BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÁO CÁO TÓM TẮT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT PHÂN BỐ GIÁ TRỊ TRONG NGHIÊN CỨU VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO HÀM PHÂN HÌNH VÀ ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

Mã số: B2017-TNA-41

Chủ nhiệm đề tài: PGS.TS Hà Trần Phương

Thái Nguyên, tháng 12/2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÁO CÁO TÓM TẮT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT PHÂN BỐ GIÁ TRỊ TRONG NGHIÊN CỨU VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO HÀM PHÂN HÌNH VÀ ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

Mã số: B2017-TNA-41

Xác nhận của tổ chức chủ trì **Chủ nhiệm đề tài**

PGS.TS Hà Trần Phương

Thái Nguyên, tháng 12/2018

DANH SÁCH THÀNH VIÊN NGHIÊN CỨU CỦA ĐỀ TÀI VÀ ĐƠN VỊ PHỐI HỢP

1. Danh sách thành viên tham gia đề tài

+ PGS. TS. Hà Trần Phương

+ TS. Trần Huệ Minh

+ TS. Lê Quang Ninh

+ TS Đoàn Quang Mạnh

+ TS. Nguyễn Hữu Quân

2. Cơ quan và cá nhân phối hợp: Viện Toán học - Viện KH&CN Việt Nam

a. Phòng Giải tích - Viện Toán học: GS. TSKH Nguyễn Xuân Tấn.

b. Phòng Lý thuyết số - Viện Toán học: PGS.TSKH Tạ Thị Hoài An

Mục lục

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung

- Tên đề tài: Ứng dụng của lý thuyết phân bố giá trị trong nghiên cứu vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình

- Mã số: B2017-TNA-41

- Chủ nhiệm đề tài: PGS. TS. Hà Trần Phương

- Tổ chức chủ trì: Trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên

- Thời gian thực hiện: 2 năm (từ 1/1/2017 - 31/12/2018)

2. Mục tiêu

Nghiên cứu một số dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên đĩa thủng trong trường hợp mục tiêu là các siêu mặt. Nghiên cứu sự xác định duy nhất một hàm phân hình hoặc đường cong thông qua ảnh ngược của một tập hữu hạn các điểm hoặc các siêu mặt trong các trường hợp phức và p-adic.

Góp phần thúc đẩy hướng nghiên cứu Lý thuyết Nevanlinna và ứng dụng tại Đại học Thái Nguyên và phục vụ công tác đạo tạo đại học, sau đại học tại ĐHTN.

3. Tính mới và sáng tạo

Chứng minh được một tiêu chuẩn chuẩn tắc cho một họ các hàm phân hình;

Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Bruck;

Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất liên quan đến đa thức vi phân của các hàm phân hình trên trường $p-$adic;

Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese.

4. Kết quả nghiên cứu

a. Tiêu chuẩn chuẩn tắc cho một họ các hàm phân hình:

Định lý 1. *Cho $\mathcal{F}$ là một hàm phân hình trên miền phẳng phức D. Cho a và b là hai số phức thỏa mãn $b \neq 0$, gọi $n \in \mathbb{N}$, $n_j, t_j, k \in \mathbb{N}^*$, $(j = 1, 2, \ldots, k)$ thỏa mãn*

$$n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 3, \tag{0.1}$$

và

$$f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \Leftrightarrow f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b \tag{0.2}$$

đối với $f \in \mathcal{F}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc. Ngoài ta, nếu $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình thì khẳng định đúng khi (1.1) được thay thế bởi một trong các điều kiện sau:

$$k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1; \tag{0.3}$$

$$n \geqslant 1 \text{ or } k \geqslant 2, n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2. \tag{0.4}$$

b. Vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Bruck

Định lý 2. *Cho $n \in \mathbb{N}$ và $k, n_i, t_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \ldots, k$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau:*

$$1)\ k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1;$$

$$2)\ n \geqslant 1 \text{ or } k \geqslant 2,\ n_j \geqslant t_j,\ n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2.$$

Cho a và b là hai giá trị hữu hạn khác 0 và f là một hàm nguyên khác hằng. Nếu $f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \rightleftharpoons f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$ thì

$$\frac{f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\cdots+n_k} - a} = c,$$

trong đó c là một hằng số. Đặc biệt, nếu $a = b$ thì $f = c_1 e^{tz}$, trong đó c_1 và t là các hằng số khác 0 và t thỏa mãn điều kiện

$$(tn_1)^{t_1} \dots (tn_k)^{t_k} = 1.$$

c. Vấn đề duy nhất liên quan đến đa thức vi phân

Định lý 3. *Cho f, g là các hàm nguyên siêu việt p-adic và $k \geqslant 1$, $t \geqslant 1, n \geqslant 2k + 4 + t$ là các số nguyên. Nếu*

$$(f^n(z)f(z + b_1) \dots f(z + b_t))^{(k)}$$

và

$$(g^n(z)g(z + b_1) \dots g(z + b_t))^{(k)}$$

chung nhau $1 - CM$, trong đó $b_1, \dots, b_t$ là các hằng số khác 0 phân biệt. Khi đó $f \equiv hg$, trong đó $h^{n+t} = 1$.

d. Vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình

Định lý 3. *Cho f và g là các đường cong chỉnh hình siêu việt không suy biến tuyến tính từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm q $q \geqslant n_d + 1 + 2n_d^2/d$ các siêu mặt bậc d ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Khi đó $f \equiv g$.*

5. Sản phẩm

a) 03 bài báo khoa học:

[1] N. V. Thin, H. T. Phuong and L. Vilaisavanh (2018), "A uniqueness problem for entire functions related to Brück's conjecture", Math. Slovaca 68, No. 4, pp. 823–836.

[2] H. T. Phuong and L.Q. Ninh (2018), "A Uniqueness theorem for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces", ThaiNguyen Journal of Science and Technology, 192 (16), pp. 29-35.

[3] H. T. Phuong, N. V. Thin (2018), "On Uniqueness of $p-$adic Meromorphic Function Concerning Differential Polynomials" ThaiNguyen Journal of Science and Technology, 181(05), pp. 231 - 236.

b) Hướng dẫn thành công 02 luận văn thạc sĩ:

Tô Thị Thiếm (2108), *Vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình với điều kiện của đa thức đạo hàm*, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

Nguyễn Quốc Cường (2018) *Vấn đề duy nhất của hàm phân hình phức và p−adic khi đạo hàm của đa thức chung nhau một hàm nhỏ*, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

c) Tham gia đào tạo 1 NCS :

Leuanglith Vilaisavanh (đang thực hiện), *Lý thuyết Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình trên Annuli và vấn đề duy nhất*, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu

a) Phương thức chuyển giao: đề tài là các kết quả nghiên cứu cơ bản được chuyển giao trực tiếp cho Đại học Thái Nguyên làm tài liệu nghiên cứu và học tập cho học viên.

b) Địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu: Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và các khoa Toán của các trường đại học trong cả nước.

c) Lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu: làm phong phú thêm lý thuyết Nevanlinna và đóng góp vào đào tạo sau đại học của Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

- Project title: Application of the distribution theory in research uniqueness problem for meromorphic functions and holomorphic curves

- Code number: B2017-TNA-41

- Coordinator: Ass. Prof. Dr. Ha Tran Phuong

- Implementing institution: ThaiNguyen University

- Duration: from 1/1/2017 to 31/12/2018.

2. Objectives Research some type of second main theorem with truncated functions for holomorphic curves on annuli with hypersurfaces. Research uniqueness problem for for meromorphic functions and holomorphic curves by reverse image of finite set of points or hypersurfaces in complex or p−adic cases.

To develop of the Nevalinna theory and it's applications and sever to graduate program in training of the undergraduate and graduate students in Thai Nguyen University.

3. Creativeness and innovativeness:

Proved the new normal criterion for a collection of meromorphic functions.

Proved a new result of unicity of meromorphic function related to Bruck's conjecture.

3. Creativeness and innovativeness:

Proved the normal criterion for a collection of meromorphic functions.

Proved a result of unicity of meromorphic function related to Bruck's conjecture.

Proved a result of unicity of $p-$adic meromorphic function concerning differential polynomials.

Proved a result of unicity of holomorphic curves on annulus in the case hypersurfaces in general position for Veronese embedding.

4. Research results

a) Normal criterion for a collection of meromorphic functions

Theorem 1. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $k, n_i, t_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \ldots, k$ satisfy one of the following conditions:*

$$1)\ k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1;$$

$$2)\ n \geqslant 1 \text{ or } k \geqslant 2,\ n_j \geqslant t_j,\ n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2.$$

Let a and b be two finite nonzero values and f be a nonconstant entire function. If $f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \rightleftharpoons f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$, then

$$\frac{f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\cdots+n_k} - a} = c,$$

where c is a nonzero constant. Specially, if $a = b$ then $f = c_1 e^{tz}$, where c_1 and t are nonzero constants and t is satisfied by $(tn_1)^{t_1} \ldots (tn_k)^{t_k} = 1$.

