần nhất trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ bậc d xác định D_j. Hiển nhiên ta có thể giả thiết $q \geqslant n_d + 1$.

Kí hiệu $\varrho_{m_{\mathcal{D}}} : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^{n_d}(\mathbb{C})$ là phép nhúng *Veronese bậc $m_{\mathcal{D}}$*. Gọi $(w_0 : \cdots : w_{n_d})$ là các tọa độ thuần nhất trong $\mathbb{P}^{n_d}(\mathbb{C})$. Khi đó ϱ_d được cho bởi

$$\varrho_{m_{\mathcal{D}}}(\mathbf{z}) = (w_0(\mathbf{z}) : \cdots : w_{m_{\mathcal{D}}}(\mathbf{z})),$$

trong đó

$$w_j(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{I_j},\ j = 0, \dots, n_d.$$

Ta đặt $F = (F_0 : \cdots : F_{n_d}) = \varrho_{m_{\mathcal{D}}} \circ f$, khi đó $F_j = \mathbf{f}^{I_j}, j = 0, \dots, n_d$. Ta thấy F là một đường cong chỉnh hình từ Δ vào $\mathbb{P}^{n_d}(\mathbb{C})$ và $\mathbf{F} = (F_0, \dots, F_{n_d})$ là một biểu diễn tối giản của F. Từ giả thiết f không suy biến đại số ta suy ra F không suy biến tuyến tính.

Với mỗi siêu mặt $D_j \in \{D_1, \dots, D_q\}$, đặt $\mathbf{a}_j = (a_{j0}, \dots, a_{jn_d})$ là vectơ liên kết với D_j, ta đặt

$$L_j = a_{j0}w_0 + \cdots + a_{jn_d}w_{n_d}.$$

Khi đó L_j là một dạng tuyến tính trong $\mathbb{P}^{n_d}(\mathbb{C})$. Gọi H_j là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^{n_d}(\mathbb{C})$ được xác định bởi L_j. Như thế từ họ các siêu mặt $\{D_1, \dots, D_q\}$ trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ta có họ các siêu phẳng $\{H_1, \dots, H_q\}$ liên kết trong $\mathbb{P}^{n_d}(\mathbb{C})$. Từ giả thiết rằng $\{D_1, \dots, D_q\}$ ở phép vị trí tổng quát đối với nhúng Veronese $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ta suy ra $\{H_1, \dots, H_q\}$ ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^{n_d}(\mathbb{C})$. Áp dụng Định lí 2.6 cho ánh xạ $F : \Delta \to \mathbb{P}^{n_d}(\mathbb{C})$ và họ các siêu phẳng $H_j,\ j = 1, \dots, q$, ta có

$$\| \quad (q - n_d - 1)T_F(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_F^{n_d}(r, H_j) + O_F(r). \tag{1.2}$$

Bây giờ ta ước lượng các số hạng trong bất đẳng thức (1.2). Với mỗi $j = 1, \dots, q$ ta có

$$H_j \circ F = \mathbf{a}_j.\mathbf{F} := \sum_{k=0}^{n_d} a_{jk}.F_k = Q_j \circ f.$$

Do đó

$$N_f(r, Q_j) = N_F(r, H_j); \quad N_f^{n_d}(r, Q_j) = N_F^{n_d}(r, H_j). \tag{1.3}$$

Hơn nữa, từ định nghĩa ánh xạ F ta có

$$\begin{aligned} m_f(r, Q_j) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|Q_j \circ f(re^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^d}{|Q_j \circ f(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{\|F(re^{i\theta})\|}{|H_j \circ F(re^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{\|F(r^{-1}e^{i\theta})\|}{|H_j \circ F(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta \\ &\quad + O(1) \\ &= m_F(r, H_j) + O(1). \end{aligned}$$

Kết hợp với (1.3) và Mệnh đề 2.7 ta có

$$T_F(r) = dT_f(r) + O(1) \quad \text{and} \quad O_F(r) = O_f(r). \tag{1.4}$$

Kết hợp (1.2), (1.3) và (1.4) ta có

$$\| \quad (q - n_d - 1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d} N_f^{n_d}(r, Q_j) + O_f(r). \tag{1.5}$$

Với mỗi $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, với mọi $r : 1 < r < R$, theo Mệnh đề 2.7 ta có

$$\begin{aligned}
N_f^{n_d}(r, Q_j) &= N_f^{n_d}(r, Q_j, \leqslant k) + N_f^{n_d}(r, Q_j, > k) \\
&= \frac{k}{k+1} N_f^{n_d}(r, Q_j, \leqslant k) + \frac{1}{k+1} N_f^{n_d}(r, Q_j, \leqslant k) \\
&\quad + N_f^{n_d}(r, Q_j, > k) \\
&\leqslant \frac{k}{k+1} N_f^{n_d}(r, Q_j, \leqslant k) + \frac{n_d}{k+1} N_f^{1}(r, Q_j, \leqslant k) \\
&\quad + n_d N_f^{1}(r, Q_j, > k) \\
&\leqslant \frac{k}{k+1} N_f^{n_d}(r, Q_j, \leqslant k) + \frac{n_d}{k+1} N_f(r, Q_j, \leqslant k) \\
&\quad + \frac{n_d}{k+1} N_f(r, Q_j, > k) \\
&\leqslant \frac{k}{k+1} N_f^{n_d}(r, Q_j, \leqslant k) + \frac{n_d}{k+1} N_f(r, Q_j) \\
&\leqslant \frac{k}{k+1} N_f^{n_d}(r, Q_j, \leqslant k) + \frac{dn_d}{k+1} T_f(r) + O(1),
\end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{1}{d} N_f^{n_d}(r, Q_j) \leqslant \frac{k}{d(k+1)} N_f^{n_d}(r, Q_j, \leqslant k) + \frac{n_d}{k+1} T_f(r) + O(1).$$

Lấy tổng trên tất cả $j = 1, 2, \dots, q$, ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d} N_f^{n_d}(r, Q_j) \\
&\qquad \leqslant \frac{k}{k+1} \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d} N_f^{n_d}(r, Q_j, \leqslant k) + \frac{qn_d}{k+1} T_f(r) + O(1). \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Áp dụng (1.6) vào (1.5), ta có