b) Unicity of $p-$adic meromorphic function concerning differential polynomials

Theorem 2. *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a complex domain D. Let a and b be two complex numbers such that $b \neq 0$, let $n \in \mathbb{N}$, $n_j, t_j, k \in \mathbb{N}^*$, $(j = 1, 2, \ldots, k)$ satisfy*

$$n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 3, \tag{0.5}$$

and

$$f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \Leftrightarrow f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b \tag{0.6}$$

for all $f \in \mathcal{F}$. Then $\mathcal{F}$ is a normal family. Furthermore, if $\mathcal{F}$ is a family of holomorphic functions, then the statement holds when (1.1) *is replaced by one of the following conditions:*

$$k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1; \tag{0.7}$$

$$n \geqslant 1 \ \text{or}\ k \geqslant 2, n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2. \tag{0.8}$$

c) Unicity of $p-$adic meromorphic function concerning differential polynomials

Theorem 3. *Let f, g be p-adic transcendental entire functions and $k \geqslant 1$, $t \geqslant 1, n \geqslant 2k + 4 + t$ are integers. If $(f^n(z)f(z + b_1)\dots f(z+b_t))^{(k)}$ and $(g^n(z)g(z+b_1)\dots g(z+b_t))^{(k)}$ share $1-CM$, where $b_1, \dots, b_t$ are nonzero distinct constants. Then $f \equiv hg$, where $h^{n+t} = 1$.*

d) Unicity of holomorphic curves on annulus:

Theorem 4. *Let f and g be transcendental algebraically non-degenerate holomorphic curves from Δ into $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Let $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ be a collection of $q \geqslant n_d + 1 + 2n_d^2/d$ hypersurfaces of degree d in general position for Veronese embedding in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ such that $f(z) = g(z)$ for all $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Then $f \equiv g$.*

5. Products

a) 03 science papers:

[1] N. V. Thin, H. T. Phuong and L. Vilaisavanh (2018), "A uniqueness problem for entire functions related to Brück's conjecture", Math. Slovaca 68, No. 4, pp. 823–836.

[2] H. T. Phuong and L.Q. Ninh (2018), "A Uniqueness theorem for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces", ThaiNguyen Journal of Science and Technology, 192 (16), pp. 29-35.

[3] H. T. Phuong, N. V. Thin (2018), "On Uniqueness of $p-$adic Meromorphic Function Concerning Differential Polynomials" ThaiNguyen Journal of Science and Technology, 181(05), pp. 231 - 236.

b) Guiding successfully 02 master projects:

1. To Thi Thiem (2018), *Uniqueness for meromorphic functions with a conditions of differential polynomial*, Thai Nguyen University of Education, Thai Nguyen University.

2. Nguyen Quoc Cuong (2018), *Uniqueness for complex and $p-$adic meromorphic functions when differential of its polynomials sharing a small functions*, Thai Nguyen University of Education, Thai Nguyen University.

c) Guiding 01 Ph.D projects:

Leuanglith Vilaisavanh (đang thực hiện), *Nevanlinna theory for holomorphic curves on annuli and uniqueness problem,* Thai Nguyen University of Education, Thai Nguyen University.

6. Transfer alternatives, application institutions, impacts and benefits of research results:

a) Transfer alternatives: all of results in the projects are theoretical research and it is directly transfered to ThaiNguyen University to use for research and training.

b) Application institutions: mathematic falcuty in Thai Nguyen University and mathematic falcuties in other universities.

c) Impacts and benefits of research results: development the Nevanlinna theory and contributing to graduate training in Thai Nguyen University.

Mở đầu

Một trong những ứng dụng quan trọng của lý thuyết phân bố giá trị là nghiên cứu vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình: Công trình đầu tiên thuộc về Nevanlinna công bố năm 1925, chúng ta biết đến nó với tên "Định lý năm điểm" rất nổi tiếng, định lý cho một điều kiện đại số để hai hàm phân hình bằng nhau. Năm 1975, Fujimoto mở rộng kết của Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình. Về sau việc phát triển vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình và đường cong chỉnh hình thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trên thế giới, chẳng hạn H. Fujimoto, M. Ru, M. Dulock, G. Dethloft, T. J. Wang, A. Banerjee, H. H. Khoái, D. D. Thái, T. T. H. An, T. V. Tấn, V. H. An, H. T. Phương, N. V. Thìn và nhiều tác giả khác.

Trong đề tài này chúng tôi, bằng các kết quả trong lý thuyết phân bố giá trị, chúng tôi nghiên cứu các dạng định lí duy nhất cho các hàm phân hình, đa thức vi phân và đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.

Thái Nguyên, tháng 12 năm 2018

Nhóm nghiên cứu

Chương 1

Vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình

1.1. Vấn đề duy nhất liên quan đến giả thuyết Brück

1.1.1. Một số kết quả bổ trợ

Mệnh đề 1.1. *(Bổ đề Zalcman) Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên đĩa mở $\triangle = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Khi đó nếu $\mathcal{F}$ không chuẩn tắc tại một điểm $z_0 \in \triangle$, thì với mỗi số thực α thỏa mãn $-1 < \alpha < 1$, tồn tại*

1) *một số thực r, $0 < r < 1$ và một điểm z_n, $|z_n| < r$, $z_n \to z_0$,*
2) *các số dương $\rho_n, \rho_n \to 0^+$,*
3) *các hàm f_n, $f_n \in \mathcal{F}$ thỏa mãn*

$$g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^\alpha} \to g(\xi)$$

cầu đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$, trong đó $g(\xi)$ là một hàm phân hình khác hằng và $g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0) = 1$. Hơn nữa, bậc của g không lớn hơn 2. Trong đó, $g^{\#}(z) = \frac{|g'(z)|}{1+|g(z)|^2}$ là đạo hàm cầu.