$$\begin{aligned}
&(q-n_d-1)T_f(r)\\
&\quad\leqslant \frac{k}{k+1}\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{d}N_f^{n_d}(r,Q_j,\leqslant k)+\frac{qn_d}{k+1}T_f(r)+O_f(r)\\
&\quad\leqslant \frac{k}{d(k+1)}\sum_{j=1}^{q}N_f^{n_d}(r,Q_j,\leqslant k)+\frac{qn_d}{k+1}T_f(r)+O_f(r)\\
&\quad\leqslant \frac{k}{d(k+1)}\sum_{j=1}^{q}N_f^{n_d}(r,Q_j,\leqslant k)+\frac{qn_d}{k+1}T_f(r)+O_f(r).
\end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$\Big(q-\frac{qn_d}{k+1}-n_d-1\Big)T_f(r)\leqslant \frac{k}{d(k+1)}\sum_{j=1}^{q}N_f^{n_d}(r,Q_j,\leqslant k)+O_f(r).$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\big(q(k+1-n_d)-(n_d+1)(k+1)\big)T_f(r)\\
&\qquad\leqslant \frac{k}{d}\sum_{j=1}^{q}N_f^{n_d}(r,Q_j,\leqslant k)+(k+1)O_f(r)\\
&\qquad\leqslant \frac{n_dk}{d}\sum_{j=1}^{q}N_f^{1}(r,Q_j,\leqslant k)+(k+1)O_f(r). \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Do $f\not\equiv g$ nên tồn tại hai số $\nu,\mu\in\{0,\dots,n\}$, $\nu\neq\mu$ thỏa mãn $f_\nu g_\mu\not\equiv f_\mu g_\nu$. Giả sử rằng $z_0\in\Delta$ là một không điểm của $Q_j\circ f$ với bội nhỏ hơn hay bằng k, khi đó z_0 là một không điểm của $Q_j\circ f$ vì $Q_j=Q_j^{m_{\mathcal{D}}/d_j}$, do đó $z_0\in\overline{E}_f(\mathcal{D})\cup\overline{E}_g(\mathcal{D})$. Điều này kéo theo $g(z_0)=f(z_0)$, do đó

$$\frac{f_\nu(z_0)}{f_\mu(z_0)}=\frac{g_\nu(z_0)}{g_\mu(z_0)},$$

điều này kéo theo

$$f_\nu(z_0)g_\mu(z_0)=f_\mu(z_0)g_\nu(z_0)$$

vì $f_\nu, g_\nu, f_\mu, g_\mu$ là các hàm chỉnh hình. Điều này kéo theo z_0 là một không điểm của hàm $f_\nu g_\mu - f_\mu g_\nu$. Chú ý rằng theo giả thiết $\mathcal{D}$ ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese nên tồn tại nhiều nhất n_d siêu mặt D_j trong họ $\mathcal{D}$ thỏa mãn $D_j \circ f(z_0) = 0$. Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, Q_j, \leqslant k) &\leqslant n_d N_0\Big(r, \frac{1}{f_\nu g_\mu - f_\mu g_\nu}\Big)\\ &\leqslant n_d(T_f(r) + T_g(r)) + O(1)\end{aligned}$$

theo tính chất của N_0. Bởi vậy từ (1.7) ta có

$$\begin{aligned}&\big(q(k+1-n_d) - (n_d+1)(k+1)\big)T_f(r)\\ &\qquad\leqslant \frac{n_d^2 k}{d}(T_f(r) + T_g(r)) + (k+1)O_f(r).\end{aligned}$$

Từ đó (1.1) được chứng minh.

Tương tự cho ánh xạ g ta có

$$\begin{aligned}&\big(q(k+1-n_d) - (n_d+1)(k+1)\big)T_g(r)\\ &\qquad\leqslant \frac{n_d^2 k}{m_{\mathcal{D}}}(T_f(r) + T_g(r)) + (k+1)O_g(r).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Kết hợp với các bất đẳng thức (1.1) và (1.8), ta có

$$\begin{aligned}&\big(q(k+1-n_d) - (n_d+1)(k+1)\big)(T_f(r) + T_g(r))\\ &\qquad\leqslant \frac{2n_d^2 k}{d}(T_f(r) + T_g(r)) + (k+1)(O_f(r) + O_g(r)).\end{aligned}$$

Điều này kéo theo

$$q(k+1-n_d) - (n_d+1)(k+1) - \frac{2n_d^2 k}{d} \leqslant \frac{O_f(r) + O_g(r)}{T_f(r) + T_g(r)}(k+1)$$

đúng với mọi $1 < r < R$. Chú ý rằng, từ giả thiết của $O_f(r)$ và $O_g(r)$, ta có

$$\limsup_{r \longrightarrow R} \frac{O_f(r) + O_g(r)}{T_f(r) + T_g(r)} = 0.$$

Cho $r \longrightarrow R$, ta có

$$q(k+1-n_d) - (n_d+1)(k+1) - \frac{2n_d^2 k}{d} \leqslant 0.$$

Điều này kéo theo

$$k(qd-(n_d+1)d-2n_d^2)+(q-qn_d-(n_d+1))d\leqslant 0.$$

Nếu ta lấy

$$k>\frac{(qn_d-q+n_d+1)d}{qd-(n_d+1)d-2n_d^2},$$

thì từ giả thiết $q\geqslant n_d+1+\dfrac{2n_d^2}{d}$ ta có mẫu thuẫn. Như vậy $f_ig_j\equiv f_jg_i$ với mọi $i\neq j\in\{0,\ldots,n\}$, tức là $f\equiv g$. Điều này kéo theo kết luận của định lí. $\square$

Kết luận

Trong đề tài này chúng tôi đã đạt được một số kết quả

- Chứng minh được một tiêu chuẩn chuẩn tắc cho một họ các hàm phân hình (Định lý 1.10);

- Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Bruck (Định lý 1.11);

- Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất liên quan đến đa thức vi phân của các hàm phân hình trên trường $p-$adic (Định lý 1.30);

- Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese (Định lý 2.8).

Trong thời gian tới chúng tôi tiếp phát triển lý thuyết Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên: chứng minh các kết quả về các dạng định lý cơ bản thứ hai cho trường hợp siêu mặt và tiếp tục nghiên cứu một số dạng định lý duy nhất cho các hàm phân hình và đường cong chỉnh hình trong các trường hợp khác nhau.

Tài liệu tham khảo

[1] BRÜCK, R., (1996), "On entire functions which share one value CM with their first derivatives", *Results Math.*, 30, pp 21-24.

[2] CHUANG, C. T., (1987), "On differential polynomials," *Analysis of One Complex Variable, World Sci. Publishing, Singapore*, pp 12-32.

[3] CLUNIE, J.–HAYMAN, W. K., (1966), "The spherical derivative of integral and meromorphic functions", *Commentarii Mathematici Helvetici.*, 40, pp 117-148.

[4] CHEN, Z. Y., YAN, Q. M., (2010), "A note on uniqueness problem for meromorphic mappings with $2N + 3$ hyperplanes", *Sci. China Math.*, 53, No. 10, pp 2657-2663.

[5] CHEN, Z. X.– SHON, K. H., (2004), "On conjecture of R. Brück concerning the entire function sharing one value CM with its derivative," *Taiwan. J. Math.*, 8, pp 235-244.

[6] DETHLOFF, G.–TAN, T. V.–THIN, N.V., (2014), "Normal criteria for families of meromorphic functions", *J. Math. Anal. Appl.*, 411, pp 675-683.

[7] FUJIMOTO, H., (1975), "The Uniqueness problem of meromorphic maps into complex projective space", *I, Nagoya Math. J.*, 58, pp 1-23.

[8] GUNDERSEN, G. G.–YANG, L. Z., (1998), "Entire functions that share one value with one or two of their derivatives" *J. Math. Anal. Appl.*, 223, pp 88-95.

[9] HAYMAN, W. K., (1964), *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford.

[10] HINCHLIFFE, J. D., (2002), "On a result of Chuang related to Hayman's Alternative,", *Comput. Method. Funct. Theory.* 2, pp 293-297.

[11] HENNEKEMPER, W., (1981), "Über die wertverteilung von $(f^{k+1})^{k}$" *Math. Z.* 177, pp 375-380.

[12] LAINE, I., (1993), *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations,* Walter de Gruyter, Berlin, New York.

[13] SCHWICK, W., (1989), "Normality criteria for normal families of meromorphic function", *J. Anal. Math.* 52, pp 241-289.

[14] ZALCMAN, L., (1998), "Normal families: New perspective," *Bull. Amer. Mat. Soc.* 35, pp 215-230.

[15] ZHANG, X. B.– XU, J. F. –YI, H. X. (2011), "Normality criteria of Lahiri's type and their applications", *Journal of Inequalities and Applications.* Article ID 873184, 16 page.

[16] YANG, L. Z.–ZHANG, J. L., (2008), "Non-existence of meromorphic solutions of a Fermat type functional equation", *Aequationes Mathematicae.* 76, pp 140-150.

[17] KHOAI, H. H., AN, V. H., (2012), "Value sharing problem for p-adic meromorphic function and difference polynomials", *Ucrianian. J. Math.* 64, Issue 2, pp 163-185.

[18] KHOAI, H. H., AN, V. H., (2011), "Value distribution problem for $p-$adic meromorphic function and theire derivatives", *Ann. Toulouse Math.,* 20, Issue 82, pp 137-151.

[19] Khrystiyanyn, A. Y., Kondratyuk, A. A., (2004), "On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on Annulus I", *Matematychni Studii,* Vol. 23, No. 1, pp 19-30.

[20] Halburd, R. G. , Korhonen, R. J., (2006), "Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with difference equations", *J. Math. Anal. Appl.*, 314, pp 477-487.

[21] Laine, I., Yang, C. C., (2007), "Value distribution of difference polynomial", *Proceedings of the Japan Academic. Series A* 83, no 8, pp 148-151.

[22] Phuong, H. T., Thin, N. V., (2015) "On fundamental theorems for holomorphic curves on Annuli", *Ucrainian Math. Jour.*, Vol. 67, No. 07, pp 1027-1040.

[23] Phuong, H. T., Vilaisavanh, L., (2018), "On fundamental theorems for curves holomorphic on the annuli intersecting hypersurfaces", preprint.

[24] Phuong, H. T.,, (2013), "Uniqueness theorems for holomorphic curves sharing moving hypersurfaces", *Complex variables and Elliptic Equations,* Vol. 58, No. 11, pp 1481-1491.

[25] Ru, M., (2001), "A uniqueness theorem with moving targets without counting multiplicity", *Proc. Am. Math. Soc.* Vol. 129, pp 2701-2707.

[26] Yang, C. C, Hua, X. H., (1997), "Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 22, pp 395-406.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Mã số:

THUYẾT MINH ĐỀ TÀI

KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

Tên đề tài:

ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT PHÂN BỐ GIÁ TRỊ TRONG NGHIÊN CỨU VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO HÀM PHÂN HÌNH VÀ ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

Chủ nhiệm đề tài:	PGS. TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG
Tổ chức chủ trì:	ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Thời gian thực hiện:	Từ 1/2017 đến 31/12/2018

Thái Nguyên, tháng 9/2016

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

THUYẾT MINH ĐỀ TÀI
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

1. TÊN ĐỀ TÀI: **Ứng dụng của lý thuyết phân bố giá trị trong nghiên cứu vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình**	**2. MÃ SỐ** B2017 - TNA - 41
3. LĨNH VỰC NGHIÊN CỨU Khoa học Tự nhiên [X] Khoa học Kỹ thuật và Công nghệ [ ] Khoa học Y, dược [ ] Khoa học Nông nghiệp [ ] Khoa học Xã hội [ ] Khoa học Nhân văn [ ]	**4. LOẠI HÌNH NGHIÊN CỨU** Cơ bản [X] Ứng dụng [ ] Triển Khai [ ]

5. THỜI GIAN THỰC HIỆN **24 tháng**

Từ tháng … năm ... đến tháng … năm ...

6. TỔ CHỨC CHỦ TRÌ ĐỀ TÀI

Tên tổ chức chủ trì: ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Điện thoại: +84 (0)2803 654096
E-mail: banqlkh.dhtn@moet.edu.vn
Địa chỉ: Phường Tân Thịnh, Thành phố Thái Nguyên
Họ và tên thủ trưởng tổ chức chủ trì: GS.TS. Đặng Kim Vui

7. CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Họ và tên: Hà Trần Phương
Học vị: Tiến sĩ
Chức danh khoa học: Phó Giáo sư
Năm sinh: 1971
Địa chỉ cơ quan: Phương Quang Trung, TP Thái Nguyên
Điện thoại di động: 0913546296
Fax:
Điện thoại cơ quan: (0280)3750688
E-mail: hatranphuong@yahoo.com

8. NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao	Chữ ký
1	PGS. TS. Hà Trần Phương	Trường ĐHSP- ĐH Thái nguyên, Toán Giải tích	Nghiên cứu một số dạng định lý cơ bản thứ hai, vấn đề duy nhất cho hàm, đường cong	………
2	TS. Trần Huệ Minh	Trường ĐHSP – ĐH Thái nguyên, Hình học - Tô pô	Nghiên cứu vấn đề duy nhất cho đường cong	………
3	TS. Đoàn Quang Mạnh	Trường Đại học Hải phòng, Đại số và lý thuyết số	Nghiên cứu vấn đề duy nhất cho hàm phân hình	………
4	ThS. NCS Lê Quang Ninh	Trường ĐHSP – ĐH Thái nguyên, Toán Giải tích	Nghiên cứu vấn đề duy nhất cho hàm phân hình	………
5	TS. Nguyễn Hữu Quân	Trường ĐHSP-ĐH Thái Nguyên, TS. Giáo dục học	Thư ký đề tài	………

9. ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị
- Phòng Giải tích - Viện Toán học - Phòng Lý thuyết số - Viện Toán học	Cung cấp tài liệu, phương tiện nghiên cứu.	GS. TSKH Nguyễn Xuân Tấn PGS.TSKH Tạ Thị Hoài An

10. TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU THUỘC LĨNH VỰC CỦA ĐỀ TÀI Ở TRONG VÀ NGOÀI NƯỚC

10.1. Trong nước *(phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài ở Việt Nam, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)*

Lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna hay Nevanlinna-Cartan được đánh giá là một trong những thành tựu đẹp đẽ của giải tích phức trong thời gian gần đây. Được khởi nguồn từ những năm đầu của thế kỷ 20 bằng những công trình của R. Nevanlinna, H. Cartan, Lý thuyết đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước, thu được nhiều kết quả quan trọng và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học: lý thuyết tập duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình, lý thuyết hệ động lực, phương trình vi phân phức,....