Mệnh đề 1.2. *Cho g là một hàm nguyên và M là một hằng số dương. Nếu $g^{\#}(\xi) \leqslant M$ đối với mọi $\xi \in \mathbb{C}$, thì g có bậc cao nhất là 1.*

Chú ý. Trong Mệnh đề 1.1, nếu $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình, thì g là một hàm chỉnh hình dựa trên định lý Hurwitz. Do đó, bậc của g không lớn hơn 1 theo Mệnh đề 1.2.

Một đa thức vi phân P của g được định nghĩa bởi

$$P(z) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(z) \prod_{j=0}^{p} (g^{(j)}(z))^{S_{ij}},$$

trong đó $S_{ij},\ 0 \leqslant i, j \leqslant n$, là các số nguyên không âm và $\alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ là các hàm phân hình nhỏ đối với g. Đặt

$$d(P) := \min_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=0}^{p} S_{ij} \ \text{ và } \ \theta(P) := \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=0}^{p} jS_{ij}.$$

Mệnh đề 1.3. *Cho f là một hàm phân hình siêu việt và a là một hằng số phức. Gọi $n \in \mathbb{N}$, $k, n_j, t_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, \ldots, k$ thỏa mãn*

$$n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 3.$$

Phương trình

$$f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có vô số nghiệm. Hơn nữa, nếu f là một hàm nguyên siêu việt, khẳng định đúng khi $n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2$.

Mệnh đề 1.4. *Cho f là một hàm hữu tỷ khác hằng và a là một hằng số phức. Cho $n \in \mathbb{N}$, $k, n_j, t_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, \ldots, k$ thỏa mãn*

$$n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2, j = 1, \ldots, k.$$

Phương trình

$$f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có ít nhất hai không điểm phân biệt.

Ta nhắc lại bậc $\sigma(f)$ của hàm phân hình f định nghĩa bởi

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Hơn nữa, khi f là một hàm nguyên ta có

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log(M(r,f))}{\log r}.$$

Cho f là một hàm nguyên. Ta biết rằng f có thể biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Ta kí hiệu

$$\mu(r,f) = \max_{n\in\mathbb{N},|z|=r}\{|a_n z^n|\},\ \nu(r,f) = \sup\{n : |a_n|r^n = \mu(r,f)\},$$

$$M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|.$$

1.1.2. Vấn đề duy nhất

Trước hết chúng tôi giới thiệu một giả thuyết được đưa ra bởi R. Brück, thường được gọi là Giả thuyết Brück.

Giả thuyết. *Cho f là một hàm nguyên khác hằng sao cho siêu bậc $\sigma_2(f)$ của f không là một số nguyên dương và $\sigma_2(f) < \infty$. Nếu f và f' chung nhau giá trị hữu hạn a kể cả bội thì*

$$\frac{f'-a}{f-a} = c,$$

trong đó c là một hằng số khác 0.

Brück đã chứng minh giải thuyết trên trong trường hợp $a = 0$ trong. Từ phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{f'-a}{f-a} = e^{z^n},\ \ \frac{f'-a}{f-a} = e^{e^{z^n}},$$

ta thấy rằng giả thuyết đó không đúng nếu $\sigma_2(f)$ là một số nguyên dương hoặc vô hạn. Trong trường hợp f là một hàm có bậc hữu hạn, Giả thuyết trên đã được Gundersen và Yang chứng minh. Trong trường hợp f là một hàm có bậc vô hạn với $\sigma_2(f) < \frac{1}{2}$, Giả thuyết được chứng minh bởi Chen và Shon. Tuy nhiên, giả thuyết trong trường hợp $\sigma_2(f) \geqslant \frac{1}{2}$ vẫn là một vấn đề mở.

Một câu hỏi thú vị được đặt ra là: điều gì xảy ra khi ta thay f với f^n trong giả thuyết Brück. Năm 2008, L. Z. Yang và J. L. Zhang đã đưa ra một kết quả liên quan đến giả thuyết Brück như sau.

Định lý 1.5. *Cho f là một hàm nguyên khác hằng, $n \geqslant 7$ là một số nguyên và $F = f^n$. Nếu F và F' chung nhau giá trị 1 CM, thì $F \equiv F'$ và f có dạng*

$$f = ce^{z/n},$$

trong đó c là một hằng số khác 0.