Kí hiệu $\boldsymbol{K}$ là một trường đóng đại số, có đặc số không, đầy đủ (với chuẩn Acsimet hoặc không Acsimet). Mục đích chính của lý thuyết là nghiên cứu tính chất của hàm phân hình hay đường cong chỉnh hình từ một miền của $\boldsymbol{K}$ vào $\boldsymbol{K}$ hoặc một đa tạp đại số xạ ảnh trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n(\boldsymbol{K})$ thông qua việc nghiên cứu ba hàm: hàm đếm, hàm xấp xỉ và hàm đặc trưng. Trung tâm của lý thuyết bao gồm hai định lý cơ bản: định lý cơ bản thứ nhất và định lý cơ bản thứ hai, trong đó định lý cơ bản thứ hai được viết dưới nhiều dạng khác nhau và có nhiều ứng dụng quan trọng. Những công trình theo hướng này được công bố bởi nhiều tác giả trong nước. Chẳng hạn, năm 2007, H. T. Phương và M. V. Tư đã chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong suy biến vào đa tạp tuyến tính, năm 2008, Đ. Đ. Thai và S. Đ. Quang đã xây dựng một dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình với mục tiêu di động. Năm 2009, T. T. H. An và H. T. Phương đã chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình với chỉ số bội cắt cụt được chỉ ra một cách tường minh. Định lý này có ứng dụng mạnh trong việc nghiên cứu tính duy nhất của đường cong. Năm 2011, G. Dethloff, T. V. Tấn và Đ. Đ Thái đã chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai kiểu Nochka cho trường hợp siêu mặt. Năm 2015, T. V. Tấn và V. V. Trường đã đưa ra một dạng tổng quát cho Định lý cơ bản thứ hai. Năm 2015, H. T. Phương và N. V. Thìn đã chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên. Ngoài ra, còn nhiều công trình theo hướng nghiên cứu này của các tác giả: T. V. Tấn, Đ. Đ. Thái, S. Đ. Quang , V. H. An, T. Đ. Đức, M. V. Tư, ...

Một trong những ứng dụng quan trọng của lý thuyết phân bố giá trị là nghiên cứu vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình: năm 2009, H. T. Phương đã chứng minh một số điều kiện đại số về tập duy nhất cho đường cong chỉnh hình ở vị trí tổng quát; năm 2011 tác giả này đã xem xét vấn đề tương tự cho các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese với mục tiêu cố định và năm 2012, tác giả đã xem xét vấn đề tương tự cho mục tiêu di động. Năm 2013, H. T. Phương và T. H. Minh đã chứng minh một định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình gồm $2n+3$ siêu phẳng, năm 2014, N. V. Thìn và H. T. Phương đã chứng minh một số kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình chung nhau một giá trị hay hàm nhỏ. Ngoài ra, nhiều tác giả khác cũng nghiên cứu vấn đề tương tự, đó là các công trình của H. H. Khoái, D. D. Thái, T. T. H. An, T. V. Tấn, V. H. An, T. Đ. Đức, ...

Có thể nói, vấn đề "*Ứng dụng của lý thuyết phân bố giá trị trong nghiên cứu vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình*" đang thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trong nước. Các công trình của các tác giả nói trên phần lớn được công bố trên các tạp chí có uy tín trên thế giới, một số công trình được công bố trên 2 tạp chí chuyên ngành toán Việt Nam: Acta Math. Vietnamica và Vietnam Journal of Math.

10.2. Ngoài nước *(phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài trên thế giới, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)*

Cũng giống như phần đánh giá các công trình trong nước, hiện nay hướng việc nghiên cứu nghiên cứu về phân bố giá trị hàm phân hình và cho đường cong chỉnh hình cũng thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Những công trình theo hướng này được công bố bởi: M. Ru, G. Dethloft, T.J. Wang, W. Cherry, Z.Ye, R. G. Halburd, R. J. Korhonen và nhiều tác giả khác.

Đối với vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình và đường cong chỉnh hình: ăm 1926, R.Nevanlinna chứng minh định lý năm điểm về sự xác định duy nhất của các hàm phân hình: hai hàm phân hình khác hằng f, g bằng nhau tại năm điểm phân biệt thì $f = g$. Về sau có rất nhiều tác giả mở rộng định lý cho các trường hợp khác nhau: cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình với những điều kiện đại số khác nhau về tính bội, không kể bội, bội chặn,... và đã thu được nhiều kết quả đáng kể. Những công trình theo hướng này gắn với tên của nhiều nhà toán học trên thế giới chẳng hạn: H. Fujimoto, M. Ru, M. Dulock, G. Dethloft, T. J. Wang, A. Banerjee và nhiều tác giả khác.

Một số công trình tiêu biểu của các tác giả trên trong nước liên quan đến hướng nghiên cứu:

1. A. Banerjee, *Meromorphic functions sharing one value*, Int. J. Math. Math. Sci, 22, 3587-3598, 2005.
2. A. Banerjee, *On the uniqueness of meromorphic functions that share two sets*, Georgian Mathematical Journal, Volume 15, No 1, 21-38, 2008.
3. K. Boussaf, A. Escassut and J. Ojeda, *Complex meromorphic functions $f'P'(f)S$, $Sg'P'(g)$ sharing a small function*, Indagationes Mathematicae, 2013, 24, 15-41.
4. T. B. Cao and Z. S. Deng, *On the uniqueness of meromorphic functions that share three or two finite sets on annuli*, Proc Indian Acad Sci (Math Sci) 2012, 122, No 2: 203-220.
5. H. Cartan, *Sur les zeros des combinaisions linearires de p-fonctions holomorpes donnees, Mathematica* (Cluj). 7 (1933), 80-103.
6. W. Cherry and Z.Ye, *Non-Archimedean Nevanlinna Theory in several variables and the Non-Archimedean Nevanlinna inverse problem*, Tran. Amer. Math. Soc., 349(12), pp. 5043-5071, 1997.
7. Y. M. Chiang and S. J. Feng, *On the nevanlinna characteristic of $f(z+\varsigma)$ and difference equations in the complex plane*, Ramanujan Journal, Vol 16, No 1, Pp 105-129, 2008.
8. G. Dethloff and T.V. Tan, *A uniqueness theorem for meromorphic maps with moving hypersurfaces*, Publ. Math. Debrecen 78 (2011), 347-357.
9. M. Dulock and M. Ru, *A uniqueness theorem for holomorphic curves sharing hypersurfaces*, Complex Variables and Elliptic Equations. 53, No. 8 (2008), 797-802.
10. R. G. Halburd and R. J. Korhonen, *Nevanlinna theory for difference operator*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math, 3, 463-478, 2006.