Năm 2018, chúng tôi đã chứng minh các kết quả sau

Định lý 1.6. *Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên miền phẳng phức D. Cho a và b là hai số phức thỏa mãn $b \neq 0$, gọi $n \in \mathbb{N}$, $n_j, t_j, k \in \mathbb{N}^*$, $(j = 1, 2, \ldots, k)$ thỏa mãn*

$$n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 3, \tag{1.1}$$

và

$$f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \Leftrightarrow f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b \tag{1.2}$$

đối với $f \in \mathcal{F}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc. Ngoài ta, nếu $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình thì khẳng định đúng khi (1.1) được thay thế bởi một trong các điều kiện sau:

$$k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1; \tag{1.3}$$

$$n \geqslant 1 \ \text{or}\ k \geqslant 2, n_j \geqslant t_j, n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2. \tag{1.4}$$

Định lý 1.7. *Cho* $n \in \mathbb{N}$ *và* $k, n_i, t_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \ldots, k$ *thỏa mãn một trong các điều kiện sau:*

1) $k = 1,\ n = 0,\ n_1 \geqslant t_1 + 1;$

2) $n \geqslant 1$ *or* $k \geqslant 2,\ n_j \geqslant t_j,\ n + \sum_{j=1}^{k} n_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_j + 2.$

Cho a *và* b *là hai giá trị hữu hạn khác* 0 *và* f *là một hàm nguyên khác hằng. Nếu* $f^{n+n_1+\cdots+n_k} = a \rightleftharpoons f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$ *thì*

$$\frac{f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \ldots (f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\cdots+n_k} - a} = c,$$

trong đó c *là một hằng số. Đặc biệt, nếu* $a = b$ *thì* $f = c_1 e^{tz}$*, trong đó* c_1 *và* t *là các hằng số khác* 0 *và* t *thỏa mãn điều kiện*

$$(tn_1)^{t_1} \ldots (tn_k)^{t_k} = 1.$$

Trường hợp đặc biệt của Định lý 1.7, nếu ta chọn $n = 0,\ k = 1,\ t_1 = 1$ trong Định lý 1.7, thì ta có:

Hệ quả 1.8. *Cho* f *là một hàm nguyên khác hằng,* $n \geqslant 2$ *là một số nguyên và* $F = f^n$*. Nếu* F *và* F' *chung nhau giá trị 1 CM thì* $F \equiv F'$ *và* f *có dạng*

$$f = ce^{z/n},$$

trong đó c *là một hằng số khác* 0*.*

1.2. Vấn đề duy nhất cho hàm phân hình $p-$adic

1.2.1. Phân bố giá trị Nevanlinna $p-$adic

Hàm đặc trưng và tính chất

Trong phần này ta luôn quy ước các số thực ρ_0, r, ρ thỏa mãn $0 < \rho_0 < r < \rho \leqslant \infty$. Giả sử $f \in \mathcal{M}_{(\rho}(\mathbb{C}_p)$ là một hàm phân hình, khi đó tồn tại hai hàm $f_0, f_1 \in \mathcal{A}_r(\mathbb{C}_p)$ sao cho f_1, f_0 không có nhân tử chung trong $\mathcal{A}_r(\mathbb{C}_p)$ và $f = \frac{f_1}{f_0}$. Với $a \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$, ta định nghĩa hàm đếm số không điểm $n(r, \frac{1}{f-a})$ của f tại a (hay còn gọi là hàm đếm số a-điểm của f) bởi

$$n\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \begin{cases} n(r, f) = n(r, \frac{1}{f_0}) & : a = \infty, \\ n(r, \frac{1}{f_1 - af_0}) & : a \neq \infty. \end{cases}$$

Định nghĩa hàm đếm $N(r, \frac{1}{f-a})$ của f tại a bởi

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \begin{cases} N(r, f) = N(r, \frac{1}{f_0}) & : a = \infty, \\ N(r, \frac{1}{f_1 - af_0}) & : a \neq \infty. \end{cases}$$

Kí hiệu

$$N(r, f = a) = \begin{cases} N(r, f) = N(r, f_0 = 0) & : a = \infty, \\ N(r, f_1 - af_0 = 0) & : a \neq \infty. \end{cases}$$

Tương tự ta cũng định nghĩa được các hàm $\overline{n}(r, f)$, $\overline{N}(r, f)$, $\overline{n}(r, \frac{1}{f-a})$ và $\overline{N}(r, \frac{1}{f-a})$.

Tiếp theo ta định nghĩa hàm bù (hay còn gọi là hàm xấp xỉ) của hàm f bởi công thức

$$m(r, f) = \log^+ \mu(r, f) = \max\{0, \log \mu(r, f)\}.$$

Đặc biệt

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) = \log^+ \mu\left(r, \frac{1}{f}\right) = \log^+ \frac{1}{\mu(r, f)} = \max\{0, -\log \mu(r, f)\}.$$

Hai định lý cơ bản

Để cho ngắn gọn, ta vẫn kí hiệu $|.|$ thay cho $|.|_p$ trên $\mathbb{C}_p$. Ta cố định hai số thực ρ và ρ_0 sao cho $0 < \rho_0 < \rho < \infty$. Trước tiên ta chứng minh Định lý cơ bản thứ nhất, định lý này tương tự với trường hợp phức.