11. P.C. Hu and C.C Yang, *Meromorphic Functions over Non-Archimedean Fields*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
12. H. H. Khoai and M. V. Tu, *P-adic Nevanlinna Cartan theorem, Inter. J. Math.*, 6 (5) pp 719-731, 1995.
13. K. Liu, X. Liu and T. B. Cao, *Value distributions and uniqueness of difference polynomials*, Advances in Difference Equations, volume 2011, pp 1-12, 2011.
14. S. H. Lin and W. C. Lin, *Uniqueness of meromorphic functions concerning weakly weighted sharing*, Kodai Math. J, 29, pp 269-280, 2006.
15. M. Ru, *A defect relation for holomorphic curves intersecting hypersurfaces*, Amer. Journal of Math. 126, 215-226 (2004).
16. M. Ru, *A note on p-adic nevanlinna theory*, Proc.Amer.Math.Soc. 129, 1263-1269, 2001.
17. M. Ru, *On a general form of the second main theorem*, Trans.Amer.Math.Soc. 349, 5093-5105 (1997).
18. L. Smiley, *Geometric conditions for unicity of holomorphic curves*, Contemp. Math., 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
19. Y. Tan and Q. Zang, *On fundamental theorems of algebroid functions on Annuli,}* Turkish Journal of Mathematics, 2014 (accepted).
20. D. D. Thai and S. D. Quang, *Second main theorem with truncated counting function in several complex variables for moving targets*, Forum Math. 20 (2008), 163-179.
21. C. C. Yang and X. Hua, *Uniqueness and value sharing of meromorphic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math, 22, 395-406, 1997.
22. C. C. Yang and X. Hua, *Uniqueness and value sharing of meromorphic functions*, Ann. acad. sci. fenn. math, 22, 395-406, 1997.
23. H. X. Yi, *Meromorphic functions that share one or two values*, Complex variables theory appl. 28, 1-11, 1995.
24. L. Wang and X. Luo, *Uniqueness of meromorphic functions concerning fixed points*, Math. Slovaca, 2012, 62(1), 29-38.

10.3. Danh mục các công trình đã công bố thuộc lĩnh vực của đề tài của chủ nhiệm và những thành viên tham gia nghiên cứu (*họ và tên tác giả; bài báo; ấn phẩm; các yếu tố về xuất bản*)

a) Của chủ nhiệm đề tài

1. T. T. H. An and H. T. Phuong, *An explicit estimate on multiplicity truncation in the second main theorem for holomorphic curves encountering hypersurfaces in general position in projective space, Houston Journal of Mathematics*, Volume 35, N. 3, p. 774-786, 2009.
2. H. T. Phuong, *On Truncated Defect relation for Non-Archimedean analytic curves intersecting hypersurfaces*, East-West J. of Mathematics, Vol 8, no 2, 129-141, 2006.
3. H. T. Phương, P. T. T. Mai, *Tính đủ tổng quát của đa thức duy nhất*. Tạp chí khoa học và công nghệ ĐHTN, 2006, vol 2 (38).
4. H. T. Phuong and M. V. Tu, *On defect and truncated defect relations for holomorphic curves into linear subspaces*, East-West J. of Mathematics, Vol 9, no 1, 39-46, 2007.
5. H. T. Phuong, On *unique range sets for holomorphic maps sharing hypersurfaces without counting multiplicity*, Acta Math. Vietnamica, Volume 34, N 3, 351-360, 2009.
6. H.T. Phương và P. T. T Mai, *Một số vấn đề về tính Hyperbolic của đường cong đại số*, Tạp chí KH&CN ĐHTN, 2010.
7. H. T. Phuong, *On Uniqueness theorems for holomorphic curves sharing hypersurfaces without counting multiplicity*, Ukrainian Math. Journal, Vol 63, No 4, pp: 556-565, 2011.

8. H. T. Phuong, *Uniqueness theorems for holomorphic curves sharing moving hypersurfaces*, Complex Variables and Elliptic Equation, Vol 58, No 11, pp 1481-1491, 2013.
9. H. T. Phuong and L. Q. Ninh, *A note of Uniqueness theorem for Holormophic curves sharing many Hypersurfaces*, ThaiNguyen Journal of Science and Technology, 128 (14), 189-197, 2014.
10. H. T. Phuong, N. V. Thin, *On fundamental theorems for holomorphic curves on Annuli*, Ucrainian Jour. of Math., Vol. 67, No . 07, pp 1027-1040, 2015.
11. N. V. Thin and H. T. Phuong, *Uniqueness of meromorphic functions sharing a value or small function*, To appear in Math. Slovaca (2014).

b) Của các thành viên tham gia nghiên cứu

(Những công trình được công bố trong 5 năm gần nhất)

1. V. H. An and L. Q. Ninh, *Uniqueness polynomials for linearly non-degenerate holomorphic curves*, International Advisory Board of the 20th International Iconference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2012.
2. H. H. Khoai, V. H. An and L. Q. Ninh, *Uniqueness Theorems for Holomorphic Curves with Hypersurfaces of Fermat-Waring Type,* Complex Analysis and Operator, 2014.
3. L. Q. Ninh, *Hayman conjecture for p-adic meromorphic functions*, Tạp chí Khoa học & Công nghệ Đại học Thái Nguyên, 2010.
4. L. Q. Ninh (2015). "*Uniqueness polynomials for linearly non-degenerate p-adic holomorphic curves*". Tạp chí Khoa học & Công nghệ Đại học Thái Nguyên năm 2015.
5. V. H. An and L. Q. Ninh. "*On functional equations of Fermat-Waring Type for non-*Archimedean vectorial entire functions". Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2015.
6. H. T. Phuong and T. H. Minh, *On Uniqueness Theorem for Holomorphic Curves on Annulus Sharing 2n+3 Hyperplanes*, Vietnam Journal of Math., Vol 41, No 2, pp 167-179, 2013.

11. TÍNH CẤP THIẾT CỦA ĐỀ TÀI

Việc nghiên cứu ứng dụng của lý thuyết phân bố giá trị trong nghiên cứu vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình và đường cong chỉnh hình, đặc biệt là nghiên cứu các dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt thực sự là cần thiết. Hiện nay, vấn đề phát triển lý thuyết Nevanlinna - Cartan và lý thuyết tập duy nhất đã và đang được quan tâm mạnh mẽ, gắn liền với các công trình của rất nhiều nhà toán học trong và ngoài nước: R. Nevanlinna, H.Cartan, M. Ru, P.Vojta, D. D.Thai, W.Cherry, H.H.Khoai, G.Dethloff, P.M.Wong, A. Boutabaa, T. V. Tan, T. T. H. An, I. Lahiri, Q. Han – H. X. Yi, W. Bergweiler, J. K. Langley, K. Liu, L. Z. Yang, L. C. Hong, M. L. Fang, B. Q. Li, P. C. Hu - C.C.Yang, A. Eremenko, G. Frank - X. Hua – R. Vaillancourt .... và nhiều nhà toán học khác.

Việc tiếp tục nghiên cứu ứng dụng của lý thuyết phân bố giá trị trong nghiên cứu vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình và đường cong chỉnh hình là động lực quan trọng cho sự phát triển của một nhóm nghiên cứu cơ bản về giải tích phức tại Thái Nguyên, hơn nữa việc nghiên cứu này còn thúc đẩy việc đào tạo sau đại học ở các trường đại học nói chung và Đại học Thái Nguyên nói riêng.