Định lý 1.9 (Định lý cơ bản thứ nhất). *Nếu f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p(0;\rho)$ thì với mọi $a \in \mathbb{C}_p$ ta có*

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1).$$

Mệnh đề 1.10. *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p(0;\rho)$. Khi đó với một số nguyên $k > 0$, với mọi $r < \rho$ ta có*

$$\mu\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \leqslant \frac{1}{r^k},$$

đặc biệt

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \leqslant k \log^+ \frac{1}{r}.$$

Với một hàm phân hình khác hằng f trong $\mathbb{C}_p(0;\rho)$, ta định nghĩa giá trị phân nhánh bởi

$$N_{\mathrm{Ram}}(r,f) = 2N(r,f) - N(r,f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right).$$

Tiếp theo ta xem xét Định lý cơ bản thứ hai trong trường hợp $p-$adic.

Định lý 1.11 (Định lý cơ bản thứ hai). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p(0;\rho)$ và $a_1, \ldots, a_q \in \mathbb{C}_p$ là các số phân biệt. Đặt*

$$\delta = \min_{i \neq j}\{1, |a_i - a_j|\}, \quad A = \max_i\{1, |a_i|\}.$$

Khi đó với $0 < r < \rho$,

$$\begin{aligned}(q-1)T(r,f) &\leqslant N(r,f) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N_{\mathrm{Ram}}(r,f)\\ &\quad - \log r + S_f\\ &\leqslant \overline{N}(r,f) + \sum_{j=1}^{q} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - \log r + S_f,\end{aligned}$$

trong đó

$$S_f = \sum_{j=1}^{q} \log \mu(\rho_0, f - a_j) - \log \mu(\rho_0, f') + (q-1)\log \frac{A}{\delta}.$$

Chú ý. Do lượng S_f trong Định lý cơ bản thứ hai là một đại lượng bị chặn nên

$$\lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{S_f}{T(r,f)}=0.$$

1.2.2. Vấn đề duy nhất liên quan đến đa thức vi phân

Mệnh đề 1.12. *Cho f là một hàm phân hình $p-$adic và $f^{(k)}\not\equiv 0$. Khi đó ta có*

$$\begin{aligned}
&\overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}})\leqslant k\overline{N}(r,f)+N_{k+1}(r,\frac{1}{f})+O(1);\\
&\overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}})\leqslant N_{k+1}(r,\frac{1}{f})+T(r,f^{(k)})-T(r,f)+O(1);\\
&N_2(r,\frac{1}{f^{(k)}})\leqslant k\overline{N}(r,f)+N_{k+2}(r,\frac{1}{f})+O(1);\\
&N_2(r,\frac{1}{f^{(k)}})\leqslant N_{k+2}(r,\frac{1}{f})+T(r,f^{(k)})-T(r,f)+O(1).
\end{aligned}$$

Mệnh đề 1.13. *Cho f và g là các hàm nguyên trên $\mathbb{C}_p$, $k,m\geqslant 1$, $n\geqslant m+5$ là các số nguyên dương và $c\neq 0$ là một hằng số. Nếu*

$$(f^n(f^m-1)f(z+c))^{(k)}=(g^n(g^m-1)g(z+c))^{(k)},$$

thì $f\equiv hg$, trong đó $h^{n+1}=h^m=1$.

Năm 2018 chúng tôi đã chứng minh được gọi là định lý duy nhất cho các hàm phân hình $p-$adic liên quan đến đa thức vi phân:

Định lý 1.14. *Cho f, g là các hàm nguyên siêu việt p-adic và $k\geqslant 1$, $t\geqslant 1, n\geqslant 2k+4+t$ là các số nguyên. Nếu*

$$(f^n(z)f(z+b_1)\dots f(z+b_t))^{(k)}$$

và

$$(g^n(z)g(z+b_1)\dots g(z+b_t))^{(k)}$$

chung nhau $1-CM$, trong đó $b_1,\dots,b_t$ là các hằng số khác 0 phân biệt. Khi đó $f\equiv hg$, trong đó $h^{n+t}=1$.

Chương 2

Vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình

2.1. Một số kiến thức về phân bố giá trị

Trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu một số khái niệm và kiến thức cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna cho các hàm phân hình và đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, các kiến thức này cần thiết cho việc chứng minh các kết quả chính.

Cho $R_0 > 1$ là một số thực dương hoặc $+\infty$, ta kí hiệu

$$\Delta = \Big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\Big\},$$

là một hình vành khuyên trong $\mathbb{C}$. Với mỗi số thực dương r thỏa mãn $1 < r < R_0$, ta kí hiệu

$$\Delta_r = \Big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| < r\Big\},\ \Delta_{1,r} = \Big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| \leqslant 1\Big\},$$
$$\Delta_{2,r} = \Big\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r\Big\}.$$

Cho f là một hàm phân hình trên Δ, ta nhắc lại

$$m\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta,$$
$$m(r, f) = m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

trong đó $\log^+ x = \max\{0, \log x\}, a \in \mathbb{C}$ và $r \in (R_0^{-1}; R_0)$. For $r \in (1, R_0)$, ta kí hiệu

$$
\begin{aligned}
&m_0\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = m\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) + m\Big(\frac{1}{r}, \frac{1}{f-a}\Big),\\
&m_0(r, f) = m(r, f) + m(r^{-1}, f).
\end{aligned}
$$

Kí hiệu $n_1\Big(t, \dfrac{1}{f-a}\Big)$ là số các không điểm của $f-a$ trong $\{z \in \mathbb{C} : t < |z| \leqslant 1\}$ và $n_2\Big(t, \dfrac{1}{f-a}\Big)$ là số các không điểm của $f-a$ trong $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < t\}$; $n_1(t, \infty)$ là số các cực điểm trong $\{z \in \mathbb{C} : t < |z| \leqslant 1\}$ và $n_2(t, \infty)$ là số các cực điểm trong $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < t\}$ của f. Với mọi r $(1 < r < R_0)$, ta có

$$
\begin{aligned}
N_1\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) &= \int_{1/r}^{1} \frac{n_1(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt,\\
N_2\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) &= \int_{1}^{r} \frac{n_2(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt,
\end{aligned}
$$

và

$$
\begin{aligned}
N_1(r, f) = N_1(r, \infty) &= \int_{1/r}^{1} \frac{n_1(t, \infty)}{t} dt,\\
N_2(r, f) = N_2(r, \infty) &= \int_{1}^{r} \frac{n_2(t, \infty)}{t} dt.
\end{aligned}
$$

Kí hiệu

$$
\begin{aligned}
&N_0\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = N_1\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) + N_2\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big)\\
&N_0(r, f) = N_1(r, f) + N_2(r, f).
\end{aligned}
$$

Hàm đặc trưng Nevanlinna $T_0(r, f)$ của f định nghĩa bởi

$$T_0(r, f) = m_0(r, f) - 2m(1, f) + N_0(r, f).$$

Cho $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một ánh xạ chỉnh hình, trong đó $f_0, \ldots, f_n$ là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung trong Δ. Với $1 < r < R_0$, hàm đặc trưng $T_f(r)$ của f được định nghĩa bởi

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\|f(re^{i\theta})\|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|d\theta,$$

trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \ldots, |f_n(z)|\}$. Khái niệm này là độc lập với mọi biểu diễn tối giản của f, sai khác một hằng số.

Cho D là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bậc d và Q là một đa thức thuần nhất bậc d xác định D. Hàm xấp xỉ của f định nghĩa bởi

$$m_f(r, D) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|Q\circ f(re^{i\theta})|}d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^d}{|Q\circ f(r^{-1}e^{i\theta})|}d\theta.$$

Đặt $\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} : r^{-1} \leqslant |z| \leqslant r\}$. Gọi $n_f(r, D)$ là số các không điểm của $Q \circ f$ trong Δ_r, kể cả bội, và $n_f^M(r, D)$ là số các không điểm bội cắt cụt bởi M của $Q \circ f$ trong Δ_r. Gọi $n_f^M(r, D, \leqslant k)$ (tương ứng $n_f^M(r, D, > k)$) là số các không điểm có bội $\leqslant k$ (tương ứng $> k$) của $Q \circ f$ trong Δ_r, bội cắt cụt bởi M. Hàm đếm tích phân định nghĩa bởi

$$N_f(r, D) = N_f(r, Q) = \int_{r^{-1}}^{r} \frac{n_f(t, D)}{t}dt;$$

$$N_f^M(r, D) = N_f^M(r, Q) = \int_{r^{-1}}^{r} \frac{n_f^M(t, D)}{t}dt;$$

$$N_f^M(r, Q, \leqslant k) = N_f^M(r, D, \leqslant k) = \int_{r^{-1}}^{r} \frac{n_f^M(t, D, \leqslant k)}{t}dt;$$

$$N_f^M(r, Q, > k) = N_f^M(r, D, > k) = \int_{r^{-1}}^{r} \frac{n_f^M(t, D, > k)}{t}dt.$$

Nhắc lại rằng các siêu phẳng $D_1, \ldots, D_q,\ q > n$, trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là ở vị trí tổng quát nếu với mỗi cách chọn các chỉ số phân biệt $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1, \ldots, q\}$,

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} \operatorname{supp}(Q_{i_k}) = \emptyset.$$