12. MỤC TIÊU ĐỀ TÀI

1. Nghiên cứu một số dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên đĩa thủng trong trường hợp mục tiêu là các siêu mặt .

2. Nghiên cứu sự xác định duy nhất một hàm phân hình hoặc đường cong thông qua ảnh ngược của một tập hữu hạn các điểm hoặc các siêu mặt trong các trường hợp phức và p-adic.

13. ĐỐI TƯỢNG, PHẠM VI NGHIÊN CỨU

13.1. Đối tượng nghiên cứu

- Các hàm phân hình và đường cong chỉnh hình
- Các định lý cơ bản, các điều kiện đủ xác định duy nhất hàm và ánh xạ

13.2. Phạm vi nghiên cứu

- Lý thuyết Nevanlinna và Nevanlinna – Cartan;
- Một số kết quả và kỹ thuật của hình học đại số và lý thuyết số;
- Lý thuyết tập xác định duy nhất cho các hàm phân hình và đường cong chỉnh hình phức.

14. CÁCH TIẾP CẬN, PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

14.1. Cách tiếp cận

- Đọc các bài báo để xem xét tình hình nghiên cứu vấn đề đó trên thế giới;
- Đọc tài liệu nghiên cứu kỹ thuật;
- Tính toán khoa học và viết bài;
- Đăng tải các bài báo trên các tạp chí khoa học

14.2. Phương pháp nghiên cứu: nghiên cứu cơ bản

15. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU VÀ TIẾN ĐỘ THỰC HIỆN

15.1. Nội dung nghiên cứu (***Mô tả chi tiết những nội dung nghiên cứu của đề tài***)

Phần 1. Phát triển lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna: Xây dựng một dạng định lý thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu mặt. Cụ thể chứng minh một bất đẳng thức về quan hệ giữa hàm đặc trưng $T_f(r)$ của một đường cong chỉnh hình $f:\Delta \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, với các hàm đếm bội cắt cụt của f kết hợp với siêu mặt ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, trong đó Δ là một hình vành khăn trong $\mathbb{C}$.

Phần 2. Chứng minh một số kết quả mới về vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình. Cụ thể là đưa ra một số điều kiện đại số mới để hai hàm phân hình hoặc đường cong chỉnh hình f, g thỏa mãn điều kiện này thì trùng nhau.

15.2. Tiến độ thực hiện

STT	Các nội dung, công việc thực hiện	Sản phẩm	Thời gian (bắt đầu-kết thúc)	Người thực hiện
1	Xây dựng thuyết minh chi tiết và báo cáo tổng thuật của đề tài	Báo cáo	1-3/2017	Hà Trần Phương
2	Xây dựng một dạng định lý cơ bản cho đường cong chỉnh hình và chứng minh một số kết quả vấn đề duy nhất. Cụ thể chứng minh một bất đẳng thức về quan hệ giữa hàm đặc trưng $T_f(r)$ của một đường cong chỉnh hình $f:\Delta \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, với các hàm đếm bội cắt cụt của f kết hợp với siêu mặt ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.	1 bài báo khoa học	4-12/2017	Hà Trần Phương Trần Huệ Minh

3	Chứng minh một số kết quả về vấn đề duy nhất cho hàm phân hình. Cụ thể là đưa ra một số điều kiện đại số mới để hai hàm phân hình hoặc đường cong chỉnh hình f, g thỏa mãn điều kiện này thì trùng nhau.	1 bài báo khoa học	1-6/2018	Lê Quang Ninh Đoàn Quang Mạnh
4	Viết báo cáo khoa học tổng kết của đề tài	Báo cáo	6-12/2018	Hà Trần Phương
5	Tổ chức Seminar khoa học để báo cáo các kết quả nghiên cứu	Biên bản Seminar	4/2018	Các thành viên của đề tài.

16. SẢN PHẨM

Stt	Tên sản phẩm	Số lượng	Yêu cầu chất lượng sản phẩm *(mô tả chi tiết chất lượng sản phẩm đạt được như nội dung, hình thức, các chỉ tiêu, thông số kỹ thuật,...)*
I	Sản phẩm khoa học (Các công trình khoa học sẽ được công bố: sách, bài báo khoa học...)		
1.1	Bài báo đăng ở tạp chí nước ngoài	1	Đăng tải trên các tạp chí quốc tế (ISI)
1.2	Bài báo đăng ở tạp chí trong nước	1	Đăng tải trên tạp chí KH&CN Đại học Thái Nguyên
...			
II	Sản phẩm đào tạo (Cử nhân, Thạc sỹ, Tiến sỹ,...)		
2.1	Thạc sĩ	2	Bảo vệ thành công.
2.2			
...			
III	Sản phẩm ứng dụng		
3.1			
3.2			
...			

17. PHƯƠNG THỨC CHUYỂN GIAO KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ ĐỊA CHỈ ỨNG DỤNG

17.1. Phương thức chuyển giao

Công bố các bài báo trên mạng Internet và chuyển vào thư viện điện tử Đại học Thái Nguyên làm tài liệu dùng chung cho học tập, nghiên cứu và đào tạo.

17.2. Địa chỉ ứng dụng: - Trường ĐH Sư phạm – ĐH Thái Nguyên và
các trường Đại học có chuyên ngành Toán học.

18. TÁC ĐỘNG VÀ LỢI ÍCH MANG LẠI CỦA KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

18.1. Đối với lĩnh vực giáo dục và đào tạo

- Góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy;
- Nâng cao chất lượng đội ngũ cán bộ giáo viên các tỉnh miền núi phía bắc;

18.2. Đối với lĩnh vực khoa học và công nghệ có liên quan

- Góp phần phát triển lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna nói riêng và phát triển toán học lý thuyết nói chung.

18.3. Đối với phát triển kinh tế-xã hội

- Cung cấp nguồn nhân lực có trình độ cao.

18.4. Đối với tổ chức chủ trì và các cơ sở ứng dụng kết quả nghiên cứu

- Thúc đẩy nhóm nghiên cứu toán học tại Đại học Thái Nguyên
- Góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy sau đại học tại Đại học Thái Nguyên

19. KINH PHÍ THỰC HIỆN ĐỀ TÀI VÀ NGUỒN KINH PHÍ

Kinh phí thực hiện đề tài: 150.000.000 đồng

Trong đó:

Ngân sách Nhà nước: 150.000.000 đồng

Các nguồn khác: 0

Đơn vị tính: 1000 đồng

Stt	Khoản chi, nội dung chi	Thời gian thực hiện	Tổng kinh phí	Nguồn kinh phí		Ghi chú
				Kinh phí từ NSNN	Các nguồn khác	
1	Chi tiền công lao động trực tiếp	2017-2018	126.800	126.800		
2	Chi mua vật tư, nguyên, nhiên, vật liệu					
3	Chi sửa chữa, mua sắm tài sản cố định					
4	Chi tổ chức Seminar phục vụ NC	2018	5.000	5.000		
5	Chi trả dịch vụ thuê ngoài phục vụ hoạt động nghiên cứu					
6	Chi điều tra, khảo sát thu thập số liệu					
7	Chi văn phòng, phẩm, thông tin liên lạc, in ấn	2017-2018	4.800	4.800		
8	Chi họp hội đồng đánh giá, nghiệm thu cấp cơ sở	2018	5.900	5.900		
9	Chi quản lý chung	2017-2018	7.500	7.500		
10	Chi khác					
	Tổng cộng		150.000	150.000		

(*Dự toán chi tiết các mục chi kèm theo và xác nhận của cơ quan chủ trì*).

Ngày 20 tháng 9 năm 2016
Tổ chức chủ trì
(ký, họ và tên, đóng dấu)

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

KT.GIÁM ĐỐC
PHÓ GIÁM ĐỐC
PGS. TS. Nguyễn Hữu Công

Ngày 19 tháng 9. năm 2016
Chủ nhiệm đề tài
(ký, họ và tên)

PGS. TS. Hà Trần Phương

Ngày 15 tháng 01 năm 2017
Cơ quan chủ quản duyệt
TL. BỘ TRƯỞNG BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VỤ TRƯỞNG VỤ KHOA HỌC, CÔNG NGHỆ VÀ MÔI TRƯỜNG

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

PHÓ VỤ TRƯỞNG VỤ KHOA HỌC CÔNG NGHỆ VÀ MT
Vũ Thanh Bình

PHỤ LỤC DỰ TOÁN CHI CHI TIẾT
Theo Thông tư số 55/2015/TTLT-BTC-BKHCN, ngày 22 tháng 4 năm 2015
và Quyết định 5830/QĐ-BGDĐT, ngày 27 tháng 11 năm 2015

Lương cơ bản: 1.210.000
Đơn vị tính: 1000 đồng

1. Dự toán Chi tiền công lao động trực tiếp

TT	Chức danh	Số ngày công dự kiến	Hệ số tiền công theo ngày	Tiền công	Nguồn kinh phí, thành tiền				Ghi chú
					Năm 2007		Năm 2008		
					Nguồn ngân sách	Nguồn khác	Nguồn ngân sách	Nguồn khác	
1	**Chủ nhiệm đề tài: Hà Trần Phương** - Xây dựng thuyết minh đề tài. - Xây dựng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên. - Viết và báo cáo chuyên đề vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên. - Viết báo cáo tổng kết, phân tích, đánh giá.	10 25 25 20	0,55	**53.240**	**26.620**	**0**	**26.620**	**0**	
2	**Thành viên thực hiện chính, thư ký khoa học**			**37.026**	**18.513**	**0**	**18.513**	**0**	
2.1	**Trần Huệ Minh:** - Nghiên cứu, phối hợp với chủ nhiệm đề tài viết và báo cáo chuyên đề định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên. - Phối hợp với chủ nhiệm để xây dựng mới một số kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình.	20 20	0,34	16.456	8.228	0	8.228	0	
2.2	**Đoàn Quang Mạnh:** - Phối hợp với chủ nhiệm để xây dựng một số định lý mới về tính chất của hàm phân hình. - Phối hợp với chủ nhiệm để xây dựng một số định lý mới về vấn đề duy nhất cho hàm phân hình.	20 20	0,34	16.456	8.228	0	8.228	0	
2.3	**Nguyễn Hữu Quân:** Thư ký khoa học. Thực hiện những nhiệm vụ về quản lý khoa học của đề tài	10	0,34	4.114	2.057	0	2.057	0	
3	**Thành viên:**			**6.534**	**3.267**	**0**	**3.267**	**0**	
3.1	**Lê Quang Ninh:** Nghiên cứu, viết và báo cáo chuyên đề vấn đề duy nhất cho hàm phân hình	30	0,18	6.534	3.267	0	3.267	0	

4	**Thuê chuyên gia: Hà Trầm** Viết các bài báo về phân bố giá trị cho cho đường cong chỉnh hình, vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình.			**35.000**	**15.000**	**0**	**15.000**	**0**	
	Tổng (1 + 2 + 3 + 4)			**126.800**	**63.400**	**0**	**63 .400**	**0**	

4. Chi tổ chức Seminar

TT	Khoản chi	Tổng kinh phí	Nguồn kinh phí, thành tiền				Ghi chú
			Năm 2017		Năm 2018		
			Kinh phí từ NSNN	Nguồn khác	Kinh phí từ NSNN	Nguồn khác	
1	**Kinh phí tổ chức 02 buổi Seminar**						
1.1	Chủ trì (2 buổi)	1.500	0	0	1.500	0	
1.2	Báo cáo (2 người, mỗi người 1 buổi)	2.000	0	0	2.000	0	
1.3	Thành viên (5 người x 2 buổi)	1.000	0	0	1.000	0	
1.4	Thư ký đề tài (2 buổi)	500	0	0	500	0	
	Tổng	**5.000**	**0**	**0**	**5.000**	**0**	

7. Chi văn phòng phẩm, thông tin liên lạc, in ấn

TT	Khoản chi	Tổng kinh phí	Nguồn kinh phí, thành tiền				Ghi chú
			Năm 2017		Năm 2018		
			Kinh phí từ NSNN	Nguồn khác	Kinh phí từ NSNN	Nguồn khác	
1	Văn phòng phẩm, dịch tài liệu	3.000	3.000	0	0	0	
2	In ấn tài liệu	1.800	0	0	1.800	0	
	Tổng	**4.800**	**3.000**	**0**	**1.800**	**0**	

8. Chi Hội đồng đánh giá nghiệm thu cấp cơ sở

TT	Khoản chi	Tổng kinh phí	Nguồn kinh phí, thành tiền				Ghi chú
			Năm 2017		Năm 2018		
			Kinh phí từ NSNN	Nguồn khác	Kinh phí từ NSNN	Nguồn khác	
1	**Chi Hội đồng nghiệm thu cấp cơ sở**						
1.1	Chủ tịch Hội đồng (01 người)	900	0	0	900	0	
1.2	Thành viên Hội đồng (08 người x 600.000 đ/người)	4.800	0	0	4.800	0	
1.3	Thư ký đề tài (01 người)	200	0	0	200	0	
	Tổng	**5.900**	**0**	**0**	**5.900**	**0**	

9. Quản lý chung

TT	Khoản chi	Tổng kinh phí	Nguồn kinh phí, thành tiền				Ghi chú
			Năm 2017		Năm 2018		
			Kinh phí từ NSNN	Nguồn khác	Kinh phí từ NSNN	Nguồn khác	
1	Chi cho các việc quản lý đề tài	7.500	**3.750**	0	**3.750**	0	
	Tổng	**7.500**	**3.750**	**0**	**3.750**	**0**	

Tổng dự toán chi (Mục 1 + Mục 4 + Mục 7 + Mục 8 + Mục 9): **150.000.000 đồng**

Xác nhận của cơ quan chủ trì đề tài

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

KT.GIÁM ĐỐC
PHÓ GIÁM ĐỐC
PGS.TS: Nguyễn Hữu Công

Chủ nhiệm đề tài

Hà Trần Phương

TIỀM LỰC KHOA HỌC CỦA TỔ CHỨC, CÁ NHÂN

THỰC HIỆN ĐỀ TÀI KH&CN CẤP BỘ

(Kèm theo Thuyết minh đề tài KH&CN cấp Bộ)

A. Thông tin về chủ nhiệm và các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài:

1. Chủ nhiệm đề tài: PGS. TS. Hà Trần Phương

1.1. Các hướng nghiên cứu khoa học chủ yếu

- Lý thuyết phân bố giá trị cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình;
- Xác định duy nhất hàm phân hình và ánh xạ chỉnh hình.