Cho $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình, định thức Wronskian của f được định nghĩa bởi

$$W = W(f) = W(f_0, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_0(z) & f_1(z) & \cdot & f_n(z) \\ f_0'(z) & f_1'(z) & \cdot & f_n'(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(n)}(z) & f_1^{(n)}(z) & \cdot & f_n^{(n)}(z) \end{vmatrix}.$$

Ta kí hiệu $N_W(r, 0)$ là hàm đếm các không điểm của $W(f_0, \ldots, f_n)$ trong Δ_r, tức là

$$N_W(r, 0) = N_0(r, \frac{1}{W}) + O(1).$$

Gọi $L_0, \ldots, L_n$ là các dạng độc lập tuyến tính của $z_0, \ldots, z_n$. Đối với $j = 0, \ldots, n$, đặt

$$F_j(z) = L_j(f(z)).$$

Theo tính chất của Wronskian, tồn tại các hằng số $C \neq 0$ sao cho

$$|W(F_0, \ldots, F_n)| = C|W(f_0, \ldots, f_n)|.$$

2.2. Định lý duy nhất

Cho D là một siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được định nghĩa bởi đa thức thuần nhất Q bậc d. Khi đó

$$Q(z_0, \ldots, z_n) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k z_0^{i_{k0}} \ldots z_n^{i_{kn}},$$

trong đó $i_{k0} + \cdots + i_{kn} = d$ với $k = 0, \ldots, n_d$ và $n_d = \binom{n+d}{n} - 1$. Ta kí hiệu $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_{n_d})$ là vectơ liên kết với D (hoặc với Q).

Gọi $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ là một họ các siêu mặt tùy ý bậc d và Q_j là một họ các đa thức thuần nhất trong $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ bậc d định nghĩa D_j đối với $j = 1, \ldots, q$. Họ các siêu mặt $\mathcal{D}$ được gọi là *ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese* nếu $q > n_d$ và đối với mỗi bộ phân biệt $i_1, \ldots, i_{n_{\mathcal{D}}+1} \in \{1, \ldots, q\}$, các vectơ $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_{n_d+1}}$ là độc lập tuyến tính.

Cho h là một hàm phân hình, h được gọi là *hàm siêu việt* nếu

$$\limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{T_0(r,h)}{\log r} = \infty$$

trong trường hợp $R = \infty$ hoặc

$$\limsup_{r \longrightarrow R} \frac{T_0(r,h)}{-\log(R_0 - r)} = \infty$$

trong trường hợp $R < +\infty$.

Cho $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình, ta kí hiệu

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{nếu } R = +\infty \\ O(\log \dfrac{1}{R-r} + \log T_f(r)) & \text{nếu } R < +\infty \end{cases}$$

khi $r \longrightarrow R$. Đường cong chỉnh hình $f = (f_0 : \cdots : f_n)$ được gọi là *đường cong siêu việt* nếu một trong các hàm $f_j, 0 \leqslant j \leqslant n$ là một hàm siêu việt. Trong trường hợp này ta có $O_f(r) = o(T_f(r))$.

Cho D là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bậc d và Q là một đa thức thuần nhất bậc d của $n+1$ biến với các hệ số trong $\mathbb{C}$ xác định D, ta định nghĩa

$$\overline{E}_f(D) := \{z \in \Delta \mid Q \circ f(z) = 0 \text{ bỏ qua bội }\};$$
$$E_f(D) := \{(z, m) \in \Delta \times \mathbb{N} \mid Q \circ f(z) = 0 \text{ và } \mathrm{ord}_{Q \circ f}(z) = m\}.$$

Với $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ là một họ các siêu mặt, ta định nghĩa

$$\overline{E}_f(\mathcal{D}) := \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \overline{E}_f(D) \quad \text{and} \quad E_f(\mathcal{D}) := \bigcup_{D \in \mathcal{D}} E_f(D).$$

Định lý 2.1. *Cho f và g là các đường cong chỉnh hình siêu việt không suy biến tuyến tính từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ là một họ gồm q $q \geqslant n_d + 1 + 2n_d^2/d$ các siêu mặt bậc d ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Khi đó $f \equiv g$.*

Kết luận

Trong đề tài này chúng tôi đã đạt được một số kết quả

- Chứng minh được một tiêu chuẩn chuẩn tắc cho một họ các hàm phân hình (Định lý 1.10);

- Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Bruck (Định lý 1.11);

- Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất liên quan đến đa thức vi phân của các hàm phân hình trên trường $p-$adic (Định lý 1.30);

- Chứng minh được một kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese (Định lý 2.8).

Trong thời gian tới chúng tôi tiếp phát triển lý thuyết Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên: chứng minh các kết quả về các dạng định lý cơ bản thứ hai cho trường hợp siêu mặt và tiếp tục nghiên cứu một số dạng định lý duy nhất cho các hàm phân hình và đường cong chỉnh hình trong các trường hợp khác nhau.