1.2. Kết quả nghiên cứu khoa học trong 5 năm gần đây:

- *Chủ nhiệm hoặc tham gia chương trình, đề tài NCKH đã nghiệm thu:*

Stt	Tên chương trình, đề tài	Chủ nhiệm	Tham gia	Mã số và cấp quản lý	Thời gian thực hiện	Kết quả nghiệm thu
1	Định lý cơ bản thứ hai cho ánh xạ chỉnh hình và ứng dụng	x		B2010-TN25	1/2010-12/2011	Đã nghiệm thu đạt loại xuất sắc
2	Sự xác định duy nhất hàm và đường cong chỉnh hình	x		B2013-TN04-06	6/2013 -5/2015	Đã nghiệm thu đạt loại xuất sắc

- *Công trình khoa học đã công bố (chỉ nêu tối đa 5 công trình tiêu biểu nhất):*

Stt	Tên công trình khoa học	Tác giả/Đồng tác giả	Địa chỉ công bố	Năm công bố
1	*An explicit estimate on multiplicity truncation in the second main theorem for holomorphic curves encountering hypersurfaces in general position in projective space*	T. T. H. An/ H. T. Phuong	Houston Journal of Mathematics (SCI-E)	2009
2	*On unique range sets for holomorphic maps sharing hypersurfaces without counting multiplicity*	H. T. Phuong	Acta Math. Vietnamica	2009
3	*On Uniqueness theorems for holomorphic curves sharing hypersurfaces without counting multiplicity*	H. T. Phuong	Ucrainian Math. Journal (SCI-E).	2011
4	*On Uniqueness theorems for holomorphic curves sharing moving hypersurfaces*	H. T. Phuong	Complex Variables and Elliptic Equations (SCI-E)	2013
5	*On fundamental theorems for holomorphic curves on Annuli*	H.T. Phuong /N. V. Thin	Ucrainian Math. Journal (SCI-E).	2015

1.3 Kết quả đào tạo trong 5 năm gần đây:

- *Hướng dẫn thạc sỹ, tiến sỹ:*

Stt	Tên đề tài luận văn, luận án	Đối tượng		Trách nhiệm		Cơ sở đào tạo	Năm bảo vệ
		Nghiên cứu sinh	Học viên cao học	Chính	Phụ		
1	Về định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa các		X	x		ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	2011

	không gian metric đầy đủ						
2	Về hàm phân hình chung nhau hai tập hợp		x	x		ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	2011
3	Sự duy nhất của hàm phân hình với đa thức sai phân		x	x		ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	2012
4	Xác định duy nhất hàm phân hình *p*-adic		x	x		ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	2012
5	Tính duy nhất của hàm nguyên có đạo hàm chung nhau một giá trị		x	x		ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	2013
6	Lý thuyết Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình và tập duy nhất		x	x		ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	2013
7	Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình *p*-adic và ứng dụng		x	x		ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	2014
8	Xác định duy nhất đường cong chỉnh hình bởi họ siêu mặt di động		x	x		ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	2014
9	Tập duy nhất cho các hàm phân hình với giá trị khuyết		x	x		ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	2015
10	Hàm phân hình chung nhau các tập hợp với điều kiên IM* và CM*		x	x		ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	2015
11	Vấn đề duy nhất hàm phân hình khi hai đa thức đạo hàm chung nhau một giá trị		x	x		ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	2015
12	Về ứng dụng của lý thuyết phân bố giá trị trong nghiên cứu hàm phân hình	x			x	ĐHSP - ĐH Thái Nguyên	Đang thực hiện

- *Biên soạn sách phục vụ đào tạo đại học và sau đại học:*

Stt	Tên sách	Loại sách	Nhà xuất bản và năm xuất bản	Chủ biên hoặc tham gia
1	Giải tích phức	Đề cương bài giảng hệ CH	Lưu hành nội bộ 2010	Chủ biên
2	Giáo trình Giải tích hàm	Giáo trình Đại học	NXB Giáo dục, 2012	Chủ biên
3	Giải tích *p*-adic	Giáo trình Đại học	Lưu hành nội bộ	Đồng chủ biên

2. Các thành viên tham gia nghiên cứu *(mỗi thành viên chỉ nêu tối đa 3 công trình tiêu biểu nhất):*

Stt	Họ tên thành viên	Tên công trình khoa học	Địa chỉ công bố	Năm công bố
1	TS. Đoàn Quang Mạnh	*Unique range sets for holomorphic curves*	Acta Math. Vietnam	
		P-adic Nevanlinna - Cartan theorem in several variables for Fermat type hypersurfaces	East - West J. Math	
		On the unique range sets for p-adic holomorphic maps	Vietnam J. Math	
2	TS. Trần Huệ Minh	*Hyperbolic imbeddedness and extensions of holomorphic mappings*	Kyushu. J. Math	2005
		Remarks on Kobayashi hyperbolicity of complex spaces	Acta Mathematica Vietnamica	2009
		On Uniqueness Theorem for Holomorphic Curves on Annulus Sharing 2n+3 Hyperplanes	Vietnam Journal of Math	2013
3	ThS. NCS Lê Quang Ninh	*Uniqueness polynomials for linearly non-degenerate holomorphic curves*	International Advisory Board of the 20th International Iconference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications	2012
		Uniqueness Theorems for Holomorphic Curves with Hypersurfaces of Fermat-Waring Type	Complex Analysis and Operator	2014
		Uniqueness polynomials for linearly non-degenerate p-adic holomorphic curves	Tạp chí Khoa học & Công nghệ Đại học Thái Nguyên	2015

B. Tiềm lực về trang thiết bị của cơ quan chủ trì để thực hiện đề tài:

Stt	Tên trang thiết bị	Thuộc phòng thí nghiệm	Mô tả vai trò của thiết bị đối với đề tài	Tình trạng
1 2	Thư viện điện tử	Trung tâm học liệu	Tìm kiếm, tra cứu thông tin	Tốt

Ngày…… tháng…… năm………

Xác nhận của cơ quan chủ trì

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

KT.GIÁM ĐỐC
PHÓ GIÁM ĐỐC
PGS.TS: Nguyễn Hữu Công

Chủ nhiệm đề tài

PGS.TS Hà Trần Phương